دورهای همیلتنی در گراف دوری متروید

رقیه علیزاده

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

۱۳۸۹

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

چکیده

در این تحقیق گراف دوری متروید را این چنین به دست می آوریم: در گراف دوری متروید، رأس ها، دورها می باشند و یال ها زوج های cc' هستند که c و c' با هم اشتراک دارند. و همچنین طی قضیه ای ثابت می شود که گراف دوری از متروید همبند با حداقل ۴ دور، به طور یکنواخت همیلتنی است.

پیشگفتار

در فصل دوم متروید بحرانی و متروید بحرانی اکسترمال را تعریف می کنیم و طی قضیه ای ثابت می کنیم که یک متروید بحرانی از رتبه ی حداقل دو، شامل یک هم دور از کاردینال دو می باشد.

عبارت گراف پایه که بارها در این تحقیق مورد استفاده قرار می گیرد، تعریفی بدین شرح دارد: فرض کنید M یک متروید و$\mathcal{B}$ مجموعه ی پایه های آن باشد، منظور از گراف پایه ی این متروید، گرافی است که مجموعه ی رئوس آن اعضای $\mathcal{B}$ است و دو رأس در این گراف مجاورند اگر وتنها اگر اندازه ی تفاضل متقارن پایه های متناظر با آن ها دو باشد.

در فصل سوم مفهوم گراف همبند همیلتنی را بیان می کنیم و نشان می دهیم کهاگر G گراف پایه ی یک متروید ساده M باشد، آن گاه G همبند همیلتنی است. همچنین در این فصل یک کران پایین همبندی های گراف های پایه ی متروید را ارائه می دهیم.

ما در این پایان نامه به معرفی گراف دوری متروید می پردازیم. در گراف دوری متروید دورهای متروید، رأس های گراف می باشد و یال ها، زوج های cc' می باشند که c و c' با هم اشتراک دارند.

در فصل آخر به بیان گراف همیلتنی مثبت و همیلتنی منفی می پردازیم و ثابت می کنیم که اگر $M=(E,I)$ یک متروید همبند با حداقل چهار دور باشد، آن گاه $G(M)$ همیلتنی یکنواخت می باشد.

این تحقیق بر اساس مقاله ی زیر تنظیم شده است:

$Ping\ Li,\ Guizhen\ Liu,\ Hamilton\ cycles\ in\ circuit\ graphs\ of\ matroid,$
$Computers\ and\ Mathematics\ With\ Applications$ 55(2008)654-659 ،

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و متروید

۱.۱ مباحثی از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف[۱] G سه تایی متشکل از یک مجموعهٔ متناهی و غیر خالی $V(G)$ که اعضای آن رأس[۲]های گراف و یک مجموعهٔ متناهی $E(G)$ ، که اعضای آن یال[۳]های گراف نامیده می‌شوند به‌همراه رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو (نه لزوما متمایز) از اعضای $V(G)$ را وابسته می کند.

تعریف ۲.۱.۱ دو عضو u و v از مجموعه $V(G)$ را مجاور[۴] هم گوییم هرگاه $uv \in E(G)$ باشد، در غیر این صورت این دوعضو را نامجاور گوییم. اگر $e = uv$ یک یال از گراف G باشد، u و v را نقاط انتهایی[۵] آن یال گوییم.

---

[۱] $Graph$
[۲] $Vertex$
[۳] $Edge$
[۴] $Adjecent$
[۵] $Endpoint$

تعریف ۳.۱.۱ اگر نقاط انتهایی یک یال بر هم منطبق باشند آن را یک طوقه[۶] می گوییم و اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آنها را یال‌های موازی یا چندگانه[۷] گوییم و گراف G را که فاقد طوقه و یال موازی باشد، گراف ساده [۸] گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ درجه [۹] راس v_i که با نماد $d(v_i)$ نمایش داده می شود، تعداد یال هایی می باشد که از آن راس می گذرد.

تعریف ۵.۱.۱ گراف H زیر گراف[۱۰] G است هر گاه:

(۱) $V(H) \subseteq V(G)$

(۲) $E(H) \subseteq E(G)$

در این صورت آن را به صورت $H \subseteq G$ نشان داده و گوییم G شامل H است.

اگر $V(H) = V(G)$، آن گاه H را زیرگراف فراگیر[۱۱] G گویند.

تعریف ۶.۱.۱ گراف G را دوبخشی[۱۲] گوییم اگر بتوان مجموعه رأس های آن را به صورت اجتماع دو مجموعه مستقل جدا از هم مثل v_1 و v_2 نوشت به طوری که هر یال G یک رأس از v_1 را به یک رأس از v_2 وصل کند، این گراف را به صورت $G(v_1,v_2)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید G یک گراف دو بخشی با افراز دو بخشی $V(G) = V_1 \cup V_2$ باشد، اگر هر رأس از V_1 با هر رأس V_2 مجاور باشند، گوییم G یک گراف کامل دوبخشی[۱۳] است.

اگر $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ در این صورت گراف کامل دو بخشی را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم.

[۶] *Loop*
[۷] *Multiple*
[۸] *Simplegraph*
[۹] *Degree*
[۱۰] *Subgraph*
[۱۱] Spanning subgraph
[۱۲] *Bipartite*
[۱۳] Complete partition graph

تعریف ۸.۱.۱ گراف G را k-بخشی گوییم اگر بتوان V(G) را به صورت اجتماع k مجموعه مستقل دو به دو جدا از هم نوشت.

لم ۹.۱.۱ گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر هیچ دور فردی نداشته باشد .

برهان : رجوع شود به مرجع

تعریف ۱۰.۱.۱ گراف ساده‌ای که در آن هر دو رأس متمایز با یک یال به یکدیگر متصل شوند را گراف کامل[۱۴] می نامیم. هر گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید G یک گراف و E مجموعه یال های آن و$E_1 \subseteq E$ باشد . زیرگراف تولید شده توسط E_1 ، گرافی است که E_1 مجموعه یال های آن و نقاط انتهایی یال های E_1 ، مجموعه رئوس آن می باشد. این زیرگراف را با نماد $G[E_1]$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ هرگاه G_1 و G_2 دو گراف باشند، اجتماع [۱۵] آن ها که با نماد $G_1 \cup G_2$ نمایش داده می شود، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال های $E(G_1) \cup E(G_2)$.

تعریف ۱۳.۱.۱ دو گراف G و H را یکریخت [۱۶] گوییم هرگاه نگاشت های دوسویی $\psi : V(G) \longrightarrow V(H)$ و $\theta : E(G) \longrightarrow E(H)$ چنان موجود باشند که رأس v از گراف G روی یال e ازگراف G باشد اگر و تنها اگر $\psi(v)$ روی یال $\theta(e)$ باشد. یکریختی دو گراف G و H را با نماد $G \cong H$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ مکمل [۱۷] گراف G که آن را با نماد $\bar{G}$ نمایش می دهیم، گراف ساده ای با مجموعه رئوس $V(G)$ است که در آن $uv \in E(\bar{G})$، اگر و تنها اگر $uv \notin E(G)$.

[۱۴] Complete graph
[۱۵] *Union*
[۱۶] *Isomorphic*
[۱۷] *Complement*

تعریف ۱۵.۱.۱ یک تجزیه [۱۸] از گراف G فهرستی از زیرگراف های G است به طوریکه هر یال از G، فقط به یک زیرگراف تعلق داشته باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ گرافی را که هر یال آن جهت دار باشد، گراف جهت دار [۱۹] گوییم.

تعریف ۱۷.۱.۱ گراف زمینه‌ی [۲۰] گراف جهت دار G گرافی است که درآن به جای هر یال جهت دار، یک یال ساده با همان نقاط انتهایی قرار می گیرد.
گراف ساده ی زمینه، گراف زمینه ای است که در آن ، علاوه بر شرط فوق، یال های موازی به غیر از یکی از آن ها و طوقه ها نیز حذف می شود.

تعریف ۱۸.۱.۱ بزرگترین مجموعه رئوس مجاور در G را خوشه [۲۱] می نامیم .

تعریف ۱۹.۱.۱ تفاضل متقارن [۲۲] دو گراف G و H را که مجموعه رئوس آن ها V می باشد را با نماد $G\Delta H$ نمایش می دهیم و در واقع گرافی است با مجموعه رئوس V و مجموعه یال هایی که دقیقاً در یکی از $E(G)$ یا $E(H)$ قرار دارند.

تعریف ۲۰.۱.۱ گراف G را مسطح[۲۳] گوییم هرگاه بتوان آن را طوری در صفحه نمایش داد که هیچ برخورد یالی وجود نداشته باشد.

قضیه ۲۱.۱.۱ گراف G مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیر تقسیمی از K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

برهان : رجوع شود به مرجع

[۱۸] $Decomposition$
[۱۹] $Digraph$
[۲۰] $UnderlyingGraph$
[۲۱] $cliqe$
[۲۲] $SymetricDeffrence$
[۲۳] $PlanerGraph$

تعریف ۲۲.۱.۱ یک گشت[۲۴] در گراف G دنباله‌ای متناوب از رأس‌ها و یال‌های G به صورت $v_0e_1v_1...e_kv_{k+1}$ می باشد به طوریکه که در آن v_{i-1} و v_i برای هر $0 \leq i \leq k+1$ نقاط انتهایی یال e_i هستند.

برای راحتی، یک گشت را به صورت $v_0v_1...v_{k+1}$ نمایش می دهیم.

اگر $P = v_0v_1...v$ و $Q = v_kv_{k+1}...v_n$ دو گشت باشند آن گاه‌خواهیم داشت:

$$P + Q = v_0v_1...v_kv_{k+1}v_{k+2} \ ... \ v_n$$

تعریف ۲۳.۱.۱ اگرهیچ یالی در گشت تکرار نشود آن را یک گذر[۲۵] گوییم.

یک گشت یا گذر بسته است هرگاه نقاط انتهایی آن ها یکی باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱ اگر هیچ رأسی در گذر تکرار نشود آن را یک مسیر [۲۶] می نامیم.

تعریف ۲۵.۱.۱ مسیر $v_0e_1v_1 \ ... \ e_nv_n$ که در آن رابطه $v_0{=}v_n$ برقرار باشد را دور[۲۷] گوییم.

تعریف ۲۶.۱.۱ گرافی که هیچ دوری نداشته باشد را یک گراف بی دور[۲۸] گویند . گراف بی دور را جنگل[۲۹] نیز می گویند.

تعریف ۲۷.۱.۱ گراف بی دور همبند را درخت [۳۰] می نامند.

هر زیرگراف فراگیر از گراف G که یک درخت باشد را درخت فراگیر [۳۱] گراف G گویند.

گراف ناهمبند درخت فراگیر ندارد.

[۲۴] Walk
[۲۵] *Trail*
[۲۶] Path
[۲۷] Circuit
[۲۸] *acyclic*
[۲۹] *Forest*
[۳۰] *Tree*
[۳۱] *Spanningtree*

تعریف ۲۸.۱.۱ مسیر و دوری با n ـرأس ، به ترتیب با نماد P_n و C_n نمایش داده می شود.
یک n ـدور[۳۲]، دوری با n رأس می باشد.

تعریف ۲۹.۱.۱ طول [۳۳] یک گشت، گذر، مسیر یا دور تعداد یال های موجود در آن ها می باشد.

تعریف ۳۰.۱.۱ اگر رئوس u و v در گراف G به هم متصل باشند فاصله بین رئوس u و v در G را با نماد $d(u,v)$ نمایش می دهیم.

$d(u,v)$، طول کوتاهترین (u,v)—مسیر در G است.

تعریف ۳۱.۱.۱ قطر[۳۴] گراف G، با نماد $d(G)$ نمایش داده می شود و عبارت است از ماکسیمم فاصله بین دو رأس گراف G.

تعریف ۳۲.۱.۱ گراف G را همبند[۳۵] گوییم هر گاه برای هر دو رأس $u,v \in V(G)$، یک (u,v) — مسیر بین آن رأس ها وجود داشته باشد. در غیر این صورت گراف G ناهمبند [۳۶] است .

تعریف ۳۳.۱.۱ گراف G اویلری[۳۷] است هرگاه دارای گذری بسته باشد که شامل همه یال های G می باشد.

مدار اویلری [۳۸] یا گذر اویلری [۳۹] در یک گراف، دور یا مداری شامل همه یال ها می باشد.

لم ۳۴.۱.۱ اگر G گرافی باشد که درجه تمام رئوس آن حداقل دو است، آن گاه G یک مدار دارد.

---

[۳۲] c_cycle
[۳۳] $Length$
[۳۴] $Diameter$
[۳۵] Connected
[۳۶] $Disconnected$
[۳۷] $Eulerian$
[۳۸] $Euleriancircuit$
[۳۹] $Euleriantrail$

تعریف ۳۵.۱.۱ گراف G همیلتونی [۴۰] است هرگاه دارای گذری بسته باشد که شامل همه رئوس G می باشد.

بدیهی است که چنین گذری باید یک مدار باشد، (به استثنای حالتی که G گراف تهی است).

اگر چنین مداری وجود داشته باشد، آن را یک مدار همیلتونی [۴۱] می نامیم.

تعریف ۳۶.۱.۱ دو مسیر از v به u را دو مسیر مجزای داخلی [۴۲]گویند اگر در هیچ رأس میانی مشترک نباشند.

تعریف ۳۷.۱.۱ همبندی گراف G که آن را با $K(G)$ نشان می دهیم عبارت است از کمترین تعداد رأس هایی که با حذف آن ها یک گراف ناهمبند یا یک رأس تنها حاصل می شود.

در گراف های کامل داریم: $K(K_n) = n - ۱$ و در گراف های دوبخشی $K_{m,n}$ داریم $K(K_{m,n}) = min m, n$.

گراف G را $k-$همبند گوییم اگر $K(G) \geq k$. یک گراف حداقل با دو رأس است اگر و تنها همبند باشد. همچنین اگر G یک گراف بی طوقه و فاقد رأس تنها و حداقل سه رأس داشته باشد، آن‌گاه G ۲$-$همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو یال متمایز G دوری از G شامل این دو یال وجود داشته باشد.

تعریف ۳۸.۱.۱ اگر v راسی از گراف H باشد و حذف v و تمام یالهای متقاطعبا آن تعداد مولفه‌های همبند H را افزایش دهد آن گاه V یک راس برشی H[۴۳] نامیده میشود.

[۴۰] $Hamiltoniangraph$
[۴۱] $Hamiltoniancircuit$
[۴۲] $Internallydisjointpath$
[۴۳] Cut-vertex

تعریف ۳۹.۱.۱ اگر حذف یالی از گراف، تعداد مؤلفه های همبند را یک واحد افزایش دهد آن یال را یک پل [۴۴] یا یال برشی [۴۵] نامند.

قضیه ۴۰.۱.۱ یک یال، یال برشی است اگر و تنها اگر قسمتی از یک دور نباشد.

تعریف ۴۱.۱.۱ یک بلوک [۴۶] از یک گراف زیر گراف همبند ماکسیمالی است که راس برشی ندارد. اگر G همبند بوده و دارای رأس برشی نباشد، آنگاه G خود یک بلوک است.

تذکر ۴۲.۱.۱ یک یال از یک دور نمی تواند یک بلوک باشد، زیرا دور زیرگرافی فاقد رأس برشی است که شامل این یال است پس یک یال یک بلوک است اگر قسمتی از یک دور نباشد یا به عبارتی یال برشی یا یک پل باشد. بلوک های یک گراف بی طوقه عبارتند از

۱) رئوس تنها ۲) پل ها ۳) زیر گراف های ۲−همبند ماکسیمال آن.

تعریف ۴۳.۱.۱ برای هر راس x و مجموعه U از راسها یک $xU-$ فن [۴۷] مجموعه مسیرهایی از x به U است که هر دو مسیر این مجموعه تنها در راس x مشترک هستند.

تعریف ۴۴.۱.۱ یک گراف را مسطح شده [۴۸] گویند هر گاه رسم بدون تقاطع در صفحه داشته باشد.

تعریف ۴۵.۱.۱ یک ناحیه [۴۹] یعنی مجموعه باز U که‌برای هر $u, v \in U$ مسیر چند ضلعی از u به v در U وجود داشته باشد.

---

[۴۴] Bridge
[۴۵] Cut-edge
[۴۶] Block
[۴۷] Fan
[۴۸] Planar
[۴۹] Region

تعریف ۴۶.۱.۱ وجه های [۵۰] یک گراف مسطح عبارتند از ناحیه های ماکسیمال از صفحه که شامل هیچ راسی از گراف نیستند.

تعریف ۴۷.۱.۱ گراف دوگان [۵۱] یک گراف مسطح ،گراف مسطح G^* است که راسهای آن متناظر با وجه های G است و یال های G^* نیز متناظ با یال های G هستند که در آن اگر e یالی از G و مرز بین وجه X و وجه Yاز آن باشد، ان گاه نقاط انتهایی یال e^* ، متناظر با یال e و راسهای x^* و y^* از G^* ، متناظر با وجه های X و Y از G را به هم وصل می کند.

—هر یال برش از G متناظر با یک طوقه،G^* است زیرا وجوه دو طرف یک پل یکسان هستند.

—اگر دو وجه متفاوت Gبیش از یک یال مرزی داشته باشند آن گاه یال های موازی در G^* تولید خواهند کرد.

۲.۱ مباحثی از نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ متروید [۵۲] M زوج مرتب $M = (E,\mathrm{I})$ است که در آن E یک مجموعه متناهی بوده و $\mathcal{I}$ خانواده ای از زیر مجموعه‌های E می باشد که در سه شرط زیر صدق می کند:

I_1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

I_2) اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$ آن گاه $I' \in \mathcal{I}$.

I_3) اگر $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ و $|I_1| < |I_2|$ آن گاه عضوی مانند $e \in I_2 - I_1$ وجود دارد بطوری که $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

[۵۰] Face
[۵۱] Dual
[۵۲] Matroid

اگر $M=(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید باشد آن گاه M را متروییدی روی مجموعه ی E و E را مجموعه ی زمینه[۵۳] ماترویید M گوییم.

هر عضو گردایه $\mathcal{I}$ را یک مجموعه مستقل[۵۴] ماترویید M می نامیم.

زیر مجموعه‌هایی از E که در $\mathcal{I}$ نیستند را مجموعه‌های وابسته[۵۵] گوییم.

گزاره ۲.۲.۱ فرض کنید E مجموعه ای از بردارها و $\mathcal{F}$ گردایه تمام زیرمجموعه های مستقل خطی E باشد. در این صورت $(E,\mathcal{F})$ یک ماترویید است . ماترویید حاصل را یک ماترویید برداری [۵۶] گویند .

مثال ۳.۲.۱ فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

که در آن ستون‌ها به ترتیب از چپ ۱، ۲، ۳، ۴و۵ نامگذاری شده‌اند. در اینصورت با فرض:

$E=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $\mathcal{I}=\{\emptyset,\{۱\},\{۲\},\{۴\},\{۵\},\{۱,۲\},\{۱,۵\},\{۲,۴\},\{۲,۵\},\{۴,۵\}\}$

$(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید می‌باشد.

ماترویید تولید شده به روش فوق را یک **ماترویید برداری** [۵۷] گوییم و با نماد $M[A]$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴.۲.۱ فرض کنیم G یک گراف و E=E(G) باشد، مجموعه $\mathcal{I}$ شامل مجموعه‌ای از یال‌های G است که زیر گراف های تولید شده توسط این مجموعه‌ها بی دور باشند، در این صورت $M=(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید روی E است و این ماترویید را با M(G) نشان می دهیم.

برهان : رجوع شود به مرجع [1] بخش [۱.۱] ■

[۵۳] $Groundset$
[۵۴] $Independentset$
[۵۵] $Dependentset$
[۵۶] $Vectormatroid$
[۵۷] Vector Matroid

تعریف ۵.۲.۱ زیر مجموعه‌های وابسته مینیمال متروید M را یک دور[۵۸] گوییم. گردایه تمامی دورهای متروید M را با $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ یا با $\mathcal{C}$ نشان می دهیم.

یک دور M را که شامل n عضو باشد یک n—دور[۵۹] می نامیم. اعضای $\mathcal{F}$، زیر مجموعه هایی از $E(M)$ هستند که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ نیستند.بنابراین یک متروید با معلوم بودن دورهایش شناسایی می شود.

بنابراین با معلوم بودن عناصر$\mathcal{C}(\mathrm{M})$ می توان اعضای $\mathcal{I}(\mathrm{M})$ را مشخص کرد چون عناصرآن دقیقاً آن زیر مجموعه‌هایی از E است که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ نیستند.

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ خانواده ای از زیرمجموعه های مجموعه E باشد. در این صورت گردایه دورهای یک متروید دارای خواص زیر است:

C_1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

C_2) اگر $C_1 \in \mathcal{C}$, $C_2 \in \mathcal{C}$, $C_2 \subseteq C_1$ آن گاه $C_1 = C_2$.

C_3) اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$ آن‌گاه عضوی مثل C_3 از $\mathcal{C}$ وجود دارد به طوری که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

برهان : مرجع [1] بخش ۱.۱ ■

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد که در سه خاصیت C_1 و C_2 و C_3 صدق می کند. همچنین فرض کنیم $\mathcal{I}$ گردایه تمامی زیر مجموعه‌های E باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند آن‌گاه$(\mathrm{E},\mathcal{I})$ یک متروید روی E است که $\mathcal{C}$ گردایه دورهای آن می باشد.

برهان : مرجع [1] بخش ۱.۱ ■

---

[۵۸] *Circuit*
[۵۹] n-circuit

گزاره ۸.۲.۱ فرض کنیم G گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های، مجموعه زمینه E(M) باشد آن گاه $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک متروید روی E است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ در سه خاصیت C_1 و C_2 و C_3 صدق کند.

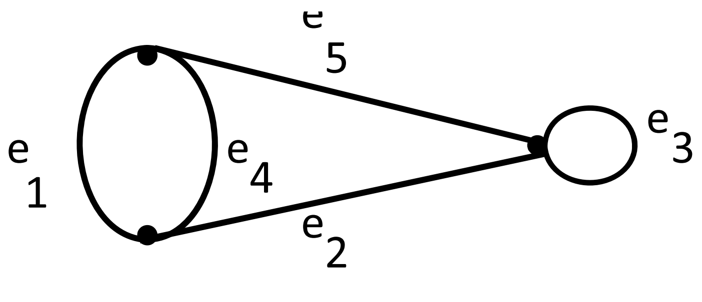
برهان : مرجع [1] بخش ۱.۱ ■

گزاره ۹.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه یال های گراف G و $\mathcal{C}$ گردایه تمام دورهای G باشد آن گاه $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک متروید روی مجموعه E است. این متروید را متروید دوری[۶۰] گراف G گوییم و آن را با M(G) نمایش می دهیم.

برهان : مرجع [1] بخش ۱.۱ ■

لم ۱۰.۲.۱ اگر $a \in C_1 \cap C_2$ و $b \in C_1 - C_2$ جایی که $C_1, c_2 \in \mathcal{C}$، آن گاه وجود دارد یک دور $C_3 \in \mathcal{C}$ به طوریکه $b \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{a\}$.

مثال ۱۱.۲.۱ گراف زیر را در نظر بگیرید:



[۶۰] Cycle matroid

ماترویید دوری حاصل از این گراف، مات‌رویدی با مجموعه زمینه $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ و

$$\mathcal{C} = \{\{e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}$$

و $$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e - 1, e_2\}, \{e_1, e_5\}, \{e - 2, e_5\}, \{e_2, e_4\}, \{e_4, e_5\}\}$$

و $M = (E, I) = M(G)$ می باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ دو ماترویید M_1, M_2 را یکریخت گوییم و می نویسیم $M_1 \cong M_2$ اگر تناظر یک به یک $\psi(X) : E(M_1) \to E(M_2)$ موجود باشد به طوری که برای هر $X \in E(M_1)$، $\psi(X)$ یک مجموعه مستقل در M_2 است اگر و تنها اگر X یک مجموعه مستقل در M_1 باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱ ماترویید M را گرافیک[61] گوییم هر گاه گرافی وجود داشته باشد که ماترویید تولید شده توسط آن یکریخت با M باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱ هر عضو e از ماترویید M را یک طوقه گوییم اگر $\{e\}$ یک دور M باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱ اگر f , g دو عضو ماترویید M باشند به طوری که $\{f, g\}$ یک دور باشد آن‌گاه f , g را موازی گوییم . منظور از یک کلاس موازی از M ، زیر مجموعه ماکسیمال X از E است که هر دو عضو متمایز آن موازی‌اند و هیچ عضو آن طوقه نیست.

یک کلاس موازی را بدیهی[62] گوییم اگر شامل تنها یک عضو باشد.

تعریف ۱۶.۲.۱ فرض کنیم$M=(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید بدون طوقه بوده و هر کلاس موازی آن بدیهی باشد. در این‌صورت M را یک ماترویید ساده[63] گوییم.

حال اگر تمامی طوقه‌های ماترویید M ، و از هر کلاس موازی همه‌ی عضوها را به جز یکی حذف کنیم، ماترویید حاصل را ماترویید ساده‌ی وابسته به M می نامیم و آن را با $\tilde{M}$ نمایش می دهیم.

[61] Graphic
[62] Trivial
[63] Simple matroid

تعریف ۱۷.۲.۱ هر مجموعه مستقل ماکسیمال متروید M را یک پایه‌ی[۶۴] M گوییم و مجموعه تمامی پایه‌های M را با $\mathcal{B}$ نشان می دهیم. یک متروید را توسط پایه هایش مطابق قضیه زیر می توان بیان کرد:

قضیه ۱۸.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه متناهی وناتهی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد آن‌گاه $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک متروید روی E است اگر و تنهااگر در شرایط زیر صدق کند:

B_1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

B_2) اگر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 - B_2$ آن گاه عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ وجود دارد به‌طوری که $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان : مرجع [1] بخش ۲.۱ ■

لم ۱۹.۲.۱ فرض کنیم B_2 و B_1 دو پایه از متروید M باشند آن گاه $|B_2| = |B_1|$.

برهان : مرجع [1] بخش ۲.۱ ■

گزاره ۲۰.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعهٔ n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه تمام زیر مجموعه‌های m عضوی E باشد که در آن $0 \leq m \leq n$. آن گاه $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک متروید روی E است . این متروید را با $U_{m,n}$ نمایش داده آن را متروید یکنواخت[۶۵] می نامیم و داریم:

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E; |X| \leq m\}$$

$$C(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset & m = n \\ \{C \subseteq E; |C| = m + 1\} & m < n \end{cases}$$

مثال ۲۱.۲.۱ متروید $U_{0,n}$ هر تک عضوی یک طوقه است چون تک عضوی‌ها دوراند ودارای $\emptyset$ به‌عنوان مجموعه مستقل‌است.

---

[۶۴] Base

[۶۵] Uniform matroid

در ماترویید $U_{n,n}$ هر زیر مجموعه از مجموعه زمینه E(M) در این ماترویید یک مجموعه‌ی مستقل است. لازم به ذکر است این ماترویید هیچ مجموعه وابسته ندارد.

ماترویید $U_{۲,۴}$ دارای ۴ عضو بوده و تمامی زیر مجموعه های ۲ عضوی آن پایه و تمامی زیر مجموعه‌های ۳ عضوی آن دور می باشند.

گزاره ۲۲.۲.۱ فرض کنیم M یک ماترویید گرافیک باشد آن گاه $M \cong M(G)$ که در آن G یک گراف همبند می باشد. یعنی گراف همبندی مثل G وجود دارد که ماترویید دوری تولید شده توسط G یکریخت با M باشد.

برهان : مرجع [1] بخش ۱.۲ ■

تذکر ۲۳.۲.۱ فرض کنید $M = M(G)$ یک ماترویید دوری از گراف همبند G باشد، در این صورت یک پایه $M(G)$ مجموعه یال های یک درخت فراگیر G است. بعلاوه برای هر درخت فراگیر T از گراف G داریم: $|V(T)| = |E(T)| + ۱$ پس اگر G همبند باشد آن گاه $r(M) = |V(G)| - ۱$ و اگر ناهمبند باشد آن گاه $r(M) = |V(G)| - w(G)$ که در آن $w(G)$ تعداد مؤلفه های همبند G می باشد .

لذا برای هر $X \subseteq E(G)$ خواهیم داشت: $r_M(X) = |V(G[X])| - w(G[X])$.

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنید G یک گراف باشد، دوگان ماترویید دوری از G را با $M^*(G)$ نمایش می دهیم و ماترویید هم دور G می نامیم.

هر ماترویید یکریخت با ماترویید هم دور یک گراف را ماترویید هم گرافیک [۶۶] می نامیم.

تعریف ۲۵.۲.۱ فرض کنیم $M=(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید و $X \subseteq E$ باشد، فرض کنید:

$$\mathcal{I}\,|X = \{\, I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$$

[۶۶] $Cographic Matroid$

می توان دید که $(X,\mathcal{I}|X)$ یک متروید است. این متروید را تحدید[۶۷] M به X یا حذف E-X از M گوییم و با نماد $M|X$ یا $M\backslash E-X$ نمایش می دهیم. مجموعه‌ی زمینه این متروید، X می باشد .

گردایه دورهای این متروید به‌صورت زیر است:

$$C(M|X)=\{C\in\mathcal{C}\ ;\ C\in X\}$$

تعریف ۲۶.۲.۱ فرض کنید $M=(E,\mathcal{I})$ یک متروید و $X\subseteq E$ باشد، تابع رتبه[۶۸] متروید M را به‌صورت:

$$r(X)=max\{\ |Y|\ ;\ Y\subseteq X,\ Y\in\mathcal{I}\}$$

تعریف می کنیم.

لم ۲۷.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه متناهی و ناتهی باشد تابع $r:۲^E\rightarrow N\cup\{۰\}$ تابع رتبه یک متروید روی E است اگر وتنها اگر r در شرایط زیر صدق کند:

$R_۱$) اگر $X\subseteq E$ ، آن گاه $|X| \geq r(X) \geq ۰$ یعنی $۰\leq r(X)\leq |X|$.

$R_۲$) اگر $X\subseteq Y\subseteq E$ ، آن گاه $r(X)\leq r(Y)$.

$R_۳$) اگر $X,Y\subseteq E$ ، آن گاه $r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\leq r(X)+r(Y)$.

برهان : مرجع [1] بخش ۱.۳ ■

تعریف ۲۸.۲.۱ فرض کنیم M یک متروید روی مجموعه زمینه E(M) با تابع رتبه r باشد. تابع $cl:۲^E\rightarrow ۲^E$ را برای هر $X\subseteq E$ با ضابطه‌ی

$$cl(X)=\{x\in E\ ;\ r(X\cup x)=r(X)\}$$

۶۷ Restriction
۶۸ *Rank*