بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکدهٔ علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه‌کارشناسی ارشد

ریاضی‌کاربردی

ساختار سلسله مراتبی تحت شرایط غیر قطعی (بازه‌ای)

نگارش

معصومه ملکشاهی

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا نویدی

شهریور ۱۳۸۹

دانشگاه شاهد
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی

با تاییدات الهی و استعانت از حضرت ولیعصر "عج"،

جلسه دفاعیه پایان نامه **خانم معصومه ملکشاهی** به شماره دانشجویی **۸۶۷۵۷۱۰۰۵**
در رشته **ریاضی کاربردی** مقطع **کارشناسی ارشد**

تحت عنوان:

ساختار سلسله مراتبی تحت شرایط غیر قطعی (بازه ای)

به ارزش **۶ واحد** راس ساعت۳ روز **سه شنبه** مورخ **۸۹/۶/۱۶** در دانشکده علوم پایه دانشگاه شاهد تشکیل گردید. هیات داوران پس از استماع دفاعیات و پرسش های لازم، نمره و امتیاز ایشان را به شرح زیر اعلام میدارند:

نمره پایان نامه به عدد ۱۹/۱ **نمره پایان نامه به حرف** نوزده/... **درجه** عالی

عالی۲۰-۱۸ بسیار خوب ۱۷/۹۹-۱۶ خوب ۱۵/۹۹-۱۴ قابل قبول ۱۳/۹۹-۱۲ و غیر قابل قبول کمتر از ۱۲

عنوان	نام ونام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	امضاء
استاد راهنما مسؤل	دکتر حمیدرضا نویدی	استادیار	
استاد راهنما دوم	-	-	
داور اول	دکتر محمدرضا علیرضایی	دانشیار	
داوردوم	دکتر مرتضی رحمانی	استادیار	
نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی گروه	دکتر محمد اکبری	استاد یار	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر حمید رضا نویدی	استاد یار	

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که عشق و محبت آن ها انگیزه‌ی زندگیست،

و

تقدیم به همسر مهربانم که صبورانه در کنارم بوده و پیوسته مرا یاری نموده.

تقدیر و تشکر

الهی! نور تو، چراغ معرفت بیفروخت....

در آغاز بر خود لازم میدانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر نویدی که فراتر از وظیفه خویش در قبال این امر احساس مسئولیت کرده و متواضعانه مرا در پیمودن این مسیر سخت یاری نموده است صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از اساتید محترم، جناب آقای دکتر علیرضایی و جناب آقای دکتر رحمانی که در امر داوری پایان نامه، مرا از نظرات خود بهره مند ساخته اند، سپاسگزاری می کنم.

	اظهار نامه دانشجو	**شماره :** **تاریخ:**

اینجانب معصومه ملکشاهی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش کاربردی دانشکده علوم پایه دانشگاه شاهد، گواهی می دهم که پایان نامه تدوین شده حاضر با عنوان "ساختار سلسله مراتبی تحت شرایط غیر قطعی (بازه ای)" به راهنمایی استاد محترم جناب آقای دکتر حمیدرضا نویدی، توسط شخص اینجانب انجام و صحت و اصالت مطالب تدوین شده در آن، مورد تایید است و چنان چه هر زمان، دانشگاه کسب اطلاع کند که گزارش پایان نامه حاضر صحت و اصالت لازم را نداشته، دانشگاه حق دارد، مدرک تحصیلی اینجانب را مسترد و ابطال نماید هم چنین اعلام می دارم در صورت بهره گیری ا ز منابع مختلف شامل گزارش های تحقیقاتی، رساله، پایان نامه، کتاب، مقالات تخصصی وغیره، به منبع مورد استفاده و پدید آورنده آن به طور دقیق ارجاع داده شده و نیز مطالب مندرج در پایان نامه حاضر تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب و یا سایر افراد به هیچ کجا ارایه نشده است. در تدوین متن حاضر، چار چوب(فرمت) مصوب تدوین گزارش های پژوهشی تحصیلات تکمیلی دانشگاه شاهد به طور کامل مراعات شده و نهایتاً این که کلیه حقوق مادی ناشی از گزارش پایان نامه حاضر، متعلق به دانشگاه شاهد می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو:

امضاء دانشجو:

تاریخ:

چکیده

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) به عنوان ابزاری در تصمیم‌گیری چند معیاره و شیوه‌ای برای تخمین وزن، در مسائل بسیاری از قبیل انتخاب، ارزیابی، تصمیم‌گیری، پیش‌بینی و غیره به‌کارگرفته شده است. در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی متداول، قضاوت‌ها به صورت دقیق می‌باشند. به هر حال به سبب وجود پیچیدگی و عدم قطعیت در مسائل تصمیم‌گیری، بعضی اوقات تعیین قضاوت‌های دقیق امری امکان‌ناپذیر می‌باشد. به همین منظور، طبیعی است که از قضاوت‌های بازه‌ای و یا اعداد فازی برای تهیه ماتریس مقایسه زوجی استفاده نمائیم. اگر یک تصمیم‌گیرنده (DM) از قضاوت‌های بازه‌ای به جای اعداد قطعی در یک ماتریس مقایسه زوجی استفاده کند، آن‌گاه ماتریس از حالت قطعی خارج شده و به یک ماتریس مقایسه زوجی بازه‌ای تبدیل می‌شود. از طرفی چون به دست آوردن وزن ماتریس برای اولویت‌دهی گزینه ها امری ضروری است، لذا بسیاری از تحققیقات روی مسأله‌ی تعیین وزن این‌گونه ماتریس‌ها متمرکز شده‌اند. در این پایان‌نامه روشی پیشنهاد داده‌ایم که بر مبنای روش تقریبی میانگین حسابی و همچنین روش‌های صحیح نرمال‌سازی اعداد بازه‌ای صورت گرفته است. نتایج نشان داده‌اند با استفاده از این روش می‌توان وزن تقریبی یک ماتریس مقایسه زوجی بازه‌ای را با محاسبات ساده و بدون هرگونه برنامه‌ریزی ریاضی و عملیات‌های پیچیده به دست آورد و آنها را اولویت بندی نمود.

واژه‌های کلیدی: *اعداد بازه‌ای، اعداد فازی، رتبه‌بندی اعداد بازه‌ای، نرمال‌سازی، درجه امکان‌پذیری، ساختار سلسله مراتبی فازی، ماتریس مقایسه زوجی بازه‌ای، وزن بازه‌ای*

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی

۱.۱ مقدمه

تصمیم‌گیری یکی از مهمترین شاخصه‌های انسان است به‌طوری‌که هر فرد در طول زندگی به وفور با مسأله تصمیم‌گیری برخورد می‌نماید. برخی از این تصمیمات اهمیت چندانی ندارند ولی بعضی دیگر از آن‌ها می‌تواند تأثیر زیادی بر زندگی شخص و یا جامعه‌ی او داشته باشد. در این گونه مسائل است که تصمیم‌گیری صحیح اهمیت بسزایی پیدا می‌کند. با گذشت زمان و پیشرفت روز افزون علم و دانش و با توجه به اهمیت موضوع، به تصمیم‌گیری نیز به صورت علمی نگریسته شده و در این راستا تکنیک‌ها و روش‌های متعددی توسط دانشمندان و محققین ارائه شده است.

مدل‌های بهینه سازی از دوران نهضت صنعتی در جهان و بخصوص از زمان جنگ جهانی دوم همواره مورد توجه ریاضیدانان و دست اندرکاران صنعت بوده است. اما توجه محققین در دهه‌های اخیر معطوف به مدل‌های چند معیاره$MCDM$[۱] برای تصمیم‌گیری های پیچیده گردیده است در این تصمیم‌گیری ها به جای استفاده از یک معیار سنجش بهینگی از چندین معیار سنجش ممکن است استفاده گردد. دنیای اطراف ما مملو از مسائل چند معیاره است و انسانها همیشه مجبور به تصمیم‌گیری در این زمینه‌ها هستند. به طور مثال هنگام انتخاب شغل معیارهای مختلفی مانند در آمد، موقعیت اجتماعی، خلاقیت و ابتکار و غیره مطرح می‌باشد که فرد تصمیم‌گیرنده گزینه های مختلف را باید بر طبق این معیارها بسنجد. همچنین برای انتخاب منزل، معیار های متفاوتی از قبیل هزینه، نزدیکی به محل کار، فرهنگ مردم محله، دسترسی به مراکز خرید، دسترسی به

[۱] Multiple criteria decision making

مراکز آموزشی کودکان مطرح می‌باشد که تصمیم‌گیرنده باید بهترین گزینه را از نظر این معیارها انتخاب کند.

در هر تصمیم‌گیری فضای تصمیم‌سازی به صورت پیوسته یا گسسته است. همچنین ممکن است تصمیم‌گیری تک‌معیاره یا چندمعیاره باشد بعلاوه این معیارها می‌توانند به صورت‌های کمی، کیفی و یا تلفیقی از هر دو (در حالت چندمعیاره) باشند که در هر یک از این حالت‌ها نحوه‌ی تصمیم‌گیری متفاوت است. در زندگی روزمره مثال‌های فراوانی از تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه وجود دارد. در بعضی موارد نتیجه‌ی تصمیم‌گیری به حدی مهم است که بروز خطا ممکن است ضررهای جبران‌ناپذیری را بر ما تحمیل کند از این رو لازم است که تکنیک یا تکنیک‌های مناسبی برای انتخاب بهینه و تصمیم‌گیری صحیح طراحی شود.

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی از جمله تکنیک‌هایی می‌باشد که برای اولین بار در سال ۱۹۸۰ توسط توماس ال ساعتی، جهت تخصیص منابع کمیاب و نیز جهت نیازهای برنامه‌ریزی برای ارتش معرفی شد. این تکنیک امکان فرموله کردن مسأله را بصورت سلسله مراتبی فراهم می‌کند همچنین امکان در نظرگرفتن معیارهای مختلف کیفی و کمی را در مسأله دارد این فرآیند گزینه های مختلف را در تصمیم‌گیری دخالت داده و امکان تحلیل حساسیت روی معیارها و زیر معیارها را دارد. از آن‌جایی که این روش بر مبنای مقایسه زوجی بنا نهاده شده است، قضاوت و محاسبات را تسهیل می‌کند و میزان سازگاری و ناسازگاری تصمیم را نشان می‌دهد که این نیز از مزایای ممتاز این تکنیک در تصمیم‌گیری چندمعیاره است[۲].

۲.۱ اصول فرآیند تحلیل سلسله مراتبی

توماس ال.ساعتی چهار اصل زیر را به عنوان اصول فرآیند تحلیل سلسله مراتبی بیان نموده و کلیه ی محاسبات، قوانین و مقررات را بر این اصول بنا نهاده است:

اصل ۱ شرط معکوسی: اگر ترجیح عنصر A بر عنصر B برابر n باشد، ترجیح عنصر B بر عنصر A برابر$1/n$ خواهد بود.

اصل ۲ اصل همگنی: عنصر A با عنصر B باید همگن و قابل مقایسه باشند. به بیان دیگر برتری عنصر A بر عنصر B نمی‌تواند بی‌نهایت یا صفر باشد.

اصل ۳ وابستگی: هر عنصر سلسه مراتبی به عنصر سطح بالاتر خود وابسته بوده و به صورت خطی این وابستگی تا بالاترین سطح ادامه دارد.

اصل ۴ انتظارات :هرگاه تغییری در ساختمان سلسله مراتبی رخ دهد پروسه ارزیابی باید مجدداً انجام گیرد.

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی با تجزیه‌ی مسائل مشکل و پیچیده، آن‌ها را به شکلی ساده تبدیل کرده و به حل آن‌ها می‌پردازد. این تکنیک از زمان معرفی اش تا کنون به یکی از پرکاربردترین روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاری ($MCMD$) تبدیل شده و جهت حل مسائل بدون ساختار در حوزه‌های مختلف علایق و نیازهای انسانی، مانند سیاست، اقتصاد و علوم اجتماعی و مدیریت به‌کار رفته است.

مراحل اساسی این روش به شرح زیر می‌باشند:

- ساختن سلسله مراتبی
- محاسبه وزن
- محاسبه سازگاری سیستم

در ادامه هرکدام از این موارد را تشریح می‌کنیم.

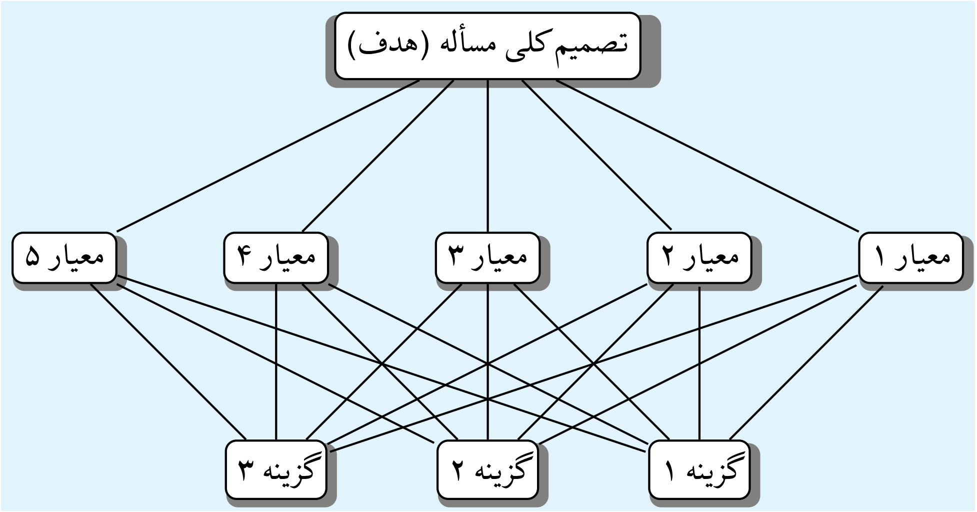
۳.۱ ساختن سلسله مراتبی

اولین گام در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی، ایجاد یک نمایش گرافیکی از مسأله می‌باشد که در رأس آن هدف کلی مسأله و در سطوح بعدی معیارها و گزینه ها قرار دارند. بدین منظور تصمیم‌گیرنده معیارها و گزینه های مختلف مسأله را در سطوحی از کل به جزء طبقه بندی نموده، سپس آن را به صورت یک نمودار چند سطحی که لازمه‌ی AHP است، نمایش می‌دهد. به طور مثال اگر تصمیم مورد نظر انتخاب یک گزینه باشد می‌توان از گزینه ها شروع کرده و آن‌ها را در پایین ترین سطح نشان داده و در سطح بعدی معیارهایی که برای انتخاب گزینه ها مورد نظر می‌باشند قرارگیرند و در بالاترین سطح نمودار سلسله مراتبی، هدف مسأله قرار می گیرد. در شکل ۱.۱ نمونه‌ای از یک نمودار سلسله مراتبی نشان داده شده است.

۴.۱ مقایسات زوجی و محاسبه وزن

در فرآیند سلسله مراتبی عناصر هر سطح نسبت به عنصر مربوطه خود در سطح بالاتر به صورت زوجی مقایسه شده و اولویت آن‌ها به صورت وزنی محا سبه می‌گردد. این وزن‌ها را **وزن نسبی**[1] می نامیم. تصمیم گیرنده در

[1] Local Priority



شکل ۱.۱: نمایش یک نمودار سلسله مراتبی

مقایسات خود از قضاوت‌های شفاهی استفاده می‌کند، این قضاوت‌ها توسط ساعتی به مقادیر کمی بین ۱ تا ۹ تبدیل شده‌اند که در جدول ۱.۱ مشخص گردیده اند.

جدول ۱.۱: مقادیر ترجیحات برای مقایسات زوجی

مقدار عددی	ترجیحات(قضاوت شفاهی)	
۹	$ExtremelyPreferred$	کاملاً مرجع، کاملاً مطلوب‌تر
۷	$VeryStronglyPreferred$	ترجیح یا اهمیت خیلی قوی
۵	$StronglyPreferred$	ترجیح یا اهمیت قوی
۳	$ModeratelyPreferred$	کمی مرجع، مهمتر یا کمی مطلوب‌تر
۱	$EquallyPreferred$	ترجیح، اهمیت یا مطلوبیت یکسان
۲, ۴, ۶, ۸		ترجیحات بین فواصل فوق

به طور کلی یک ماتریس مقایسه زوجی به صورت زیر نشان داده می‌شود که در آن a_{ij} ترجیح عنصر iام نسبت به عنصر jام می‌باشد که باید توسط تصمیم‌گیرنده مقادیر a_{ij} مشخص شود. با مشخص بودن a_{ij}ها

می‌توانیم وزن نسبی عناصر یعنی w_i ها را به دست آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \;\; i,j = ۱,۲,\dots,n.$$

از تلفیق وزن‌های نسبی وزن نهایی هرگزینه تعیین می‌گردد که آن را **وزن مطلق**[۱] می نامیم.

با توجه به نکات بیان شده، نتیجه می گیریم که ماتریس‌های مقایسه زوجی دارای قطر یك هستند و در دسته‌ی ماتریس‌های مثبت[۲] قرار دارند. همچنین دارای خاصیت معکوس[۳] می‌باشند یعنی عناصر زیر قطر اصلی عکس عناصر بالای قطر اصلی هستند.

۵.۱ ماتریس سازگار و خصوصیات آن

یکی از مزایای فرآیند سلسله مراتبی کنترل سازگاری سیستم است به عبارت دیگر همواره می‌توان میزان سازگاری سیستم را محاسبه نمود و نسبت به قابل اعتماد بودن جواب آن قضاوت کرد.

تعریف ۱.۵.۱. ماتریس مقایسه زوجی $A = (a_{ij})$ را سازگارگوییم، هرگاه رابطه زیر در آن برقرار باشد:

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik} \qquad i,j,k = ۱,۲,\dots,n$$

در غیر این صورت Aرا ناسازگارگوییم.

خاصیت سازگاری باعث می‌شود که مرتبه‌ی ماتریس یك شود. به بیان دیگر همه سطرها (ستون ها) ترکیب خطی از یکدیگر هستند و بین آن‌ها وابستگی خطی وجود دارد. در ماتریس‌های سازگار با داشتن هر سطر(یا هر ستون) می‌توان همه‌ی درایه‌های ماتریس را محاسبه کرد[۱۴]. به دلیل اهمیت موضوع به شرح این مطلب می پردازیم.

---

[۱] Overall Priority

[۲] ماتریس $A = (a_{ij})$ را مثبت‌گوییم هرگاه برای هر i,j داشته باشیم $a_{ij} > ۰$ و می نویسیم $A > ۰$.

[۳] reciprocal

فرض کنیم می‌خواهیم یک مجموعه‌ی n تایی از اشیاء را دوبدو بر طبق وزن‌های نسبی شان با یکدیگر مقایسه کنیم. ابتداء اشیاء را با $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و وزن آن‌ها را با $w_1, w_2, \ldots, w_n$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که ماتریس A سازگار باشد مقایسات زوجی به فرم ماتریسی زیر نمایش داده می‌شوند:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \end{array}$$

عناصر این ماتریس همگی مثبت می‌باشند، با این ویژگی که $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ (ویژگی معکوس)، این ماتریس، ماتریس معکوس نامیده می‌شود.

ملاحظه می‌کنیم که اگر ماتریس معکوس را در ترانهاده بردار $w^T = (w_1, \cdots, w_n)^T$ ضرب کنیم بردار nw به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

مسأله را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$Aw = nw$$

با فرض این که w داده شده است شروع به کار می‌کنیم. اما اگر فقط A را به ما داده باشند و بخواهیم w را به دست آوریم آن‌گاه باید دستگاه $(A - nI)w = 0$ را حل کنیم. این دستگاه یک جواب غیر صفر دارد اگر وتنها اگر n یک مقدار ویژه‌ی A باشد یعنی n ریشه‌ی چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A می‌باشد. ولی A فقط یک سطر مستقل خطی دارد و بقیه سطرهای آن وابسته خطی می‌باشند (زیرا سطرهای آن ضریبی از سطر اول هستند.) لذا رتبه A برابر با ۱ است، بنابراین تمام مقادیر ویژه‌ی A یعنی λ_i ها، $i = 1, \ldots, n$ صفر می‌باشند به جز یکی از آن‌ها. همچنین می دانیم که:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Tr(A) = \text{مجموع عناصر روی قطر ماتریس } A = n$$

بنابراین تنها یکی از λ_i ها که آن را λ_{max} می نامیم مساوی با n است و $\forall \lambda_i \neq \lambda_{max}, \lambda_i = 0$. جواب w این مسأله هرکدام از ستون های ماتریس A می‌تواند باشد که اختلاف این جواب‌ها فقط در یک ضریب ثابت

است. به هر حال مطلوب آن است که این جواب را نرمالایز کنیم بدین صورت که هر مؤلفه از ستون مورد نظر را بر مجموع مؤلفه‌های همان ستون تقسیم کنیم نتیجه یک جواب منحصر به فرد است و مهم نیست کدام ستون مورد استفاده قرار بگیرد. با توجه به مطالب بیان شده می‌توان نتیجه‌گیری کرد که هر ماتریس سازگار دارای خصوصیات زیر است:

الف- مقدار وزن عناصر برابر مقدار نرمالیزه هر ستون می‌باشد.

ب- مقدار ویژه برابر طول ماتریس است ($A \times w = nw$).

ج- مقدار ناسازگاری در این ماتریس صفر است.

۶.۱ ماتریس ناسازگار و خصوصیات آن

در این بخش می‌خواهیم بدانیم که اگر ماتریس مقایسه زوجی ناسازگار باشد میزان ناسازگاری ماتریس چه مقدار بوده و آن را چگونه اندازه‌گیری می‌کنیم. قبل از بیان معیار اندازه‌گیری ناسازگاری بهتر است چند قضیه مهم را ذکر کنیم[۱۵، ۱۶]:

قضیه ۱.۶.۱. *فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ از مؤلفه‌های مثبت با ویژگی $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$ باشد آن‌گاه A سازگار است اگر وتنها اگر $\lambda_{max} = n$.*

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که A سازگار باشد. از معادله $Aw = \lambda w$ داریم:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j w_i^{-1} \implies n\lambda - n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} w_j w_i^{-1}$$

ماتریس A سازگار است لذا $a_{ij} = w_i / w_j$، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j w_i^{-1} &\implies n\lambda - n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (w_i/w_j) w_j w_i^{-1} \\
&\implies n(\lambda - 1) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} 1 = n(n-1) \\
&\implies \lambda = n.
\end{aligned}$$

از طرفی مجموع مقادیر ویژه‌ی ماتریس A برابراست با $Tr(A)$، و چون درایه‌های روی قطراصلی ماتریس A همگی ۱ هستند لذا $Tr(A) = n$ بنابراین نتیجه می گیریم $\lambda_{max} = n$.
بعکس، فرض می‌کنیم که $\lambda_{max} = n$ ثابت می‌کنیم که A ماتریسی سازگار است. با نوشتن n مؤلفه‌ی معادله $Aw = \lambda_{max} w$ به صورت:

$$\lambda_{max} - ۱ = \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_{max} - ۱ = \sum_{j \neq i} a_{۱j} \frac{w_j}{w_۱} \\ \lambda_{max} - ۱ = \sum_{j \neq i} a_{۲j} \frac{w_j}{w_۲} \\ \qquad \vdots \\ \lambda_{max} - ۱ = \sum_{j \neq i} a_{nj} \frac{w_j}{w_n} \end{cases}$$

و از جمع n معادله بالا داریم:

$$n\lambda_{max} - n = \sum_{\substack{i,j=۱ \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}$$

با تغییر اندیس i و j داریم:

$$n\lambda_{max} - n = \sum_{۱ \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} + a_{ji} \frac{w_i}{w_j}$$

حال با فرض $a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = y$ خواهیم داشت:

$$n\lambda_{max} - n = \sum_{۱ \leqslant i < j \leqslant n} y + \frac{۱}{y}$$

از آن‌جا که $y = a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \epsilon_{ij}$ و تابع $\epsilon_{ij} + \frac{۱}{\epsilon_{ij}}$ فقط به ازای $\epsilon_{ij} = ۱$ مینیمم مقدار خود را اختیار می کرد لذا رابطه $y + \frac{۱}{y} \geq ۲$ همیشه برقرار است و حالت تساوی به ازای $y = ۱$ اتفاق می افتد، لذا خواهیم داشت:

$$n\lambda_{max} - n = \sum_{۱ \leqslant i < j \leqslant n} y + \frac{۱}{y} \geq \sum_{۱ \leqslant i < j \leqslant n} ۲$$

$$\Longrightarrow n\lambda_{max} - n \geq \sum_{۱ \leqslant i < j \leqslant n} ۲ = n^۲ - n$$

$$\overset{\lambda_{max}=n}{\Longrightarrow} n^۲ - n \geq n^۲ - n \implies n^۲ - n = n^۲ - n$$