دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

اعضای ایدآل‌های اول مینیمال در حلقه‌های تعویض‌ناپذیر

استادان راهنما

پروفسور امیدعلی کرمزاده و دکتر البرز آذرنگ

پژوهشگر

مریم محمدیان

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: محمدیان　　　　نام: مریم

عنوان: اعضای ایدآل‌های اول مینیمال در حلقه‌های تعویض‌ناپذیر

استادان راهنما: پروفسور امیدعلی کرمزاده و دکتر البرز آذرنگ

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　　رشته: ریاضی محض　　　　گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز　　　　دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲　　　　تعداد صفحات: ۸۹

واژگان کلیدی: ایدآل اول مینیمال،مقسوم علیه صفر،حلقه ی ۲-اولیه،NI-حلقه

چکیده: R را به عنوان حلقه در نظر می‌گیریم. $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر ضعیف می‌نامیم اگر وجود داشته باشد $r, s \in R$ که $ras = ۰$ باشد و $rs \neq ۰$. این مطلب نشان می‌دهد که در هر حلقه R، اعضایی از یک ایدآل اول مینیمال مقسوم‌علیه صفر ضعیف هستند مثال‌هایی وجود دارند که نشان می‌دهند ایدآل اول مینیمال یک حلقه می‌تواند شامل عناصری باشد که نه مقسوم‌علیه صفر چپ‌اند و نه مقسوم‌علیه صفر راست. در این مقاله نشان می‌دهیم که در هر حلقه مانند R، عناصر یک ایدآل اول مینیمال، مقسوم‌علیه صفر ضعیف هستند. هم‌چنین، در این مقاله، اجتماع ایدآل اول مینیمال در یک حلقه‌ی ۲-اولیه و اجتماع ایدآل‌های قویاً اول مینیمال در NI-حلقه‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند.
همه‌ی حلقه‌ها در این مقاله یک‌دار در نظر گرفته شده‌اند. $N_*(R)$، $N^*(R)$ و $N(R)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی رادیکال اول، بزرگترین ایدآل پوچ R و مجموعه‌ی همه‌ی عناصر پوچ‌توان R هستند.

با تقدیر و تشکر فراوان از فرشته های بی نظیر زندگیم

پدر و مادر عزیزم

و تقدیم به همسر و همراه زندگیم

رضا

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر کرم‌زاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر مهرداد نامداری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

هم‌چنین لازم می‌دانم که از تمامی اساتید مهربانم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در تمامی طول تحصیل با کمک های بی شائبه‌ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده و زمینه را برای پیشرفت اینجانب فراهم آورده‌اند.

و با سپاس فراوان از جناب آقای دکتر حبیب حریزاوی که منش و رفتار استادانه‌ی ایشان دلیل به ثمر رسیدن این پایان نامه بود.

مریم محمدیان

۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار

در بین ایدآل‌های اول در حلقه‌های تعویض پذیر، ایدآل‌های اول مینیمال دارای خاصیت جالبی هستند. این که هر عضو ایدآل اول مینیمال، مقسوم علیه صفر است یا به‌طور دقیق‌تر اگر P یک ایدآل اول مینیمال در حلقه تعویض پذیر R باشد، آن‌گاه یک $b \in R\backslash P$ وجود دارد و یک عدد طبیعی n به‌طوری‌که $a^nb = 0$ و در نتیجه اگر حلقه کاهش یافته باشد خواهیم داشت $(ab)^n = a^nb^n = 0 \Rightarrow ab = 0$. پس در حلقه‌های کاهش یافته برای هر $a \in P$ وجود دارد $b \in R\backslash P$ که $ab = 0$ است. ودر حقیقت عکس این مطلب در حلقه‌های کاهش یافته نیز درست است. یعنی اگر P یک ایدآل اول باشد، آن‌گاه P اول مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \in P$ یک $b \in R\backslash P$ وجود داشته باشد که $ab = 0$. زیرا اگر P مینیمال نباشد، آن‌گاه یک ایدآل اول Q وجود دارد که $Q \subset P$ و فرض کنیم که $a \in R\backslash P$ که $ab = 0$ و $ab = 0 \in Q$ در نتیجه $b \in Q$ است.یعنی $b \in P$ و به تناقض می‌رسیم.

این موضوع برای ایدآل‌های اول در حلقه‌های تعویض ناپذیر لزوماً درست نیست.در این مقاله سعی شده است یک نوع مقسوم علیه صفر برای عناصر تعریف شود و همین نتایج بالا را برای حلقه‌های کلی بررسی کنیم.

فصل ۱
مقدماتی از جبر

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. یک حلقه عبارت است از مجموعه‌ی ناتهی Rهمراه با دو عمل + و . که دارای خاصیت‌های زیر است:

۱) $(R:+)$ یک گروه آبلی با عضو خنثی است؛

۲) $(R:.)$ یک نیم‌گروه است؛

۳) برای هر $a,b,c \in R$ قوانین توزیع‌پذیر برقرار است، یعنی؛

$$(a+b)c = ac+bc, \quad a(b+c) = ab+ac.$$

تعریف ۲.۱.۱. حلقه R را تعویض‌پذیر گوییم، اگر $(R,.)$ یک نیم‌گروه تعویض‌پذیر باشد، یعنی؛ برای هر $a,b \in R$ داشته باشیم $ab=ba$.

اگر $(R,.)$ تعویض‌پذیر نباشد می‌گوییم حلقه R تعویض‌ناپذیر است.

برای مثال اعدادصحیح $\mathbb{Z}$ حلقه‌ای تعویض‌پذیر است اما حلقه کواترنیون‌ها یک حلقه تعویض‌ناپذیر است هم‌چنین حلقه درون‌ریختی‌های مدول‌ها نمونه‌ای از حلقه تعویض‌ناپذیر است.

تعریف ۳.۱.۱. عنصر $۱ \in R$ را عنصر واحد حلقه R می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in R$، $۱ \cdot a = a \cdot ۱ = a$

تعریف ۴.۱.۱. فرض می کنیم R یک حلقه باشد زیر مجموعه ی S را زیرحلقه R نامیم، هرگاه S همراه با اعمال حلقه R، یک حلقه باشد و عضو همانی ضربی R و S یکی باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض می کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$ در این‌صورت

۱) a را یک عنصر خودتوان R می‌نامیم، هرگاه $a^۲ = a$؛

۲) a را یک عنصر پوچ‌توان می‌گوییم اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $a^n = ۰$؛

مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R را با $N(R)$ نمایش می‌دهیم.

۳) a را معکوس‌پذیر چپ (راست) حلقه R گوییم، اگر حلقه R واحددار باشد و عضو $b \in R$ موجود باشد که $ba = ۱$ ($ab = ۱$)؛

۴) a را معکوس‌پذیر گوییم، اگر معکوس‌پذیر چپ و راست باشد؛

۵) a را یک مقسوم‌علیه صفر چپ گوییم، اگر عنصر $b \neq ۰$ در R وجود داشته باشد که $ab = ۰$؛

۶) a را یک مقسوم‌علیه صفر راست گوییم، اگر عنصر $b \neq ۰$ در R وجود داشته باشد که $ba = ۰$؛

۷) a را یک مقسوم‌علیه صفر گوییم، اگر a هم مقسوم‌علیه صفر چپ و هم مقسوم‌علیه صفر راست باشد؛

۸) a را یک عنصر منظم می‌نامیم، هرگاه نه مقسوم‌علیه صفر چپ باشد و نه مقسوم‌علیه صفر راست باشد؛

۹) a را یک عنصر مرکزی گوییم، هرگاه برای هر $b \in R$ داشته باشیم $ab = ba$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و X یک زیرمجموعه‌ی R باشد، در این‌صورت پوچ‌ساز چپ (راست) مجموعه‌ی X را با $(ann_r(X))ann_l(X)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$ann_r(X) = \{r \in R | \forall x \in X \quad xr = 0\}, ann_l(X) = \{r \in R | \forall x \in X \quad rx = 0\}.$$

۲.۱ حلقه‌ها و ایدآل‌های خاص

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $(R, +, .)$ یک حلقه باشد عمل ضرب جدید o را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall a, b \in R, \quad aob = b.a$$

در این صورت مجموعه R با عمل جمع + (همان جمع در R) و o را حلقه متقابل R می‌نامیم و با R^{op} نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد.

۱) حلقه R دامنه صحیح خوانده می‌شود، هرگاه R تعویض‌پذیر باشد و $0 \neq 1$ و $a \cdot b = 0$ ایجاب نماید $a = 0$ یا $b = 0$ برای هر $a, b \in R$؛

۲) حلقه R میدان نامیده می‌شود، هرگاه R دامنه صحیحی باشد که در آن برای هر عضو ناصفر $a \in R$ وجود داشته باشد عضوی چون $a^{-1} \in R$ به‌قسمی که $a^{-1}.a = a \cdot a^{-1} = 1$؛

۳) حلقه R دامنه نامیده می‌شود، هرگاه R حلقه‌ای تعویض‌ناپذیر باشد و برای هر $a, b \in R$ و $ab = 0$ ایجاب کند $a = 0$ یا $b = 0$؛

۴) حلقه یکدار R یک حلقه تقسیم نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو ناصفر در آن وارون‌پذیر باشد؛

۵) حلقه R یک حلقه بولی نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو آن خودتوان باشد؛

۶) حلقه R را یک حلقه منظم (منظم فون نیومن) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a \in R$ و عنصر $b \in R$ وجود داشته باشد که $aba = a$؛

مثال ۳.۲.۱. هر حلقه‌ی بولی یک حلقه منظم است. هم‌چنین هر حلقه تقسیم یک حلقه‌ی منظم است. در حلقه‌ی منظم هر عضوی که مقسوم‌علیه صفر نباشد وارون‌پذیر است.

تعریف ۴.۲.۱. فرض می کنیم R یک حلقه باشد،

الف) زیرمجموعه‌ی ناتهی I از R یک ایدآل چپ (راست) R خوانده می‌شود، هرگاه

۱) برای هر a و b در R، $a + b \in I$؛

۲) اگر $a \in I$ و $r \in R$، آن‌گاه $ra \in I$ $(ar \in I)$.

در صورتی‌که I هم ایدآل چپ و هم ایدآل راست باشد آن را یک ایدآل می نامیم. آشکار است ایدآل چپ و راست در حلقه تعویض‌پذیر بر هم منطبق هستند.

ب) اگر R یک حلقه تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$aR = \{x \in R |\ x = ar \quad \text{برای}\ r\ \text{ای در}\ R\}$$

یک ایدآل است که آن‌را ایدآل اصلی تولید شده توسط a می‌نامیم و با نماد (a) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۵. ایدآل(دو طرفه) از حلقه‌ی R تولید شده به وسیله‌ی زیرمجموعه‌ی X را به شکل $< X >$ می‌نویسیم که اگر به وسیله‌ی عنصر $a \in R$ تولید شده باشد با نماد $< a >$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۲.۶. *فرض کنید R یک حلقه و I و J ایدآل‌هایی در R هستند، زیرمجموعه‌های ذیل از R ایدآل‌های R هستند؛*

الف) $I \cap J$؛

ب) $I + J = \{x \in R \mid x = a + b$ ، *برای هر* a در I و b در $J\}$؛

ج) $I \cdot J = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i | a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{Z}^+\}$.

تعریف ۱.۲.۷. ایدآل P در حلقه‌ی R را اول گوییم، هرگاه P ایدآل سره ی R باشد و به ازای هر ایدآل A و B در R

$$AB \subset P \Rightarrow A \subset P \text{ یا } B \subset P$$

گزاره ۱.۲.۸. *هرگاه P یک ایدآل اول و R حلقه تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه برای هر $a, b \in P$، $ab \in P$ نتیجه می‌دهد که $a \in P$ یا $b \in P$.*

مجموعه تمام ایدآل‌های اول حلقه R را طیف R نامیم و با $spec(R)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۲.۹. *حلقه ی تعویض پذیر R یک دامنه صحیح است اگر و تنها اگرایدآل (0) یک ایدآل اول باشد*

برهان. به مرجع [۱۵] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۲.۱. *هر حلقه‌ی تعویض‌پذیر دست‌کم یک ایدآل اول دارد.*

برهان. به مرجع [۴] مراجعه شود. □

در حالت تعویض ناپذیر برای ایدآل‌های اول، با دو تعریف روبرو می شویم که هر یک، تعریف مورد استفاده برای حلقه‌های تعویض پذیر را تعمیم می دهد.

تعریف ۱۱.۲.۱. ایدآل P از حلقه تعویض ناپذیر R را کاملاً اول گوییم اگر برای هر $a, b \in P$ ،

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ یا } b \in P$$

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض می‌کنیم R حلقه تعویض ناپذیر باشد ایدآل سره‌ی P از R را اول می نامیم، هرگاه برای همه‌ی ایدآل‌های A و B از R

$$AB \subset P \Rightarrow A \subset P \text{ یا } B \subset P$$

گزاره ۱۳.۲.۱. *فرض کنید P ایدآل سره‌ای در حلقه R باشد در این‌صورت، اگر به ازای هر $a, b \in P$*

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ یا } b \in P,$$

آن‌گاه P را یک ایدآل اول می‌نامیم.

گزاره ۱۴.۲.۱. *حلقه‌ی تعویض ناپذیر R را دامنه گوییم، هرگاه (0) یک ایدآل کاملاً اول باشد.*

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۵. ایدآل سره از حلقه‌ی تعویض ناپذیر R نیم اول است هرگاه اشتراکی از ایدآل‌های اول R باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶. اگر R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه اشتراک همه ایدآل‌های اول R را رادیکال اول R می‌نامیم و آن را با نماد $N_*(R)$ که ایدآلی از R است.

تعریف ۱.۲.۱۷. هرگاه R یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار و I یک ایدآل R باشد، آن‌گاه رادیکال I را به‌صورت $\sqrt{I} = \{r \in R | \; \exists \; n \in \mathbb{N} \; , r^n \in I\}$ تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان نشان داد که $\sqrt{I}$ یک ایدآل R است که شامل I می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۱۸. *اگر I یک ایدآل حلقه R باشد، آن‌گاه* $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset P \in spec(R)} P$

برهان. به مرجع [۱۵] مراجعه شود. $\square$

در صورتی که $I = \{\circ\}$باشد، آن‌گاه $\sqrt{\{\circ\}}$ را با نماد $\sqrt{\circ}$ نمایش می دهیم و آن را رادیکال پوچ R می‌نامیم.

$$\sqrt{\circ} = \{x \in R | \; \exists \; n \in \mathbb{N} \; ; x^n = \circ\} = N(R)$$

توجه کنید که در حلقه‌های تعویض پذیر $\sqrt{\circ}$ با مجموعه عناصر پوچ‌توان R برابر است.

قضیه ۱.۲.۱۹. *رادیکال پوچ حلقه‌ی تعویض پذیر R که آن‌را با نماد $\sqrt{\{\circ\}}$ نشان می دهند، که برابراست با* $\sqrt{\circ} = \bigcap_{I \subset P \in spec(R)} P$

برهان. به مرجع [۱۵] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشدو I یک ایدآل چپ حلقه R باشد. در این صورت

۱) I را یک ایدآل مینیمال چپ گوییم، اگر $I \neq 0$ و به طور سره شامل هیچ ایدآل چپ حلقه R نباشد؛

۲) I را ایدآل ماکسیمال چپ گوییم، هرگاه $I \neq R$ و به طور سره مشمول هیچ ایدآل چپ R و مخالف با R نباشد؛

۳) I را یک ایدآل پوچ‌توان چپ گوییم، هرگاه $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری‌که $I^k = 0$؛

۴) I را ایدآل پوچ چپ گوییم، هرگاه هر عضو I پوچ‌توان چپ باشد؛

۵) I را ایدآل خودتوان گوییم، هرگاه $I = I^2$ باشد؛

مفاهیم فوق به روش مشابه برای ایدآل‌های راست و ایدآل‌ها نیز بیان می‌شوند.

توجه شود اگر I ایدآل پوچ توان باشد، آن‌گاه یک ایدآل پوچ است.البته در حالت کلی یک ایدآل پوچ، ایدآل پوچ توان نیست.

تعریف ۲۱.۲.۱. ایدآل اول P در حلقه تعویض‌پذیر R را یک ایدآل اول مینیمال روی ایدآل سره‌ی I می‌نامیم، در صورتی که $I \subseteq P$ و اگر Q ایدآل اولی باشد که $I \subseteq Q \subseteq P$، آن‌گاه $P = Q$.

مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های اول مینیمال روی I را با $\mathrm{Min}(I)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنیم Q ایدآل اولی در حلقه‌ی R باشد. Q یک ایدآل اول مینیمال حلقه R گوییم، اگر P ایدآل اولی باشد که $P \subseteq Q$، آن‌گاه $P = Q$. مجموعه‌ی ایدآل‌های اول مینیمال حلقه‌ی R را با $\mathrm{Min}(R)$ نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر ایدآل اول مینیمال روی ایدآل $< 0 >$ را ایدآل اول مینیمال گویند.

قضیه ۲۳.۲.۱. *فرض کنید I ایدآل سره‌ی حلقه تعویض‌پذیر R و $\mathrm{Min}(I)$ نشان‌دهنده ایدآل‌های اول مینیمال I باشد در این صورت $\sqrt{I} = \bigcap_{P\in \mathrm{Min}(I)} P$*

برهان. به [۱۵] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۲۴.۲.۱. *هر ایدآل اول P در حلقه R، شامل یک ایدآل اول مینیمال است.*

برهان. فرض می‌کنیم A یک مجموعه از ایدآل‌های اول R باشد که شامل P است، در نتیجه A ناتهی است. می‌توانیم از لم زورن در A استفاده کنیم، به شرطی که نشان دهیم هر زنجیر $T \subseteq A$ دارای یک کران پایین در A است. چون T یک زنجیر است، برای هر $P \in T$ مجموعه $Q = \cap P$ یک ایدآل از R است و واضح است که $Q \subseteq P$.حال ادعا می‌کنیم که Q ایدآل اول است پس برای هر $x, y \in R$ ، $xRy \subseteq Q$. فرض می‌کنیم $x \notin Q$ پس $x \notin P$ بنابراین وجود دارد $P' \in T$ و $P'' \in T$ که $P'' \subseteq P'$. داریم $x \notin P''$ و $xRy \subseteq Q \subseteq P''$از آن جایی که $y \in P''$ برای تمام عناصر P'' از T و چون $y \in Q$ پس ثابت کردیم که Q ایدآل اول است در نتیجه $Q \in A$ و Q یک کران پایین برای T است پس بنا به لم زورن ایدآل اولی در A وجود دارد که در میان ایدآل‌های A مینیمال است $\square$

گزاره ۲۵.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه تعویض‌پذیر باشد و P ایدآل اول مینیمال از R باشد. آن‌گاه برای هر x از P وجود دارد y ای از $R\backslash P$ ، به‌طوری که برای یک $n \in \mathbb{N}$ داریم $x^n y = 0$.*

برهان. فرض کنیم P یک ایدآل اول مینیمال و $x \in P$باشد. نشان می دهیم که $y \in R\backslash P$ وجود دارد به‌طوری‌که برای یک $n \in \mathbb{N}$ داریم $x^n y = 0$. برای اثبات فرض می‌کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$x^n y \neq \circ$ نشان می‌دهیم و به تناقض می‌رسیم. حال قرار می‌دهیم

$$S = \{x^n y : y \in R\backslash P \ , \ n \in \mathbb{N}\},$$

به وضوح S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است. پس ایدآل اول Q وجود دارد به طوری که $Q \cap S = \phi$

اما برای هر $y \in R\backslash P$ داریم $y = y \cdot ۱ = y^\circ \in S$ پس $R\backslash P \subseteq S$ حال می‌توان نوشت

$$Q \cap S = \phi \Rightarrow Q \subseteq R\backslash S \subseteq P \Rightarrow Q \subseteq P$$

اما P ایدآل اول مینیمال است. بنابراین $P = Q$ که این تناقض است. زیرا اگر $x \in P = Q$ آن‌گاه $x \in Q$.

از طرفی $S \ni x \cdot ۱ = x$ پس $x \in Q \cap S = \phi$ که غیر ممکن است، بنابراین x یک مقسوم‌علیه صفر است. □

تعریف ۲۶.۲.۱. ایدآل سره M را یک ایدآل ماکسیمال حلقه تعویض‌پذیر R می‌نامیم، هرگاه به ازای هر ایدآل R مانند A رابطه‌های شمول $M \subset A \subset R$، یکی از دو تساوی $M = A$ یا $A = R$ را ایجاب کند.

قضیه ۲۷.۲.۱. *هر حلقه تعویض‌پذیر یکدار شامل یک ایدآل ماکسیمال است.*

برهان. به [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف ۲۸.۲.۱. حلقه تعویض‌پذیر R را موضعی می‌نامیم، هرگاه تنها یک ایدآل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱. حاصل جمعی از ایدآل‌های پوچ حلقه R را رادیکال پوچ R گوییم و آن‌را با نماد $N^*(R)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۰.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه باشد.در این‌صورت $N^*(R)$ یک ایدآل پوچ حلقه R است وبزرگترین ایدآل پوچ R است.*

برهان. فرض می‌کنیم $a \in N^*(R)$ باشد. در این‌صورت برای هر $n \in N$ و ایدآل‌های پوچ $I_1, ..., I_n$ در R وجود دارند به طوری که $a \in I_1 + ... + I_n$ که $I_1 + ... + I_n$ یک ایدآل پوچ حلقه R است پس a یک عضو پوچ‌توان حلقه R می‌باشد. بنابراین $N^*(R)$ یک ایدآل پوچ حلقه R است. در ادامه فرض کنیم R یک حلقه باشد، قرار می‌دهیم

$$T = \{A : \text{ یک ایدآل پوچ } R \text{ است } A\}$$

چون $(\circ) \in T$ بنابراین $T \neq \circ$ است حال فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ زنجیری در T باشد $\bigcup_{i\in I} A_i$، ایدآلی از R است. حال فرض کنید $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$، پس $j \in I$ ی وجود دارد که $x \in A_j$. چون A_j پوچ است پس $n \in \mathbb{N}$ ی هست که $x^n = \circ$. بنابراین $\bigcup_{i\in I} A_i$ ایدآل پوچ است. $\bigcup_{i\in I} A_i$ یک کران بالا برای $\{A_i\}$ در T است. حال بنا به لم زورن T دارای ایدآل ماکسیمال است پس واضح است که هر عضو ماکسیمال T یک ایدآل پوچ ماکسیمال است. بنابراین R دارای ایدآل پوچ ماکسیمال مانند A است. فرض کنید B یک ایدآل پوچ از حلقه‌ی R و $x \in A + B$ ، آن‌گاه $a \in A$ و $b \in B$ وجود دارند که $x = a + b$. داریم

$$a \in A \longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ a^n = \circ \quad b \in B \longrightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ b^m = \circ$$

پس می‌توان نوشت

$$[(a+b)^n]^m = \circ \Rightarrow x^{mn} = \circ,$$

پس $A+B$ پوچ است بنابراین A ایدآل پوچ ماکسیمال است و $A \subseteq A+B$. در نتیجه $B \subseteq A$. پس A تنها ایدآل پوچ ماکسیمال است بنابراین باید بزرگترین ایدآل پوچ R باشد. $\square$

قضیه ۳۱.۲.۱. *فرض کنید R حلقه باشد.در این‌صورت همواره داریم* $N_*(R) \subseteq N^*(R) \subseteq N(R)$.

برهان. می‌دانیم که $N_*(R)$ یک ایدال پوچ حلقه R است با توجه به تعریف $N^*(R)$، $N_*(R) \subseteq N^*(R)$ است. واضح است که $N^*(R) \subseteq N(R)$. $\square$

قضیه ۳۲.۲.۱. *فرض کنید $N_*(R)$ برابر باشد با تمام عناصر پوچ‌توان از عناصر حلقه R آن‌گاه برای هر $P \in spec(R)$ گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) P *ایدآل اول مینیمال است؛*

ب) $N(P) = P$؛

ج) *برای هر* $a \in P$، ab *پوچ‌توان است که* $b \in R \backslash P$ *است.*

۳.۱ مجموعه‌ی بسته ضربی وm-سیستم

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید S زیرمجموعه ای از حلقه ی تعویض پذیر R باشد. S را زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R ، نامند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $1 \in S$

۲) $\forall a,b \in S \Longrightarrow \quad ab \in S$

مثال ۲.۳.۱. در هر حلقه تعویض پذیر مجموعه‌ی عناصر وارون پذیر یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است.

مثال ۳.۳.۱. اگر P ایدآل اول حلقه‌ی تعویض پذیر R باشدآن‌گاه $S = R\setminus P$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است.

همچنین اگر $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از ایدآل‌ها باشد، آن‌گاه $S = R\setminus \bigcup_{i\in I} P$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R است.

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنید I ایدآل سره‌ی حلقه‌ی تعویض پذیر R باشدو S مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی باشد به‌طوری‌که اشتراک آن با ایدآل I تهی باشد.در این‌صورت ایدآل اول P وجود دارد به‌طوری‌که $I \subseteq P$ و $P \cap S = \oslash$.*

برهان. به مرجع [۱۵] مراجعه شود. □

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر باشد، آن‌گاه اشتراک همه ایدآل‌های اول آن بابرابر مجموعه‌ی عناصر پوچ توان آن است.*

برهان. مجموعه عناصر پوچ توان R را A می‌نامیم. اگر $a \in A$ ، عدد طبیعی $n \geq ۱$ وجود دارد، به قسمی که $a^n = \circ$. اگر P ایدآل اول R باشد $a^n = \circ \in P$ و به استقرا در می‌یابیم که $a \in P$؛ پس a به هر ایدآل اول R و در نتیجه به اشتراک تمام ایدآل‌های اول R ، یعنی $N_*(R)$ متعلق است و $A \subseteq N_*(R)$. حال نشان می‌دهیم که اگر $x \in R$ پوچ توان نباشد، دست کم به یک ایدآل اول R متعلق نیست و از این رو نمی‌تواند یک عضو $N_*(R)$ باشد.مجموعه‌ی $\{۱, x, x^۲, ...\}$ را که به وضوح یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است و

علاوه بر آن $0 \notin S$ در نظر می‌گیریم. به موجب قضیه ۴.۳.۱ ، ایدآل اولی چون P وجود دارد به قسمی که $S \cap P = \phi$ ، پس لازم است که $x \notin P$؛ بنابراین $N_*(R)$ متشکل از تمام عناصر پوچ توان R می‌باشد و $N(R) = N_*(R)$. □

توجه شود درحالت کلی $N_*(R)$ شامل تمام عضوهای پوچ‌توان حلقه R نیست اما در حالتی که حلقه R تعویض‌پذیر باشد $N_*(R)$ مجموعه تمام عضوهای پوچ‌توان R می‌شود.

تعریف ۶.۳.۱. عنصر a از حلقه R را قویاً پوچ توان گوییم اگر هر دنباله $a_1, a_2, a_3, \ldots$ که $a_1 = a$ و $(\forall n)$ ، $a_{n+1} \in a_n R_n a_n$ سرانجام صفر شود، باشد.

گزاره ۷.۳.۱. *فرض کنید R یک حلقه باشد آن‌گاه $N_*(R)$ با مجموعه تمام عناصر قویاً پوچ توان از R برابر است.*

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $a \notin N_*(R)$. بنابراین یک m-سیستم به نام M شامل a که شامل صفر نیست، وجود دارد.فرض کنید $a_1 = a$ باشد و با استقرا داریم $a_{n+1} \in (a_n R a_n) \cap M$. آن‌گاه دنباله $a_1, a_2, a_3, \ldots$ که هیچکدام صفر نیستند، را در نظر می‌گیریم.بنابراین a قویاً پوچ توان نیست.

برای برعکس فرض می‌کنیم a قویاً پوچ توان نباشد، مجموعه $M = \{a_i : i \geq 1\}$ از عناصر غیر صفر که $a_{n+1} \in (a_n R a_n) \cap M$ وجود دارد. همانطور که واضح است M یک m-سیستم است، چون $0 \notin M$ ، که نتیجه می‌دهد $a \notin N_*(R)$. □

تعریف ۸.۳.۱. m-سیستم S در حلقه‌ی R را به زیرمجموعه از $R \backslash \{0\}$ گوییم، هرگاه؛