بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

گروه های لی هموار روی میدان های موضعی با مشخصه مثبت

استاد راهنما

دکتر مهدی شریف زاده

پژوهشگر

سمیه برموده

شهریور ۱۳۹۲

حمایت از حقوق پدیدآورندگان

پایان نامهٔ حاضر، حاصل پژوهشهای نگارنده در دورهٔ **کارشناسی ارشد** رشتهٔ **ریاضی محض** گرایش **جبر** است که در شهریور ۱۳۹۲ در **دانشکده علوم** دانشگاه **یاسوج** به راهنمایی **دکتر مهدی شریف زاده** و مشاورهٔ **دکتر محمد بازیار** از آن دفاع شده است و کلیهٔ حقوق مادی و معنوی آن متعلق به دانشگاه یاسوج است.

دانشگاه یاسوج

گروه های لی هموار روی میدان های موضعی با مشخصه مثبت

به وسیلهٔ

سمیه برموده

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ:

ریاضی محض

در تاریخ .... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجهٔ .... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنما:	دکتر مهدی شریف زاده	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۲- استاد مشاور:	دکتر محمد بازیار	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور اول:	دکتر احسان ممتحن	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور دوم:	دکتر علی طاهری فر	با مرتبهٔ علمی استاد یار	امضاء
۵- نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر ابوالحسن مؤمن نژاد	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء

تقدیم به:

راهنمای دلسوز و فرزانه ام

استاد ارجمند

دکتر مهدی شریف‌زاده

خورشید تابان زندگیم

مادرم

مایه پرفروغ زندگیم

پدرم

قدردانی

ریاضی یعنی تدبیر در آفرینش و بنا نهادن آن به وسیله اعداد، و اعداد یعنی شمارش تعداد اجزای طبیعت تا بینهایت، و بینهایت یعنی از اول تا آخر، و از اول تا آخر یعنی رسیدن به خدا، و رسیدن به خدا یعنی عشق. و در مجموع، ریاضی مقدمه ای است برای رسیدن به خالق هستی. به نظر ما هم، خداوند یک ریاضی دان است، ریاضیدانی که برخلاف ما، هر مسئله ای را به آسانی می تواند حل کند و مانند ما انسانها نیاز ندارد از فرمولهای پیچیده استفاده کند، اصلا پایه گذار ریاضی، خدای خالق است و ریاضی واسطه ای است تا بتوانیم به قدرت خالق خود پی ببریم، و بدانیم این جهان بر پایه ارقام و اعداد ریاضی بنا شده است... .

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی شریف‌زاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمد بازیار که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را.

سمیه برموده

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

در این رساله، به بررسی گروه‌های لی هموار متناهی البعد، روی میدان‌های موضعی با مشخصه مثبت می‌پردازیم که گروه لی هموار، همراه با ساختار گروه توپولوژیکی داده شده روی آن، یک ساختار گروه لی تحلیلی نمی‌پذیرد و همچنین ساختار C^n -گروه لی (برای $n \geq ۱$) دارد اما دارای ساختار $C^{n+۱}$-گروه لی نمی‌باشد. همچنین مثال‌هایی از اتومورفیسم‌های هموار ناتحلیلی گروه‌های لی، روی چنین میدان‌هایی ارائه می‌دهیم. از جمله C^n-اتومورفیسم‌های که $C^{n+۱}$ نیستند.

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری

فصل ۱

نظریه گروه‌های لی

گروه‌های لی در حد فاصل بین دو شاخه بزرگ ریاضی، یعنی جبر و هندسه قرار دارند. ویژگی جبری آن‌ها از اصول موضوعه گروه گرفته می‌شود و خواص هندسی آن‌ها از پارامتریزه کردن عناصر این گروه‌ها به‌وسیله نقاطی از یک خمینه دیفرانسیل پذیر، حاصل می‌شود.
نظریه گروه لی و جبر لی تقریباً شامل مفاهیم بسیاری از شاخه‌های ریاضی از جمله جبر، آنالیز، هندسه دیفرانسیل، هندسه جبری و توپولوژی است و در بسیاری از مباحث ریاضی و فیزیک نقش اساسی دارد.
نظریه گروه‌های لی در اواخر قرن نوزده میلادی متولد شد. ریشه‌های آن، در مطالعه تقارن‌های برخی از دستگاه‌های معادلات دیفر انسیل و روش پیدا کردن جوابی برای آن‌ها است. سوفوس لی[1] در آن زمان، گروه‌های لی را گروه‌های پیوسته نامید و هدف اصلی وی توسعه نظریه گالوا در مورد معادلات دیفرانسیل بود.
در ابتدا نظریه گروهای لی مفهومی موضعی داشت و کارهای لی، کیلینگ [2] و کارتان [3] در این مورد تا اوایل قرن بیستم (۱۹۲۰) به همین شکل موضعی ادامه داشت. اصطلاح گروه‌لی از کارتان است.

---

[1] Marius Sophus Lie

[2] Wilhelm Killing

[3] Élie Joseph Cartan

۱-۱ تعاریف هندسی وتوپولوژیکی

تعریف ۱-۱-۱. (گروه لی)
یک گروه لی، عبارتست از یک منیفلد [۴] هموار G که یک ساختار گروهی نیز داشته باشد(یعنی با عمل $M : G \times G \longrightarrow G$ یک گروه باشد) و دو نگاشت $i : G \longrightarrow G$ که در آن $i(g) = g^{-1}$، ونگاشت $M : G \times G \longrightarrow G$ که در آن $M(g,h) = gh$، هر دو نگاشت هموار باشند.
هر گروه متناهی یا قابل شمارش را می‌توان با توپولوژی گسسته به یک گروه لی صفر بعدی تبدیل کرد.

مثال ۱-۱-۲. گروه جمعی $(\mathbb{R}, +)$ یک گروه لی است.(با عمل جمع معمولی)

مثال ۱-۱-۳. گروه $(\mathbb{R}^*, .)$ یک گروه لی است.[۵]

مثال ۱-۱-۴. $(S^{1}, .)$ یک گروه لی است.(با ضرب القا شده از $\mathbb{C}$)

مثال ۱-۱-۵. $GL(n, \mathbb{R})$ یک گروه ماتریسی‌های نامنفرد از اعداد حقیقی با ضرب ماتریسی یک گروه لی است.

تعریف ۱-۱-۶. (همانریختی یا همئومورفیسمی)
اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع یک به یک و پوشا باشد و f و f^{-1} توابعی پیوسته باشند، گوییم f همانریخت است.

تعریف ۱-۱-۷. (دیفئومورفیسم)
اگر $v, u \subseteq \mathbb{R}^n$ ، به نگاشت $f : u \longrightarrow v$ یک دیفئومورفیسم گوئیم هرگاه f یک همانریختی باشد و f و f^{-1} هر دو از رده‌ی C^{∞} باشند.

تعریف ۱-۱-۸. (تبدیل‌های خطی چپ و راست در گروه‌های لی)

---

[۴] به پیوست رجوع شود.

[۵] منظور از $\mathbb{R}^*$ ، همان $\mathbb{R} - \{0\}$ است.

اگر G یک گروه لی دلخواه باشد، برای هر $g \in G$ دو نگاشت $L_g : G \longrightarrow G$ و $R_g : G \longrightarrow G$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند به ترتیب تبدیل چپ و تبدیل راست متناظر با $g \in G$ می‌نامیم.

$$R_g(h) = hg \text{ و } L_g(h) = gh$$

نگاشت‌های L_g و R_g هموارند. زیرا L_g به‌عنوان ترکیبی از نگاشت‌های هموار

$$G \longrightarrow G \times G \longrightarrow G$$

نوشته می‌شود بطوریکه $L_g(h) = (g, h)$

بنابر این گروه‌های لی حالت خاصی از گروه‌های توپولوژیک هستند. در یک گروه لی، تابع وارون گیری $\varphi : G \longrightarrow G$ با ضابطه $g \longmapsto g^{-۱}$، یک دیفئومورفیسم است.

تعریف ۱-۱-۹. (همریختی گروه‌های لی)
هرگاه G و H دو گروه لی باشند، یک همریختی بین گروه‌های لی عبارت است از همریختی جبری به‌صورت $f : G \longrightarrow H$، که f به عنوان یک نگاشت بین دو منیفلد هموار نیز باشد.

تعریف ۱-۱-۱۰. (یکریختی گروه‌های لی)
همریختی $f : G \longrightarrow H$ بین گروه‌های لی را یکریختی گروه‌های لی گوئیم، هرگاه یک همریختی گروه‌های لی مانند $g : H \longrightarrow G$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$fog = ۱_H \qquad , \qquad gof = ۱_G$$

هم‌چنین اگر یکریختی گروه‌های لی را داشته باشیم، دیفئومورفیسم هم داریم زیرا از دیدگاه منیفلدها، یک نگاشت یک به یک و پوشا، هموار است و معکوس آن نیز هموار است.

تعریف ۱-۱-۱۱. (جبر لی)
یک جبر لی، یک فضای برداری حقیقی $\flat$، بر یک میدان است که مجهز به یک نگاشت دو خطی به‌صورت $[.,.] : \flat \times \flat \longrightarrow \flat$، که $(x, y) \longmapsto [x, y]$ می‌باشد و $[x, y]$ کروشه لی (براکت لی)نامیده می‌شود و دو خاصیت زیر صدق می‌کند
برای هر $x, y, z \in \flat$

(i) پادتقارنی: $[x,y]=-[y,x]$؛

(ii) **اتحاد ژاکوبی:** $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$.

مثال ۱-۱-۱۲. فضای برداری $M(n,\mathbb{R})$ از ماتریس‌های حقیقی $n\times n$، یک جبر لی n^2-بعدی روی میدان $\mathbb{R}$ با براکت لی $[A,B]=AB-BA$، است.
واضح است متقارن است زیرا

$$[A,B]=AB-BA$$

$$-[A,B]=-(AB)-(-BA)=-(AB)+BA=-(AB-BA).$$

پس

$$[A,B]=-[A,B].$$

برای محاسبه اتحاد ژاکوبی آن، داریم

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=[A,(AB-BA)]=$$

$$A(AB)-A(BA)-((AB)A-(BA)A) \quad (*)$$

و

$$[B,[C,A]]=(BCA-BAC)-(CAB-ACB)=$$
$$BCA-BAC-CAB+ACB \quad (**)$$

و

$$[C,[A,B]]=(CAB-CBA)-(ACB-BAC)=$$
$$CAB-CBA-ABC-BAC \quad (***)$$

با جمع $(*)$، $(**)$ و $(***)$، مقدار صفر می‌شود. پس $M(n,\mathbb{R})$ یک جبر لی است. این جبر لی را با $gl(n,r)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۱۳. هر فضای برداری V با براکت لی $[,]=0$ یک جبر لی است. این مدل از جبر لی را جبر لی آبلی می‌نامیم.

۱-۲ تعاریف آنالیزی

تعریف ۱-۲-۱. (فضای نرم‌دار)

فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد و $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، به‌طوری که برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم

- **(۱)** $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$؛
- **(۲)** $\|\alpha . x\| = |\alpha| \|x\|$؛
- **(۳)** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت $\|.\|$ را یک نرم بر Xنامیم و X را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۲. (فضای متریک)

یک فضای متریک، مجموعه‌ای است مانند X که در آن یک تابع فاصله(متر) مانند d که $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$، با خواص زیر تعریف شده است

- **(۱)** به ازای هر x و y در X، $0 \leq d(x, y) < \infty$؛
- **(۲)** $d(x, y) = 0$ اگر وتنها اگر $x = y$؛
- **(۳)** به ازای هر x و y در X، $d(x, y) = d(y, x)$؛
- **(۴)** به ازای هر x، y و z در X، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

مثال ۱-۲-۳. $\mathbb{R}$ با متر $d(x, y) = |x - y|$ یک فضای متریک است.

تعریف ۱-۲-۴. (فضای باناخ)[۶]

فضای باناخ یک فضای برداری نرم‌دار است که نسبت به متر تعریف شده روی آن، کامل باشد. کامل بودن، یعنی هر دنباله کشی در این فضا همگرا باشد .

مثال ۱-۲-۵. $\mathbb{R}^n$ها فضای باناخ می‌باشند.

---

[۶] Banach Space

تعریف ۱-۲-۶. (فضای ℓ^p)
اگر X یک فضای اندازه‌ی دلخواه با اندازه μ باشد، $0 < p < \infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد، تعریف میکنیم

$$\|f\|_p = \{\int_X |f|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}$$

و $\ell^p(\mu)$ از تمام fهایی تشکیل شده باشد که

$$\|f\|_p < \infty$$

در این صورت $\|f\|_p$ را نرم ℓ^pی f می نامیم.

مثال ۱-۲-۷. فضای ℓ^p برای هر $1 \leqslant p < \infty$ یک فضای باناخ است.

برهان. از آن‌جا که نرم‌دار بودن ℓ^p واضح است، ثابت خواهیم کرد که ℓ^p کامل است. یعنی هر دنباله کشی در ℓ^p همگرا می‌باشد. فرض می‌کنیم $\{x^n\}$ یک دنباله کشی در فضای ℓ^p باشد به طوری که $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ..)$ آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک N وجود دارد، به قسمی که برای هر $n, m > N$،

$$d(x,y) = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad (1)$$

برای هر $j = 1, 2, ...$ خواهیم داشت

$$|\xi_i^{(m)} - \xi_i^n| \leq \varepsilon \qquad (n, m > N) \qquad (2)$$

از (۲) می‌بینیم که $(\xi_i^{(m)}, \xi_i^{(m)}, ...)$ یک دنباله کشی است و نیز همگرا می‌باشد، چون $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ هر دو کامل [۷] هستند. خواهیم داشت

$$\xi_i^{(m)} \longrightarrow \xi_i \quad \text{وقتی‌که} \quad m \longrightarrow \infty$$

[۷] هر دنباله کشی در آن‌ها همگراست.

تعریف می‌کنیم $x = (\xi_1, \xi_1, ...)$ و نشان می‌دهیم که $x \in \ell^p$ است و $x_m \longrightarrow x$. از (۱) داریم

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p \qquad k = 1, 2, ...$$

فرض کنید $n \longrightarrow \infty$. برای $m > N$ داریم

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(m)} - \xi_i|^p \leq \varepsilon^p \qquad k = 1, 2, ...$$

فرض کنید $k \longrightarrow \infty$ آنگاه برای $m > n$ داریم

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i|^p \leq \varepsilon^p \qquad (3)$$

و این نشان می‌دهد که

$$x_m - x = (xi_i^{(m)}) \in \ell^p$$

چون $x_m \in \ell^p$ و این به این معنا است که با توجه به نامساوی مینکوفسکی [۸]

$$x = x_m + (x + x_m) \in \ell^p.$$

بنابراین سری (۳) نشان می‌دهد که $x_m \longrightarrow x$. چون $\{x_m\}$ یک دنباله کشی در ℓ^p می‌باشد. در نتیجه ℓ^p برای هر $1 \leq p < \infty$ می‌باشد و باناخ می‌باشد.

(قرارداد)

در اینجا وقتی صحبت از گروه فشرده می‌کنیم، منظور ما یک گروه توپولوژیکی است که با توپولوژی تعریف شده روی آن، فشرده است. گروه‌های فشرده یک تعمیم طبیعی از گروه‌های متناهی هستند، با توپولوژی گسسته.

تعریف ۱-۲-۸. (گروه موضعاًفشرده)

یک گروه توپولوژیکی است که به‌عنوان یک فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده است.

[۸] به کتاب آنالیز رودین مراجه شود.

فصل ۲

میدان موضعی

در این فصل به بررسی میدان موضعی می‌پردازیم که اساس کار این پایان‌نامه، بررسی گروه‌های لی هموار روی یک میدان موضعی می‌باشد. در ابتدا به معرفی برخی از مفاهیمی می‌پردازیم که در تبیین مفهوم میدان موضعی الزامی هستند.

۲-۱ میدان ارزیده

تعریف ۲-۱-۱. فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان باشد، ارزش مطلق روی یک میدان $\mathbb{K}$، یک تابع از $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ است که $x \longmapsto \mid x \mid$ (باخاصیت $x \in \mathbb{K}$)

- (۱) $x = \circ \Longleftrightarrow \mid x \mid = \circ$
- (۲) $\mid xy \mid = \mid x \mid \cdot \mid y \mid$
- (۳) $\mid ۱ \mid = ۱$
- (۴) $\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$

مثال ۲-۱-۲. به عنوان مثال می توان میدان $\mathbb{K}$ را، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ قرار داد.

ارزش مطلق افزوده معمولی را با $|.|_{\infty}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲-۱-۳. برای هر میدان $\mathbb{K}$ که

$$|x| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

باشد، $|x|$ ارزش مطلق بدیهی نامیده می‌شود، توپولوژی که روی میدان $\mathbb{K}$ به‌وسیله این ارزش مطلق تولید می‌شود، توپولوژی گسسته است. از این پس ارزش مطلق نابدیهی جایی است که، $x \in K$ وجود داشته باشد که $0 <| x |< 1$. از شرط ۱ و ۲ تعریف ارزش مطلق، نتیجه می‌گیریم که

$$| x |=| -x |= 1$$

در کل اگر $x \in \mathbb{K}$، چنان‌که $x^n = 1$ آنگاه $| x | = 1$ خواهد بود. هم‌چنین

$$| x/y |=| x | / | y |$$

برای $y \neq 0$ و $| x^n |=| x |^n$.

مثال ۲-۱-۴. (ارزش مطلق $p - adic$ روی $\mathbb{Q}$)

عدد اول p را فرض کرده و $0 < \alpha < 1$ را ثابت در نظر می‌گیریم و$x \in \mathbb{Q}^*$ را به‌صورت $x = p^n \dfrac{a}{b}$ که a وb نسبت به p اول‌اند و$n \in \mathbb{Z}$ فرض می‌کنیم. تعریف می‌کنیم

$$|x| = |p^n \frac{a}{b}| = \alpha^n$$

که این ارزش مطلق $p - adic$ روی $\mathbb{Q}$ نامیده می‌شود. که این در واقع یک ارزش مطلق است. زیرا اگر فرض کنیم $x = p^n \dfrac{a}{b}$ و $y = p^m \dfrac{c}{d}$ آنگاه

$$|xy| = |p^{n+m} \frac{ac}{bd}| = \alpha^{\overline{bd}}{}^{ac} = |x||y|$$

$$|x+y| = |p^{min\{n,m\}} \frac{*}{bd}| = |p^{min\{m,n\}}||\frac{*}{bd}| \leqslant \alpha^{min\{m,n\}}$$

$$= max\{|x|,|y|\} \leqslant |x| + |y|$$

بنابراین یک عدد گویا با توجه به $|.|$ کوچک است، اگر و تنها اگر بر توانی از p بخش‌پذیر باشد.

نکته ۲-۱-۵. مربع یک ارزش مطلق معمولی روی $\mathbb{R}$، لزوماً یک ارزش مطلق نیست.

تعریف ۲-۱-۶. دو ارزش $|.|$ و $\|.\|$روی میدان K هم ارز هستند، هرگاه وجود داشته باشد $c > ۰$ چنان‌که

$$.\forall x \in K \qquad |x| = \|x\|^c$$

ارزش مطلق $p - adic$ را نرمال گوئیم، وقتی‌که $\alpha = ۱/p$ باشد و آن‌را با نماد $|.|_p$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲-۱-۷. فرض کنید $P = ۵$ باشد. آن‌گاه:

$$|\frac{۱}{۱۰}|_۵ = ۵ \qquad |۵^n|_۵ = ۵^{-n}$$

$$|\frac{۲}{۳}|_۵ = ۱ \qquad |۱۰|_۵ = \frac{۱}{۵}$$

تعریف ۲-۱-۸. اگر ما شرط ۴(درتعریف ارزش مطلق) را با شرط زیر

$$|x - y| \leq sup\{|x|, |y|\}$$

جای‌گزین کنیم، ارزش مطلق فرامتریک یا نا‌ارشمیدسی نامیده می‌شود. این شرط معادل این است که برای هر $\varepsilon \geq ۰$ رابطه $|x - y| \leq \varepsilon$ یک رابطه هم‌ارزی است.

قضیه ۲-۱-۹. *اگر $|.|$ ارزش مطلق ارشمیدسی روی یک میدان $\mathbb{K}$ باشد، یک نگاشت یک به یک $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$، وجود دارد به‌طوری‌که $|.|$ روی $\mathbb{C}$ هم ارز $\|.\|_\infty$ است.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۲۱] مراجعه کنید.

قضیه ۲-۱-۱۰. *(استروسکی*[۱]*)*

هر ارزش مطلق نابدیهی $|.|$ روی $\mathbb{Q}$، هم‌ارز با $|.|\infty$ یا $|.|_p$ است (برای یک عدد اول p).

برهان. برای اثبات به [۲۱]مراجعه کنید. □

[۱] Ostrowski