بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

عنوان

نقش استنباط شواهدی در تشخیص توزیع‌های نرمال آمیخته

استاد راهنما

دکتر مهدی عمادی

استاد مشاور

دکتر ناصر رضا ارقامی

نگارش

مهدی ذوقدار مقدم

دی ۱۳۸۹

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته. آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر، توانشان رفت تا به توانایی برسم و رویشان سفید گشت تا رویم سپید بماند. آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانی زندگی من است. آنان که راستی قامتم در شکستی قامتشان تجلی یافت. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلیست بر بودنم. چرا که این دو وجود، پس از پروردگار مایه هستی‌ام بودند.

اینک در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می‌زنم و با دلی مملو از عشق، محبت و خضوع بر دستشان بوسه می‌زنم. حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان.

فهرست عناوین

پیش گفتار

نظریه نیمن-پیرسون با الگویی قدرتمند آمار معاصر را تحت تاثیر خود قرار داده است. این نظریه مبتنی بر استفاده از داده‌ها (مشاهده‌ها) به منظور انتخاب از بین تصمیم‌های جایگزین است، که زمینه‌های مختلف آماری را در بر می‌گیرد. در این دیدگاه روش‌های تصمیم مختلف بر اساس ویژگی‌های احتمالی‌شان با یکدیگر مقایسه می‌شوند. رویکرد دیگر در حل مسائل آماری استفاده از داده‌ها به عنوان شواهد و محاسبه قدرت شواهد است. در این رویکرد اعتقادات پیشین و زیان‌های ناشی از تصمیم‌گیری نقشی ندارند. متاسفانه فراوان از از نتایج روش‌های نیمن-پیرسونی تفسیر شواهدی صورت می‌گیرد.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول آن مبانی استنباط شواهدی و چگونگی شکل گیری آن و همچنین روش اجرای آزمون فرضیه‌ها به روش شواهدی شرح داده شده است. برای این منظور معیارهایی تعریف شده است که باید یک سری ویژگی‌هایی داشته باشند.

در فصل دوم استنباط شواهدی را در آمار بیز معرفی می‌کنیم و با در نظر گرفتن دو معیار برای تعیین حجم نمونه در آزمون فرضیه پارامتری، حجم نمونه را قبل از اجرای آزمایش تعیین می‌کنیم. اساس انجام آزمون فرضیه بیزی به روش شواهدی، فاکتور بیز است که در آزمون‌های مختلف باید محاسبه شود تا بتوانیم از طریق آن حجم نمونه مورد نظر را پیدا کنیم.

در فصل سوم وارد توزیع‌های آمیخته می‌شویم و روش‌های برآورد پارامتر را در توزیع‌های آمیخته شرح می‌دهیم. روش برآورد پارامتر در این گونه توزیع‌ها کمی با روش‌های معمول متفاوت است. از

بین چندین روش فقط به سه روش اشاره می‌کنیم و یک روش را به طور مفصل توضیح می‌دهیم و در انتها مقایسه‌ای بین روش‌ها انجام می‌شود.

در فصل چهارم آزمون فرضیه را برای توزیع‌های آمیخته بیان می‌کنیم. ابتدا برای پارامتر نسبت آزمون طرح می‌کنیم و با استفاده از نسبت درستنمایی حجم نمونه را برای این آزمون تعیین می-کنیم و در آخر هم روش اجرای آزمون همگنی جامعه را بیان می‌کنیم.

شبیه سازی‌هایی که برای تعیین حجم نمونه انجام داده شده و همچنین برای برآورد پارامترهای توزیع آمیخته استفاده شده با نرم‌افزار MAPLE نسخه ۱۴ انجام شده است. برای آشنایی بیشتر با نحوه دستورات نرم‌افزار، بعضی از آن‌ها را در پیوست قرار داده‌ایم.

در پایان برخود لازم می‌دانم از تمام کسانی که به نحوی همراه و همگام من بودند، از صمیم قلب تشکر و قدردانی کنم، به‌ویژه از آقای دکتر مهدی عمادی که راهنمایی‌های بسیار مفیدی داشتند و در کار شبیه‌سازی کمک شایانی کردند. همچنین از آقای دکتر ارقامی که استاد مشاور بودند قدردانی می‌کنم. از گروه آمار دانشگاه فردوسی و دانشجویان رشته آمار که همکاری لازم را داشتند نیز سپاس‌گزاری می‌کنم.

فصل اول

مبانی استنباط شواهدی

۱-۱ مقدمه

زبان آمار، وجه مسلم زبان علوم گردید و اکنون بدون آن حتی گامی کوچک در راه فیزیک نوین نمی‌توان برداشت. اما این زبان چه مشخصاتی باید داشته باشد؟ کامل باشد؟ قواعد آن حتی المقدور سهل و خطای آن کمترین! در همه جا قابل استناد و مخاطرهٔ آن معقول!. این زبان درحال تکامل بوده است و آنچه امروز در دست ماست، شکل متکامل شده مراحل طی شدهٔ یک قرن اخیر است. اما بالواقع ادعای تکامل این زبان کاملاً درست است؟

اگر آمار را همچون بقیه علوم مانند ریاضیات، فیزیک، زیست شناسی، جامعه شناسی و ... دارای گرایش‌های مختلف بدانیم (همیشه انسان حقیقت جو به دنبال یک دیدگاه بهینه است.) می‌توان آن‌را به دو دسته شناخته شده:

الف) آمار کلاسیک *ب) آمار بیز*

تقسیم کرد.

آن‌چه ادعای برخی آماردانان است این می‌باشد که هر دوی این نحله‌ها دارای اشکالات عمده است، که در جهت برون رفت از این اشکالات، رهیافت جدیدی از آمار طی سال‌های اخیر توسط برخی دانشمندان این علم معرفی شده که می‌تواند مرتفع کنندهٔ برخی از این اشکالات اساسی باشد، که به نگرش " آمار شواهدی" موسوم است، هر آنچه در پی خواهد آمد، استوار کردن این روش بر پایه های" روش شناسی" و" شناخت شناسی" علمی است، که گهگاه در پی این متدولوژی از قربانی کردن دو مکتب دیگر ابائی ندارد. و البته بعد از آن پرداختن به یک مسئله اساسی یا به زبان بهتر اولین و مهمترین بخش فرآیند علمی آمار، یعنی تعیین حجم نمونه از اهمیت بالایی برخوردار است.

۱-۱-۱ آمار شواهدی چه می‌گوید؟

در واقع ریچارد رویال[۱] (مبدع استنباط شواهدی[۲]) چنین پیشنهاد می‌کند که:

" از داده ها بپرسید "

این جمله ساده، شاید به نظر بدیهی می رسد اما غفلت بزرگ آماردانان دقیقاً در همین نقطه و دور شدن از فلسفه علمی نیز بدان جهت است .

اگر داده‌ها قرار است از یک فرضیه در مقابل فرضیه دیگر پشتیبانی کنند باید روش کار طوری باشد تا داده‌ها به‌دست نیامده‌اند، جواب سئوال مقدور نباشد، یعنی ابتدا داده را بگیریم بعد میزان پشتیبانی را تعیین کنیم و اگر قبل از آن اقدام به چنین امری کنیم، امکان ابطال را از فرضیات آماری سلب کرده ایم. این همان اشکال اساسی به روش‌های موجود است، بنابراین هیچ راه کاملاً قطعی جهت پشتیبانی موجود نیست، جز قانون درستنمایی که r_{ij} (نسبت درستنمایی)که در آن نقش داده‌ها کاملاً مشخص شده است (در همین فصل شرح آن خواهد آمد). در آزمون فرضیه‌ها به روش کلاسیک یکی از راه‌های تعیین استراتژی مشخص کردن احتمال خطای نوع اول است، و سعی بر این است که آزمونی ارائه شود که دارای کمترین احتمال خطای نوع دوم باشد.با مطالعه این فصل شاید سوالی که برای خواننده مطرح شود این باشد که احتمالات پشتیبانی قوی نادرست و پشتیبانی ضعیف هنوز همان نقش را برای ما بازی می‌کنند؟ ما اکنون به این سوال پاسخ می‌دهیم که جواب منفی است چرا که این احتمالات فقط در مرحله برنامه ریزی اهمیت دارد و پس از اخذ مشاهدات صرفاً تابع درستنمایی مطرح است و میزان نسبی فرضیه‌های مختلف بر اساس نسبت درستنمایی استوار می باشد.

[۱] Royall, Richard
[۲] Evidential Inference

در نتیجه قاعده توقف نمونه‌گیری و عدم رعایت آن بر استنباط نهایی (در محاسبه شواهد آماری) بی تاثیر است مثلاً اگر قرار بوده است با توجه به احتمالات $W_1, W_\circ, M_1, M_\circ$ (نماد گذاری کتاب رویال جهت احتمالات مذکور) نمونه ای به حجم n اخذ شود و در حین دریافت مشاهدات (به هر دلیل ممکن) قبل از n نمونه متوقف شود یا بعد از n نمونه‌گیری ادامه یابد، تاثیر در نحوه محاسبه شواهد آماری (پشتیبانی داده ها از یک فرضیه) نخواهد داشت .

از این جهت می‌توان مدعی شد نظریه استنباط شواهدی در قبال فرضیات آماری از روش‌های علمی پیروی می‌کند و راه را برای ابطال در آزمایش‌های بعدی نبسته است.

از این جهت استنباط شواهدی شاهکار علمی جدید است،که به موازات نگرش نوین فلسفه علمی رشد کرده است. البته این اتفاق چندان نادر نیست و حرکت موازی علوم مختلف یا کشفیات هم زمان (نیوتن و لایب نیتس در حساب دیفرانسیل یا روش‌های ریاضی و نسبیت اینشتین و صدها مثال دیگر) به کرات مبین حرکت علمی به سمت کامل شدن است.

در مجموع می‌توان چنین اظهار نظر کرد که استنباط شواهدی در عرصه تفاسیر منطقی از آمار کلاسیک بسیار پیش است ودر مقابل تفسیر با نظام استقرایی آمار کلاسیک ابزاری قوی در اختیار دارد که مشکل آن‌را حل می‌کند.

بعد از اینکه مشخص شد زبان آمار شواهدی قابلیت پرداخت مناسب سئوالات آماری را دارد، می‌توان جهت نیل به هدف، به معرفی اصول استنباط شواهدی پرداخت. که در فصول آتی، مورد استفاده قرار می گیرد. قابل ذکر است در این فصل جز تقریر دوباره و نگارش مجدد به زبان ساده تر و مجمل از مبانی استنباط شواهدی، فرایندی جدید انجام نشده است.

۲-۱ اصول اولیه، اصل پشتیبانی

این بخش را با معرفی قانون درستنمایی آغاز می‌کنیم. قانون درستنمایی با این که برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط هکینگ[۱] معرفی شد ولی در سال ۱۹۹۷ رویال برای اولین بار آن‌را به طور جدی مطرح نمود و بسیاری از ویژگی‌ها و همچنین نحوۀ استفاده از آن را در منبع ذکر شده متذکر شده است.

اصل درستنمایی[۲]:

فرض کنید که $L_{۱}(\theta)$ تابع درستنمایی حاصل از مشاهده x از آزمایش اول و $L_{۲}(\theta)$ تابع درستنمایی حاصل از مشاهده y از آزمایش دوم باشد که θ پارامتر مشترک در هر دو آزمایش است. اگر $\frac{L_{۱}(\theta)}{L_{۲}(\theta)}$ به θ بستگی نداشته باشد آن‌گاه هر گونه استنباط در مورد θ از x و y باید یکسان باشد.

قانون درستنمایی[۳]:

فرض کنید بردار تصادفی $\mathbf{X}$ تحت فرضیۀ H_i دارای توزیعی با تابع (چگالی) احتمال f_i ، $(i=0,1)$ باشد. در اینصورت نسبت درستنمائی H_0 به H_1 عبارتست از:

$$\mathrm{r} = \frac{f_0(\boldsymbol{x})}{f_{۱}(\boldsymbol{x})}$$

۱) Hacking
۲) Likelihood Principle
۳) Law of Likelihood

که $\mathbf{x}$ مقدار مشاهده شده $\mathbf{X}$ است. در این‌صورت پشتیبانی داده‌ها (مشاهدۀ $\mathbf{X=x}$) از H_0 بـیش از (کمتر از، برابر با) پشتیبانی داده‌ها از H_1 است اگر $r>1$ $(r<1, r=1)$ باشد و مقدار r میزان ایـن پشتیبانی را نشان می‌دهد.

معنی قانون درستنمایی این است کـه: « میـزان پشـتیبانی داده‌هـا از H_0 در مقابـل H_1 را نسـبت درستنمایی بیان می‌کند».

اگر $r=0$ ، یعنی پشتیبانی داده‌ها از H_0 (در مقابل H_1) صفر است. یا داده ها از H_0 (در مقابل H_1) اصلا پشتیبانی نمی‌کنند.

اگر $r=\infty$ باشد، یعنی مشاهدات کاملاَ (۱۰۰٪) از H_0 در مقابلH_1 پشتیبانی می‌کننـد. دو حالـت خاص فوق کاملاَ معقول به نظر می‌رسد.

نسبت درستنمایی چه کمکی به ما می کند؟ چون هدف ما انجام آزمون آماری است، پس بهتر است در ابتدا سئوال کنیم چرا آزمون انجام می دهیم؟

سه سوال پایه که منجر به انجام آزمون می شود در زیر آمده است :

۱) آیا عمل A را انجام دهیم یا عمل B؟ (تحت H_0 عمل A و تحت H_1 عمل B مناسب است)

۲) میزان اعتقاد ما به درستی H_0 (یا H_1) چقدر است؟

۳) داده های مشاهده شده به چه میزان از H_0 (در مقابل H_1) پشتیبانی می‌کنند؟

برای جواب سوال ۱ آزمون‌های نیمن – پیرسونی مناسب هستند. در واقع وقتی می‌گوییم H_0 رد شد؛به این معنی است که اطمینان ۱۰۰٪ به نادرستی H_0 نداریم، و به این علت می‌گوییم H_0 نادرست است که عمل B را (از مجموعه دو عمل A و B) انجام دهیم. در غیر این صورت دلیلی

ندارد که حکم H_0 نادرست باشد. در واقع گفتن جمله: H_0 نادرست است، بر اساس یک آزمون نیمن- پیرسونی نادرست است.

سوال ۲ در واقع می پرسد $p(X=x|H_0)$ چقدر است؟

جواب این سوال به احتمالات پیشین یعنی $P(H_0)$ و $P(H_1)$ بستگی دارد و در نتیجه (علیرغم اینکه سوال ۲ سوال خوب و با ارزشی است) جواب به شخص وابسته است چون احتمالات پیشین ذهنی است.

اما پاسخ سوال سوم شبیه پاسخ های اول ودوم نیست و با ابزار بالا امکان پاسخگویی به آن نیست. در اینجا باید جواب را از استنباط شواهدی درخواست کرد.

قبل از اینکه وارد میدان هماوردی با دستاوردهای گذشته آماری (کلاسیک و بیز) شویم لازم است، ابزار جدید مکتب آمار شواهدی را بهتر بشناسیم، بدین منظور از نقاط قوت ابزار مذکور آغاز می-کنیم، آنگاه امکانات و وسایل در اختیار را معرفی خواهیم نمود و سپس بی غرض و منصف ابزار گرایش‌های دیگر آماری را نیز مورد سنجش قرار خواهیم داد.

پس از رسیدن به این باور که ابزار جدید، کارآمد است گریزی به تعیین حجم نمونه به عنوان اساسی ترین مسئله آمار خواهیم زد.

اکنون مختصری در مورد تاریخچه استنباط شواهدی و کارهایی که در این زمینه انجام شده صحبت می‌کنیم.

۳-۱ تاریخچه استنباط شواهدی

استنباط آماری به روش شواهدی که به تازگی در برخی متون روان‌شناسی آمار مطرح گردیده است اشاره به رویکردی نوین در بحث استنباط آماری داردکه صرفا مبتنی بر داده‌ها و الگوی احتمالی بوده و از مولفه‌های ذهنی، شخصی و مواردی نظیر باورهای پیشین، و توابع زیان تاثیر نمی‌پذیرد.

محور اصلی این روش استنباط، تابع درستنمایی است، اما علاوه بر اتکا به اصل درستنمایی، این شیوه استنباط به شدت بر اصل مشابه دیگری به‌نام قانون درستنمایی متکی است.

از جمله کارهای انجام شده در زمینه استنباط شواهدی عبارتند از:

- **رویال:** (۱۹۹۷) معرفی روش استنباط شواهدی؛ (۲۰۰۰) پاسخ‌گویی به اشکالات منطقی و آماری، استنباط شواهدی؛ (۲۰۰۳) تفسیر شواهد آماری با استفاده از مدل‌های ناقص.

- **بلوم**[۱]: (۱۹۹۹) بررسی آزمون‌های دنباله‌ای بر اساس استنباط شواهدی؛ (۲۰۰۲) بررسی مفهوم استنباط شواهدی با ذکر چند مثال؛ (۲۰۰۵) بررسی دو الگوی رگرسیونی بر اساس استنباط شواهدی؛ (۲۰۰۷) شواهد آماری برای رگرسیون خطی کلی[۲]؛ (۲۰۰۸) اندازه گیری شواهد آماری در ثمربخشی هزینه.

- **جورنستاد**[۳]: (۲۰۰۳) کاربرد استنباط شواهدی در بررسی نظریه نمونه‌گیری.

---

[۱])Blume(
[۲])General Linear Model
[۳]) Bjornstad (

- **گودمن**[1]: (۲۰۰۵) معرفی روش‌های بیزی سنجش قدرت شواهد.

- **فاستر و سوبر**[2]: (۲۰۰۱) تصحیح نسبت درستنمایی در مورد فرضیه‌های مرکب بر اساس نظریه آکائیک.

- **هابرد و لینزی**[3]: (۲۰۰۸) علت مفید نبودن مقدار احتمال به عنوان معیار پشتیبانی.

- **کتری و بالاکریشنان**[4]: (۲۰۰۸) شواهد آماری در تحلیل جدول توافقی.

- **بیکل**[5]: (۲۰۰۸) شواهد آماری برای فرضیه‌های مرکب.

کارهای انجام شده در ایران

- **عمادی و ارقامی:** (۲۰۰۳) بعضی از معیارهای پشتیبانی برای فرضیه‌های آماری.

- **حبیبی و ارقامی:** (۱۳۸۲) مقایسه بعضی از روش‌های استنباط شواهدی برای ضریب رگرسیون.

- **عمادی و ارقامی و احمدی:** (۲۰۰۵) مقایسه داده‌های رکوردی با مشاهدات مستقل و هم‌توزیع بر اساس استنباط شواهدی.

- **دوست‌پرست و عمادی:** (۲۰۰۶) پذیرش مدل بر اساس روش استنباط شواهدی برای مقادیر رکوردی.

- **حبیبی و همکاران:** (۲۰۰۷) شواهد آماری بالقوه در آزمایش‌ها و رکوردها.

---

[1]) Goodman
[2]) Farster and Sober
[3]) Hubbard and Lindsay
[4]) Kateri and Blakrishnan
[5]) Bickel

- **آرشی و عمادی:** (۲۰۰۸) استنباط شواهدی شواهدی رکوردها و زمان بین رکوردها.

اما یگانه ابزار ما یعنی r که مختصر معرفی شد چه ویژگیهایی دارد؟

۱-۴ ویژگی‌های نسبت درستنمایی

– ارتباط r (نسبت درستنمایی) با احتمالات پیشین و پسین در استنباط بیزی، در حقیقت نسبت درستنمایی در آمار بیزی همان بخت پسین است به بخت پیشین.

– r **نسبی است:** یعنی مهم است که فرضیه جانشین چه باشد، به عبارت دیگر نسبت درستنمایی نه تنها به H_0 بلکه به H_1 نیز بستگی دارد.

- **درجه بندی بودن** r : آیا r=۱۰ شواهد قوی بر له H_0 و بر علیه H_1 است. یا باید ۱۰۰ باشد؟ تا بتوان چنین ادعایی کرد

فقط می دانیم که $r>1$ ⇐ پشتیبانی بیشتر از H_0

$r<1$ ⇐ پشتیبانی بیشتر از H_1

۸ را می توان به عنوان مرز بین پشتیبانی ضعیف و پشتیبانی قوی در نظر گرفت ضمناً ۳۲ را مرز بین پشتیبانی بسیار قوی و پشتیبانی قوی در نظر می گیرند. (رویال ۱۹۹۷). از این پس مرز پشتیبانی قوی را با k نشان می‌دهیم.

– **تقارن :** ویژگی مطلوب بعدی برای یک معیار پشتیبانی این است که نسبت به H_i و H_j متقارن باشد. یعنی اگر داده‌ها از H_i نسبت به H_j به یک میزان مشخص پشتیبانی کنند با تعویض

نقش H_i و H_j باز هم داده‌ها به همان میزان و از همان فرضیه پشتیبانی کنند. مسلماً r دارای این ویژگی است.

- **همگرایی :** وقتی H_i به H_j میل کند (یعنی تفاوت H_i و H_j کم می‌شود) باید معیار پشتیبانی به سمت عددی میل کند که نشان دهنده پشتیبانی یکسان و برابر از هر دو فرضیه باشد، r دارای این ویژگی است.

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases} \qquad \theta_0 \to \theta_1 \Rightarrow r \to 1$$

- **عدم بستگی به فضای نمونه:** معیار پشتیبانی باید به داده‌های مشاهده شده بستگی داشته باشد نه به داده هایی که می توانسته اند مشاهده شوند و مشاهده نشده اند، یعنی معیار پشتیبانی نباید به فضای نمونه بستگی داشته باشد، به زبان دیگر معیار پشتیبانی با اصل درستنمایی سازگار باشد. بدیهی است که r دارای این ویژگی است.

- سازگار بودن نسبی:

وقتی حجم نمونه به سمت بی‌نهایت میل کند، تحت فرضیه صفر، احتمال این‌که r بزرگتر از k باشد به سمت یک میل کند. و وقتی فرضیه مقابل درست باشد، احتمال این‌که r کوچکتر از 1/k باشد به سمت صفر میل کند.

- **برقراری در اصل درستنمایی :**

نسبت درستنمایی مسلماً در اصل درستنمایی صدق می کند چون r در واقع نسبت دو درستنمایی است و در نتیجه مستقیماً به تابع درستنمایی بستگی دارد.

بیربام[1] سال ۱۹۶۲ نشان داد که اصل درستنمایی از دو اصل دیگر که همگان آن‌را قبول دارند نتیجه می شود. این دو اصل عبارتند از:

۱- اصل بسندگی[2]

۲- اصل مشروطی[3]

این خود امتیازی بزرگ برای نسبت درستنمایی است. چرا که اصل درستنمایی، اصلی مورد وثوق برای غالب آماردانان است. پس خود ترازی جهت سنجش محسوب می شود، یعنی هر ابزاری که با اصل درستنمایی مقایسه شود قاعدتاً مقبولیت بالایی خواهد داشت و نسبت درستنمایی دارای چنین خاصیتی است.

- ویژگی مطلوب دیگر r این است که احتمال شواهد قوی گمراه‌کننده توسط داده‌ها (بر مبنای r) کم است و هر چه k را بزرگتر اختیار کنیم این احتمال کمتر می‌باشد. این ویژگی در قضیه ۱-۱ (رویال ,۱۹۹۷) بیان شده است.

قضیه ۱-۱: فرض کنید متغیر تصادفی X تحت فرضیهٔ H_i دارای توزیعی با تابع (چگالی) احتمال f_i، $(i=0,1)$ باشد. در اینصورت داریم:

الف) $$P_{H_1}\left(\frac{f_0(X)}{f_1(X)}>k\right)\le\frac{1}{k}.$$

ب) $$P_{H_0}\left(\frac{f_0(X)}{f_1(X)}<\frac{1}{k}\right)\le\frac{1}{k}.$$

[1]) Birnbaun
[2]) Sufficiency Principle
[3]) Conditionaly Principle

اثبات الف): بنا به نامسوی مارکف داریم

$$\mathrm{P}_{H_1}\left(\frac{f_0(X)}{f_1(X)} > k\right) \le \frac{\mathrm{E}_{H1}\left(\frac{f_0(X)}{f_1(X)}\right)}{k},$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{H_1}\left(\frac{f_0(X)}{f_1(X)}\right) &= \int_{x\in S_X} \frac{f_0(x)}{f_1(x)}\cdot f_1(x)dx \\ &= \int_{x\in S_X} f_0(x)dx \\ &= 1.\end{aligned}$$

پس داریم

$$\mathrm{P}_{H_1}\left(\frac{f_0(X)}{f_1(X)} > k\right) \le \frac{1}{k}.$$

اثبات ب): می‌توان نوشت

$$\mathrm{P}_{H_0}\left(\frac{f_0(X)}{f_1(X)} < \frac{1}{k}\right) = \mathrm{P}_{H_1}\left(\frac{f_1(X)}{f_0(X)} > k\right),$$

با استدلالی مشابه استدلال قسمت الف، قسمت ب نیز ثابت می‌شود. □