با نام او که یادش آرام بخش دلهاست

سپاس فراوان خداوند سبحان را که به آدمی قوه‌ی ادراک و تفکر بخشید و علم و دانش را مایه‌ی مباهات بشریت قرار داد. الهی سپاس تو را، بر هر چه می ستانی و می بخشی، زیرا گرفتن و نبخشیدن همه از روی حکمت و مصلحت است. الهی اگر ندانیم چه خواهیم و از درخواست خود سرگردان بمانیم ما را به آن چه مصلحت است راهنمایی فرما و دلمان را به آن چه خیر و نیکویی در آن است متوجه گردان. باری خداوند منّان را شاکرم که لطفش را بدرقه‌ی راهم ساخت و اندیشه ام را روشنایی بخشید و توفیق علم‌آموزی را به بنده عطا فرمود.

اینک که با لطف و عنایت پروردگار چنین توفیقی یافته‌ام برخود لازم می دانم از تمامی بزرگوارانی که در تمام دوران تحصیل از راهنمایی‌ها و کمک‌هایشان بهره جسته‌ام سپاس‌گزاری کنم.

از زحمات بی‌دریغ و همیشگی دو پرتو نور زندگیم پدرم همیشه تکیه‌گاهم و مادر همیشه صبور و دلسوزم سپاس‌گزارم و بر دستان پر مهراین دو فرشته‌ی زندگیم بوسه می زنم، از پروردگار می خواهم سایه‌ی عزت و سلامت این عزیزان را بر سرم پایدار بدارد تا بتوانم قدردان محبتشان باشم.

از زحمات استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد موسایی به جهت تلاش‌های بی شائبه ایشان در تدوین و پیشبرد این پایان نامه تقدیر و تشکر می کنم و برای ایشان از خداوند متعال آرزوی سلامتی و توفیق روزافزون دارم.

بی نهایت سپاس گزار و قدردان زحمات استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر اسماعیل فیضی هستم که با نگاه ریزبینانه مرا راهنمایی کردند و از خداوند سلامتی و توفیق روزافزون برای ایشان آرزومندم.

از اساتید گرانقدر آقایان دکتر حجت اله سامع و دکتر عزیزاله عزیزی که زحمت داوری و تصحیح پایان نامه را پذیرفتند صمیمانه سپاس‌گذارم. هم‌چنین از تمامی اساتید محترم گروه ریاضی که در این مدت از محضرشان بهره برده‌ام قدردانی می نمایم.

و در انتها از تمامی عزیزانی که در تکمیل و اتمام این پایان‌نامه مرا یاری نموده‌اند، به ویژه سرکار خانم کاشفی کارشناس محترم گروه ریاضی تقدیر و تشکر می‌کنم.

صفورا قاسمی تابش

آذرماه ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

مقدمه

۱ تعاریف اولیه ۱

۱—۱ نظریه اندازه ۱

۱—۲ فضاهای خطی ۳

۱—۳ نیم‌گروه‌ها ۱۰

۱—۴ جبرباناخ و آنالیز ۱۳

۲ n—بسیارمیانگین‌پذیری چپ نیم‌گروه‌ها ۲۲

۲—۱ تعریف و مثال ۲۲

۲—۲ نقطه‌ی ثابت و n—بسیارمیانگین‌پذیری چپ ۳۳

۳ قضایای اساسی ۳۷

۴ نیم‌گروه نگاشت‌های به‌طور قوی پیوسته ۷۱

۴—۱ نقطه‌ی ثابت و نیم‌گروه نگاشت‌های به‌طور قوی پیوسته ۷۱

۴–۲ کاربردها ۷۸

کتاب نامه ۸۸

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۹۲

مقدمه

هر چیزی باید به ساده‌ترین شکل ممکن باشد. اما نه ساده‌تر از آن.
آلبرت انستین

ریاضیات نه تنها ابزاری بی بدیل در شکل‌گیری دقت واستدلال است بلکه نیروی شهود، قدرت تخیل و روحیه‌ی نقاد را پر و بال می دهد؛ ریاضیات همچنین زبانی مشترک بین ملت‌ها و عنصری پرقدرت در فرهنگ است. اما علاوه بر این‌ها، به کمک رابطه‌ی دو جانبه‌ی کنش‌ها و واکنش‌ها با سایر علوم، ریاضیات در تکوین مفاهیم و بکارگیری موضوع‌های زندگی روزمره‌ی ما نقشی روزافزون ایفا می کند. ریاضیات هم‌چنین به علوم دیگر دقت می بخشد و از مباحثه و جدل‌های طولانی جلوگیری می‌کند. در میان شاخه‌های مختلف ریاضیات، آنالیز یکی از کاربردی ترین مباحث است. امروزه آنالیز ریاضی در علوم مختلف مورد استفاده قرار می گیرد.

در میان مباحث آنالیز تابعی و هارمونیک، "میانگین‌پذیری" یکی از اساسی‌ترین و مهم‌ترین موضوعات می باشد، که کارهای لبگ[1] در سال ۱۹۰۴ باعث مطرح شدن موضوع میانگین‌پذیری شد.

[1] Lebesgue

در ادامه فون‌نیومن [۲] در مورد یک گروه میانگین‌پذیر بیان کرد: " گروه G میانگین‌پذیر است اگروتنها اگر یک میانگین پایای چپ روی G وجود داشته باشد." در سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۰ موضوع گروه‌های میانگین‌پذیر و نیم‌گروه‌های میانگین‌پذیر مورد توجه دی [۳] قرار گرفت. مقاله‌ی او با عنوان نیم‌گروه‌های میانگین‌پذیر یک راهنمای اساسی در این زمینه می باشد. او همچنین در مقاله‌ی دیگری نشان داد، نیم‌گروه S دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت است اگر و فقط اگر یک میانگین پایای چپ داشته باشد. در سال ۱۹۶۵ میچل [۴]، نخستین بار مفهوم بسیارمیانگین‌پذیری نیم‌گروه‌ها را مطرح نمود. او در مقاله‌ی

Mitchell, T., **1966**. Fixed points and multiplicative left invariant means. Trans. Amer. Math. Soc. 122, 195-202,

نشان داد اگر نیم‌گروه S این ویژگی را داشته باشد که هر دو عضو از S، صفر راست مشترک داشته باشند آن‌گاه S میانگین پایای چپ ضربی دارد. میچل بیان کرد عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. اما گرانیر [۵] در همان سال در مقاله ای با عنوان

Granirer, E., **1965**. Extremely amenable semigroups. Math. Scand. 17, 177-197,

نشان داد اگر S بسیارمیانگین‌پذیر چپ باشد هر دو عضو از S، صفر راست مشترک دارند. او همچنین ثابت کرد اگر S بسیارمیانگین‌پذیر چپ و G گروهی از مرتبه‌ی n باشد، آن‌گاه $S \times G$ بسیارمیانگین‌پذیر چپ خواهد بود. لائو [۶] در سال ۱۹۷۰ در مقاله‌ای با عنوان

[۲] Von Neumann
[۳] Day
[۴] Mitchell
[۵] Granirer
[۶] Lau

Lau, A. T., **1970**. Topological semigroups with invariant means in the convex hull of multiplicative means, Trans. Amer. Math. Soc. 152, 69-84,

برای نخستین بار $n-$ بسیارمیانگین‌پذیری چپ نیم‌گروه‌ها را مطرح نمود. مقاله‌ی لائو یکی از اصلی‌ترین و مهم‌ترین منابع این پایان نامه می باشد که در آن مثال‌ها و قضایای کاربردی در این زمینه ارائه شده است. هدف اصلی او در این مقاله اثبات این مطلب بود که اگر $LUC(S)$ فضای توابع به طور یکنواخت پیوسته روی نیم‌گروه S باشد آن‌گاه برای هر نیم‌گروه توپولوژیک S، $LUC(S)$ یک میانگین چپ پایا در غلاف محدب مجموعه‌ی میانگین‌های ضربی روی $LUC(S)$ دارد اگر و فقط اگر $LUC(S)$، $n-$ بسیارمیانگین‌پذیر چپ باشد.

طی این سال‌ها ریاضی دانان زیادی در زمینه‌ی $n-$ بسیارمیانگین‌پذیری چپ نیم‌گروه‌ها بررسی‌هایی انجام دادند تا اینکه در سال ۱۹۷۱ لائو و گرانیرر در مقاله‌ی

Granirer, E., Lau, A. T., **1971**. Invariant means on locally compact groups. Illinois J. Math. 15, 249-257,

نشان دادند اگر S زیرنیم‌گروهی از یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد آن‌گاه $LUC(S)$، $n-$ بسیارمیانگین‌پذیر چپ است اگروفقط اگر S نیم‌گروهی متناهی از مرتبه‌ی n باشد. در ادامه لائو تحقیقات عمده‌ای در این رابطه انجام داد. وی در سال ۱۹۷۲ در [۱۸]، عمل نیم‌گروه‌های توپولوژیک، میانگین‌های پایا و نقاط ثابت را مورد مطالعه قرار داد. همچنین نقاط ثابت نیم‌گروه‌های توپولوژیک و ارتباط این نقاط با میانگین‌های پایای چپ را بررسی نمود.

با گذشت زمان گروهی از ریاضی‌دانان سعی کردند ارتباطی میان نقاط ثابت نیم‌گروهی از نگاشت‌ها و میانگین‌پذیری برقرار کنند. تا اینکه در سال ۲۰۰۵، سوزوکی[۷] در مقاله‌ای با عنوان

Suzuki, T., **2005**. The set of common fixed points of a one-parameter continuous of mappings is $F(T(1))\bigcap F(T(\sqrt{2}))$, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 673-681,

مجموعه‌ی نقاط ثابت یک نیم‌گروه $\tau-$پیوسته‌ی یک پارامتری را بررسی نمود:

فرض کنیم $\{T(t) : t \geq 0\}$ یک نیم‌گروه $\tau-$پیوسته‌ی یک پارامتری از نگاشت‌های غیرانبساطی روی زیرمجموعه‌ی ناتهی و محدب C از فضای باناخ E باشد. اگر α و β اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$، آن‌گاه:

$$\bigcap_{t\geq 0} F(T(t)) = F(T(\alpha))\bigcap F(T(\beta)),$$

که در آن $F(T(t))$ مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت $T(t)$ است.

در سال‌های اخیر لائو، مایک[۸] و تاکاهاشی[۹] برای نیم‌گروهی از نگاشت‌های غیرانبساطی در فضاهای باناخ ثابت کردند که اگر S نیم‌گروه برگشت‌پذیر چپ، C زیرمجموعه‌ی محدب فشرده از یک فضای باناخ و $\mathbb{S} = \{T(t) : t \in S\}$ نیم‌گروه غیرانبساطی روی C باشد ونیز $z \in C$، آن‌گاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

الف) z نقطه‌ی ثابت مشترک $\mathbb{S} = \{T(t) : t \in S\}$ است؛

ب) اگر μ میانگین چپ پایا روی $AP(S)$ باشد آن‌گاه $T_\mu z = z$.

[۷] Suzuki
[۸] Miyake
[۹] Takahashi

تا اینکه در سال ۲۰۰۸ مطالعه در زمینه‌ی نقاط ثابت نیم‌گروهی از نگاشت‌های غیرانبساطی و میانگین‌پذیری مورد توجه کانگ[۱۰] قرار گرفت و طی مقاله‌ی،

Kang, J., **2008**. Fixed point set of semigroups of non-expansive mappings and amenability. J. Math. Anal. Appl. 341, 1445-1456,

موضوع $n-$بسیارمیانگین‌پذیری چپ نیم‌گروهی از نگاشت‌های غیرانبساطی را مورد بررسی قرار داد، که اساس کار این پایان نامه می باشد.

لائو، مایک و تاکاهاشی S را یک نیم‌گروه برگشت‌پذیر چپ فرض کرده‌اند و نقطه‌ی ثابت نیم‌گروه غیرانبساطی را مورد بررسی قرار داده‌اند، همچنین کانگ در مرجع [۱۳] نتیجه‌ی مشابهی برای یک زیرگروه بسیارمیانگین‌پذیر چپ، وقتی که C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی، محدب و به طور ضعیف فشرده از یک فضای باناخ با نرم مشتق‌پذیر باشد بدست آورد.

در این تحقیق S یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک و $CB(S)$، $n-$ بسیارمیانگین‌پذیر چپ فرض شده و با این مفروضات نقطه‌ی ثابت نیم‌گروهی از نگاشت‌های غیرانبساطی مورد بررسی قرار می گیرد. از این رو این تحقیق شامل ۴ فصل است :

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی از فضاهای خطی، نیم‌گروه‌ها و همچنین مفاهیمی از جبرهای باناخ و آنالیز هارمونیک را ارائه می دهیم. در فصل دوم که با استفاده از مطالب مرجع [۱۷] تنظیم شده، به بیان تعریف و مثال‌هایی از $n-$ بسیارمیانگین پذیری چپ می پردازیم. در فصل سوم قضایای اساسی از نقاط ثابت نیم‌گروهی از نگاشت‌ها وقتی $CB(S)$، $n-$ بسیارمیانگین‌پذیر چپ است اثبات می شود. در فصل چهارم مجموعه‌ی نقاط ثابت نیم‌گروهی از نگاشت‌های به طور قوی پیوسته

[۱۰] Kung

مورد بررسی قرار می گیرد.

هر چه به هدف نزدیک تر شویم، مشکلات افزون تر خواهند شد.

گوته

فصل ۱

تعاریف اولیه

جوهر ریاضیات، آزادی آن است.

جورج فردیناند فیلیپ کانتور

از آن‌جایی که برخی مفاهیم این فصل از اساسی‌ترین ابزار لازم در بررسی و مطالعه‌ی قضایا و تعاریف فصل‌های دیگر است، بنابراین در این فصل به طور مختصر به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی از آنالیز حقیقی، تابعی و هارمونیک می‌پردازیم.

در سراسر این پایان‌نامه $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعدادطبیعی، $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعدادگویا، $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعدادمختلط، $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعدادحقیقی و $\mathbb{T}$ دایره‌ی واحد را نشان می‌دهد.

۱—۱ نظریه اندازه

۱—۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ی ناتهی و $\mathbb{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. $\mathbb{A}$ را σ—جبری در X می‌نامند هرگاه:

الف) $X \in \mathbb{A}$؛

ب) اگر به ازای $n = ۱, ۲, ...$، $E_n \in \mathbb{A}$ آن‌گاه $\cup_{i=۱}^{\infty} E_i \in \mathbb{A}$؛

ج) اگر $E \in \mathbb{A}$، آن‌گاه $E^C \in \mathbb{A}$.(E^C متمم E نسبت به X است)

۱—۲ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathbb{A}$، σ—جبری در X باشد. نگاشت $\mu : \mathbb{A} \to [0,\infty]$ یک اندازه روی X است هرگاه:

الف) $\mu(\phi) = 0$؛

ب) اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای $\mathbb{A}$ باشد، آن‌گاه $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_J) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

برای تأکید، هر اندازه را یک اندازه مثبت می‌نامند.

۱—۳ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی، $\mathbb{A} = P(X)$، σ—جبر باشد. اگر $E \in \mathbb{A}$ که $\delta_x(E) = \{\begin{smallmatrix} 1 & x\in E \\ 0 & x\notin E \end{smallmatrix}$، $\delta_x(E)$ اندازه‌ی دیراک[1] در E است.

۱—۴ تعریف. الف) فرض کنیم X، فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد. σ—جبر تولید شده بوسیله‌ی مجموعه‌های باز در X، σ—جبر بورل و هر اندازه‌ای که روی یک σ—جبر بورل تعریف شود اندازه‌ی بورل[2] نامیده می‌شود. اندازه‌ی بورل μ، روی X به طور موضعی متناهی است هرگاه برای هر $x \in X$، همسایگی بازی مانند U شامل x باشد که، $\mu(U) < \infty$.

ب) فرض کنیم μ اندازه‌ی بورل روی X و E زیر مجموعه‌ی بورل از X باشد، μ منظم است اگر:

(i) $\mu(E) = inf\{\mu(U) : U \supset E, U$ باز $\}$ که در این صورت μ، منظم خارجی نامیده می‌شود؛

(ii) $\mu(E) = sup\{\mu(K) : k \subset E, K$ فشرده $\}$ که در این صورت μ، منظم داخلی نامیده می‌شود.

ج) اندازه‌ی بورل μ، یک اندازه‌ی رادون روی X نامیده می‌شود هرگاه روی مجموعه‌های فشرده متناهی، روی مجموعه‌های، بورل منظم خارجی و روی مجموعه‌های باز، منظم داخلی باشد.

[1] Dirac
[2] Borel

د) اندازه‌ی بورل μ چپ (راست) پایا نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه‌ی بورل A و $x \in X$، $\mu(xA) = \mu(A)$ ($\mu(Ax) = \mu(A)$).

۱–۲ فضاهای خطی

۱–۵ تعریف. فرض کنیم X فضای خطی باشد. یک نیم‌نرم روی X تابع حقیقی مقدار $p : X \to [0, \infty)$ است که شرایط زیر را دارا باشد:

الف) برای هر $x, y \in X$، $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$؛

ب) برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$, x$\in X$، $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

نیم‌نرم p روی فضای خطی X، یک نرم نامیده می‌شود اگر $x \in X$ و $p(x) = 0$، آن‌گاه $x = 0$. نرم روی X را با $\| \ \|$ نشان می‌دهند که در این صورت $p(x) = \|x\|$. فضای خطی X، همراه $\| \ \|$، یک فضای نرم‌دار نامیده و با نماد $(X, \| \ \|)$ نشان داده و به طور خلاصه می‌گویند X فضای نرم‌دار است.

۱–۶ تعریف. فضای نرم‌دار X، باناخ[۳] نامیده می‌شود، هرگاه نسبت به متر القا شده از نرم آن، فضای کامل باشد.

مثال ۱. فرض کنیم $(X, \mathbb{A}, \mu)$ فضای اندازه باشد و $1 \leq p < \infty$، در این صورت :
$L^p(\mu) = \{f | \int_X |f|^p d\mu < \infty, \ f : X \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر$\}$، با جمع و ضرب معمولی و نرم $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ برای هر $f \in L^p(\mu)$، یک فضای باناخ است.([۷])

۱–۷ تعریف. فرض کنیم X فضای خطی و $\mathbb{P}$ خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی X باشد. خانواده‌ی $\mathbb{P}$ نقاط X را جدا می‌کند، اگر برای هر $x \in X - \{0\}$، $p \in \mathbb{P}$ موجود باشد به‌طوری که $p(x) \neq 0$.

[۳] Banach

۱ــ۸ تعریف. فرض کنیم X فضای توپولوژیک خطی که توپولوژی آن توسط خانواده‌ای از نیم‌نرم‌های $\mathbb{P}$ تعریف می‌شود. اگر $\bigcap_{p\in\mathbb{P}}\{x : p(x) = \circ\} = (\circ)$، X فضای محدب موضعی است.

مثال ۲. هر فضای نرم‌دار تفکیک پذیر و فضای $L^p(\mu)$، برای $p \geq ۱$ محدب موضعی می‌باشند.

۱ــ۹ تعریف. فضای توابع پیوسته : فرض کنیم X فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد:

الف) $C(X)$ فضای توابع پیوسته، کراندار و مختلط مقدار روی X است که با جمع و ضرب اسکالر معمولی و نرم زیر تشکیل یک فضای باناخ می‌دهد و این فضا را فضای یکنواخت می‌نامند.

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

ب) $C_\circ(X)$ فضای توابع پیوسته بر X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند یعنی اگر $f \in C(X)$، برای هر $\epsilon > \circ$ مجموعه‌ای فشرده مانند K وجود دارد که برای هر $x \in K^c$، $|f(x)| < \epsilon$.

پ) $C_c(X)$ فضای توابع پیوسته بر X که تکیه‌گاه فشرده دارند یعنی اگر $f \in C(X)$، تکیه‌گاه f را با نماد $supp(f)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq \circ\}}.$$

۱ــ۱۰ قضیه. گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) اگر X ناتهی باشد، $C_\circ(X)$ نسبت به نرم یکنواخت بسته و زیرفضای $C(X)$ و $C_c(X)$ زیرفضای $C_\circ(X)$ است بنابراین $C_c(X) \subseteq C_\circ(X) \subsetneqq C(X)$ ؛

ب) $C_c(X)$ با نرم یکنواخت در $C(X)$ چگال است؛

پ) اگر X فشرده باشد، آن‌گاه $C_c(X) = C_\circ(X) = C(X)$.

اثبات. [[۲۶]]. ■

۱—۱۱ تعریف. فرض کنیم H فضای خطی روی $\mathbb{C}$ باشد. نگاشت $< \, , \, >: H \times H \to \mathbb{C}$ ضرب داخلی روی H نامیده می‌شود، هرگاه:

الف) برای هر $x, y \in H$ ، $< y, x > = \overline{< x, y >}$؛

ب) برای هر $x, y, z \in H$ و $a, b \in \mathbb{C}$، $< ax + by, z > = a < x, z > + b < y, z >$؛

ج) برای هر $x \in H - \{\circ\}$، $< x, x > \in (\circ, \infty)$.

اگر H فضای خطی مجهز به ضرب داخلی $< \, . \, >$ باشد، برای هر $x \in H$ نگاشت با ضابطه‌ی $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ نرم روی H است، که آن را نرم تولید شده توسط ضرب داخلی می‌نامند. هرگاه H نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، فضای باناخ باشد آن‌گاه H را فضای هیلبرت[۴] نامند.

مثال ۳. الف) $\mathbb{C}^n$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ثابت، مرکب از n—تایی‌های مختلط $\xi_1, ..., \xi_n$، در صورتی که جمع و ضرب اسکالر مولفه به مولفه تعریف شوند با ضرب داخلی زیر فضای هیلبرت است :

$$< x, y > = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \bar{\eta_j} \qquad (x = \xi_1, ..., \xi_n, y = \eta_1, ..., \eta_n).$$

ب) فرض کنیم X فضای اندازه‌ی دلخواه و μ اندازه روی X باشد. $L^2(\mu)$ با ضرب داخلی $< f, g > = \int_X f\bar{g} d\mu$ که $f, g \in L^2(\mu)$ فضای هیلبرت است.([۲۷])

۱—۱۲ تعریف. فرض کنیم X فضای خطی باشد. مجموعه‌ی E در X را محدب می‌نامند، هرگاه $x, y \in E$ و $\circ \leq t \leq 1$ آن‌گاه، نقطه‌ی $z_t = (1 - t)x + ty$ نیز در E باشد. وقتی t از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند می‌توان z_t را پاره‌خط مستقیمی از x تا y در E تجسم نمود. لازم به ذکر است که مجموعه‌های محدب تحت انتقال پایا هستند یعنی اگر E محدب باشد مجموعه‌ی زیر نیز محدب است $E + x = \{y + x : \; y \in E\}$.

[۴] Hilbert

مثال ۴. اگر $X=\mathbb{R}^{۲}$ آن‌گاه مجموعه‌ی $K=\{(x,y)\in R^{۲}:x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\}$، محدب است.

۱–۱۳ تعریف. فرض کنیم X فضای خطی و $C\subseteq X$ محدب باشد.

الف) $S\subseteq C$ را محمل C می‌نامند هرگاه:

(i) $S\neq\phi$ و محدب باشد؛

(ii) برای هر $x,y\in C$, $۱\leq t\leq ۰$ و $tx+(۱-t)y\in S$، آن‌گاه $x,y\in S$.

ب) $c\in C$ نقطه‌ی فرین مجموعه‌ی C است، هرگاه $\{c\}$ محمل C باشد. مجموعه‌ی نقاط فرین C را با $ext(C)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۵. فرض کنیم $X=\mathbb{R}^{۲}$ و $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}:x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\}$، آن‌گاه مجموعه‌ی $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}:x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\}$ محمل C است و $ext(C)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}:x^{۲}+y^{۲}=۱\}$.

۱–۱۴ تعریف. فرض کنیم A زیرمجموعه فضای خطی X باشد. غلاف A را با $co(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$co(A)=\{\sum_{۱}^{n}\lambda_i x_i:\ x_i\in A\ ,\ \sum_{۱}^{n}\lambda_i=۱\ ,\ \lambda_i\geq ۰\}.$$

به عبارت دیگر غلاف محدب A، اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب شامل A است، پس غلاف محدب A کوچک‌ترین مجموعه‌ی محدب شامل A است.

۱–۱۵ قضیه. کرین – میلمن [۵] : فرض کنیم X فضای توپولوژیک خطی و K زیرمجموعه‌ی محدب فشرده‌ی ناتهی از X باشد، در این صورت محمل بسته از K دارای نقطه‌ی فرین است یعنی $ext(K)\neq\phi$ و $K=\overline{co}\ (ext(K))$.

[۵] Krein-Milman

اثبات. [[۲٦] قضیه‌ی ۳—۲۱]. ■

۱—۱٦ تعریف. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار و $L(X,Y)$ مجموعه‌ی نگاشت‌های خطی از X به توی Y باشد. $T \in L(X,Y)$ را نگاشت خطی کراندار از X به Y می‌گویند هرگاه عددی مثبت مانند M باشد به‌طوری که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq M\|x\|$. مجموعه‌ی نگاشت‌های خطی کراندار از X به توی Y، را با نماد $B(X,Y)$ نشان می دهند. $B(X,Y)$ زیرفضایی از $L(X,Y)$ است. چنان‌چه $X = Y$، بجای $B(X,Y)$ از نماد $B(X)$، همچنین اگر $Y = \mathbb{C}$ بجای $B(X,\mathbb{C})$ از نماد X^* استفاده می‌شود که X^* دوگان X است و نیز فضای $X^{**} = B(X^*,\mathbb{C})$، دوگان دوم X نامیده می‌شود. اگر $T \in B(X,Y)$ نرم T به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

۱—۱۷ قضیه. اگر Y فضای باناخ باشد آن‌گاه، $(B(X,Y), \|\ \|)$ یک فضای باناخ است.

اثبات. [[۲٦] قضیه‌ی ۴—۱]. ■

۱—۱۸ نتیجه. اگر X فضای نرم‌دار باشد آن‌گاه، X^* و X^{**} فضاهای باناخ هستند.

اثبات. [[۲٦] قضیه‌ی ۴—۵]. ■

۱—۱۹ قضیه. گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $T \in B(X,Y)$؛

ب) T در صفر پیوسته است؛

پ) T پیوسته است؛

ت) عدد مثبتی مانند t موجود باشد که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq t\|x\|$.

اثبات. [[۳] گزاره‌ی ۲—۱]. ■

۱—۲۰ تعریف. فرض کنیم X فضای توپولوژیک خطی باشد. نگاشت خطی $\tau : X \to X^{**}$ برای $x \in X$ و $x^* \in X^*$ با ضابطه، $\tau(x)(x^*) = x^*(x)$ تعریف می‌شود، اگر τ پوشا باشد، X انعکاسی (بازتابی) نامیده می‌شود.

توپولوژی ضعیف : فرض کنیم X فضای توپولوژیک خطی و X^* مجموعه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته روی X باشد و نیز $x^* \in X^*$، در این صورت $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ که $x \in X$، یک نیم‌نرم روی X است. $T = \{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$، زیرپایه‌ای برای توپولوژی روی X تولید می‌کند که این توپولوژی را توپولوژی ضعیف، روی X نامیده و با نماد τ_w نشان داده می‌شود. در حقیقت (X, τ_w) یک فضای خطی محدب موضعی که τ_w کوچک‌ترین توپولوژی ممکن روی X است که هر عنصر $x^* \in X^*$، نسبت به آن پیوسته است. بنابراین اگر τ توپولوژی اولیه یا اصلی بر X باشد، داریم $\tau_w \subseteq \tau$. توپولوژی ضعیف را همچنین با نماد $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهند.

۱—۲۱ قضیه. فرض کنیم X فضای توپولوژیک، $x \in X$ و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X باشد، آن‌گاه $x_n \xrightarrow{w} x$ در توپولوژی ضعیف (x_n به طور ضعیف به x همگراست) اگر و تنها اگر برای هر $x^* \in X^*$، $x^*(x_n) \to x^*(x)$.

اثبات. [[۱]] ■

توپولوژی ضعیف* : فرض کنیم X فضای توپولوژیک خطی و X^{**} دوگان دوم آن باشد. برای هر $x \in X$، نیم‌نرم p_x روی X^* برای هر $x^* \in X^*$ باضابطه‌ی $p_x(x^*) = |x^*(x)|$ تعریف می‌شود. خانواده‌ی $T = \{p_x : x \in X\}$، زیرپایه‌ای برای توپولوژی روی X^* تولید می‌کند که X^* همراه با این

توپولوژی به فضای محدب موضعی تبدیل می‌شود و همچنین خانواده‌ی T نقاط X^* را جدا می‌کند. توپولوژی تولید شده توسط این زیرپایه توپولوژی ضعیف* روی X^* نامیده می‌شود. در حقیقت توپولوژی ضعیف* کوچک ترین توپولوژی روی X^* است که برای هر $x \in X$ نگاشت $\tau(x)$ نسبت به آن پیوسته است. در واقع توپولوژی ضعیف*، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* است و با نماد $\sigma(X^*, X)$ نشان داده می‌شود.

۱—۲۲ **قضیه.** فرض کنیم X^* فضای توپولوژیک، $x^* \in X^*$ و $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X^* باشد، آن‌گاه $x_n^* \overset{w^*}{\to} x^*$ در توپولوژی ضعیف* (x_n به طور ضعیف* به x همگراست) اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $x_n^*(x) \to x^*(x)$.

اثبات. [[۱]] ■

۱—۲۳ **نکته.** در فضاهای انعکاسی توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف* بر هم منطبق هستند.

۱—۲۴ **قضیه. باناخ — آلاغلو** [۶] : اگر $S^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ گوی واحد بسته باشد آن‌گاه، S^* در توپولوژی ضعیف* فشرده است.

اثبات. [[۲۶] قضیه‌ی ۳—۱۵]. ■

۱—۲۵ **قضیه. هان — باناخ** [۷] : فرض کنیم M زیرفضایی از فضای خطی X، p یک نیم‌نرم بر X و f تابعک خطی بر M باشد که به ازای هر $x \in M$، $|f(x)| \leq p(x)$. آن‌گاه، f قابل گسترش به یک تابعک خطی بر X مانند Λ است که برای هر $x \in X$ در شرط $|\Lambda x| \leq p(x)$ صدق می‌کند.

[۶] Banach-Alaoglu
[۷] Han-Banach

اثبات. [[۲۶] قضیه‌ی ۳—۳]. ■

۱—۲۶ نتیجه. فرض کنیم X فضای باناخ و $x_\circ \in X$، در این صورت $\Lambda \in X^*$ موجود است به‌طوری که $\Lambda x_\circ = ||x_\circ||$ و برای هر $x \in X$، $|\Lambda x| \leq \|x\|$.

اثبات. [[۲۶] نتیجه‌ی ۳—۳]. ■

۱—۲۷ قضیه. فرض کنیم A و B مجموعه‌هایی مجزا، ناتهی و محدب در فضای توپولوژیک خطی X باشند. اگر A فشرده، B بسته و X محدب موضعی باشد در این صورت $\Lambda \in X^*$ و $\gamma \in \mathbb{R}$ موجود است که برای هر $x \in A$ و هر $y \in B$، $Re\Lambda x < \gamma < Re\Lambda y$.

اثبات. [[۲۶] قضیه ۳—۴]. ■

۱—۲۸ تعریف. فرض کنیم X فضای باناخ و $x_n, y_n \in X$، X را فضای محدب یکنواخت می‌نامند اگر $\|x_n\| \leq ۱$, $\|y_n\| \leq ۱$ و $lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = ۲$، آن‌گاه $lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = ۰$.

مثال ۶. فضاهای هیلبرت و فضای l^p، $۱ < p < \infty$ محدب یکنواخت هستند.

۱—۲۹ تعریف. فرض کنیم X فضای توپولوژیک خطی محدب موضعی و d متری پایا روی آن باشد. اگر توپولوژی d با توپولوژی X برابر و (X, d) کامل باشد آن‌گاه فضای X را فرشه[۸] می‌نامند. برای مثال فضاهای باناخ، فرشه هستند.

۱—۳ نیم‌گروه‌ها

[۸] Frechet