دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

نیم‌گروه توپولوژی یکال‌های ماتریسی و نیم‌گروه توپولوژی معکوس‌متقارن تبدیلات از رتبه متناهی

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

مهدی موسایی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر

هوالخبیر

ای نام تو بهترین سرآغاز، تو را سپاس؛

ای هستی هرچه هست از تو، به پاس همه هستی‌ها، هرآن تو را سپاس؛

ای مبدأ و مقصد علم، یک‌سر تو را سپاس؛

ای محبوب بی‌کران، بی‌کران تو را سپاس.

درود بر بزرگ معلم انسانیت نبی مکرم اسلام و بر اولیای برگزیده خدا، آنان که چراغ راه و اسوه همه معلمان‌اند. پیامبر آگاهی و روشنی می‌فرماید: اوّلُ الْعِلم مَعْرِفَةُالْجَبّار و آخِرُالْعِلم تَفْویضُ الْاَمْرِ اِلَیْه. این سخن آموزگار ماست. درس زیستن و شکوفا شدن است. باید به آن اندیشید. بسیار کسان بوده‌اند که پایان راه به این باور رسیده‌اند. چه زیباست که آغاز با این باور باشد. او را درود که چنین به بارگاه دوست راهمان نمود.

* * *

بر خود فرض می‌دانم از همه عزیزانی که مرا در این راه یاری‌گر بوده‌اند، سپاس‌گزاری کنم.

پیش از همه، از اساتید بزرگ زندگیم، پدر و مادر عزیزم، که همواره مرا برای رسیدن به افق‌های بلند رهنمون بوده‌اند، تشکر می‌کنم.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر رضایی که این کار حاصل راهنمایی‌ها و حمایت‌های ایشان و از جناب آقای جمالزاده به خاطر پشتوانه علمی بی‌دریغ ایشان در نقد و بررسی مطالب، که بی‌شک رهنمودهای این عزیزان بسیار برایم ارزشمند بوده است، صمیمانه متشکرم.

در پایان بر خود لازم می‌دانم که از همه اساتید گروه ریاضی که مدت شش سال از محضر این عزیزان کسب علم نموده‌ام و از همه دوستانم به خاطر مشورت‌های فراوانی که از آنان در به پایان رساندن این کار گرفته‌ام، تشکر نمایم و احساس خود را به همه این عزیزان با تقدیم این بیت بیان می‌کنم:

غلام همت آنم که زیر چرخ کبود   زهر چه رنگ تعلق پذیرد آزاد است

* * *

چکیده

در این پایان‌نامه اطلاعاتی در مورد نیم‌گروه توپولوژی یکال‌های ماتریسی، B_λ و نیم‌گروه توپولوژی معکوس‌متقارن تبدیلات از رتبه متناهی، φ_λ^n بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که نیم‌گروه φ_λ^n در خانواده همه نیم‌گروه‌های معکوس‌توپولوژی بطور جبری $h-$بسته است و همچنین نشان می‌دهیم که هر نیم‌گروه توپولوژی فشرده (فشرده شمارا) نمی‌تواند شامل φ_λ^n به عنوان یک زیرنیم‌گروه باشد و برای هر عدد اصلی نامتناهی λ، هر همریختی پیوسته از φ_λ^n به یک نیم‌گروه توپولوژی فشرده، تباهیده است. همچنین به بعضی نتایج مرتبط با فشرده‌سازی نیم‌گروه توپولوژی φ_λ^n می‌رسیم.

فهرست مندرجات

تاریخچه

گروه‌های توپولوژی مجرد برای اولین‌بار توسط اشریر[۱] در سال ۱۹۲۶ معرفی گردید و مطالعه روی آنها در سال‌های پس از آن گسترش یافت. به موازات مطالعه روی گروه‌های توپولوژی، مطالعه روی نیم‌گروه‌های توپولوژی در سال ۱۹۲۶ توسط بور[۲] شروع و سپس تحقیقات در این زمینه گسترش یافت تا اینکه در سال ۱۹۵۲ وگنر[۳] نیم‌گروه توپولوژی یکال‌های ماتریسی و نیم‌گروه توپولوژی معکوس‌متقارن تبدیلات از رتبه متناهی را معرفی کرد. از آن پس این دو نیم‌گروه نقش مهمی در تئوری نیم‌گروه‌های توپولوژی بازی می‌کند. در سال ۱۹۵۵ کلیفورد[۴] نیم‌گروه‌های معکوس را معرفی کرد. در همان سال والیس[۵] با قرار دادن توپولوژی روی نیم‌گروه‌های معکوس، نیم‌گروه توپولوژی معکوس و نیم‌گروه معکوس‌توپولوژی را تعریف نمود. او سعی کرد خواص توپولوژی را روی نیم‌گروه‌های توپولوژی معکوس و نیم‌گروه‌های معکوس‌توپولوژی بررسی کند. در سال ۲۰۰۵ گوتیک[۶] و پاولیک[۷] خواص توپولوژی بسیار مهمی از نیم‌گروه توپولوژی یکال‌های ماتریسی، B_λ را بیان کردند. در ادامه آنها طی مقالاتی برخی خواص توپولوژی نیم‌گروه توپولوژی معکوس‌متقارن تبدیلات از رتبه متناهی، φ_λ^n و خواص توپولوژی بیشتری از نیم‌گروه توپولوژی یکال‌های ماتریسی را بیان کردند.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول مقدماتی را در مورد فضاهای توپولوژی بیان می‌کنیم. در فصل دوم نیم‌گروه‌ها و نیم‌گروه‌های توپولوژی را معرفی می‌کنیم. در فصل سوم توجه خود را به بیان برخی از خواص توپولوژی نیم‌گروه توپولوژی یکال‌های ماتریسی، B_λ معطوف می‌کنیم. در فصل چهارم به معرفی و بیان برخی خواص توپولوژی نیم‌گروه توپولوژی معکوس‌متقارن تبدیلات از رتبه متناهی، φ_λ^n می‌پردازیم.

---

[۱] Schreier
[۲] Bohr
[۳] Vagner
[۴] Cliford
[۵] Wallace
[۶] Gutik
[۷] Pavlyk

فصل ۱

مقدماتی از فضاهای توپولوژی

۱—۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم و تعاریف اساسی فضاهای توپولوژی را بیان می‌کنیم و مطالبی در مورد خانواده‌های موضعاً‌متناهی، اصول جداسازی، پیوستگی و تورها و در ادامه نکاتی را در مورد فضاهای فشرده و فشرده‌سازی فضاهای توپولوژی بیان می‌کنیم و در انتها به اختصار به فضاهای تابعی می‌پردازیم.

۱—۲ فضاهای توپولوژی و مجموعه‌های باز، بسته و چگال

تعریف ۱.۲.۱: فرض کنید X یک مجموعه باشد. گردایه τ از زیرمجموعه‌های X، ($\tau \subseteq P(X)$) را یک توپولوژی روی X گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(۱) $\emptyset, X \in \tau$؛

(۲) τ تحت اشتراک متناهی بسته باشد. یعنی اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$، n عضو از τ باشند، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$؛

(۳) τ تحت اجتماع بسته باشد. یعنی اگر $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک گردایه از اعضای τ باشند، آنگاه $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$.

اعضای τ را مجموعه‌های باز و زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژی گویند.

مثال ۲.۲.۱: فرض کنید X یک مجموعه و τ_d گردایه همه زیرمجموعه‌های آن باشد. به وضوح τ_d در سه شرط تعریف ۱.۲.۱ صدق می‌کند و لذا (X, τ_d) تشکیل یک فضای توپولوژی می‌دهد، که آن را فضای گسسته می‌نامند.

مثال ۳.۲.۱: فرض کنید τ گردایه همه زیرمجموعه‌های X که متمم آنها متناهی است، به همراه مجموعه تهی باشد. آنگاه τ یک توپولوژی روی X می‌باشد، که آن را توپولوژی متمم—متناهی گویند.

تعریف ۴.۲.۱: فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد. خانواده $\beta \subseteq \tau$ را یک پایه برای فضای توپولوژی X نامند، هرگاه هر زیرمجموعه باز ناتهی از X را بتوان به صورت

اجتماعی از اعضای β نوشت. به عبارت دیگر خانواده β را یک پایه برای فضای توپولوژی X نامند، هرگاه $\beta \subseteq \tau$ و برای هر $x \in X$ و هر همسایگی از x مانند V، $U \in \beta$ موجود باشد بطوریکه $x \in U \subseteq V$.

تعریف ۵.۲.۱: خانواده $\beta(x)$ از همسایگی‌های شامل x را یک پایه برای فضای توپولوژی X در نقطه x نامند، هرگاه برای هر همسایگی V از x، $U \in \beta(x)$ موجود باشد بطوریکه $x \in U \subseteq V$.

به وضوح اگر $\beta(x)$ یک پایه برای فضای توپولوژی X در نقطه x باشد، آنگاه $\bigcup_{x \in X} \beta(x)$ یک پایه برای فضای توپولوژی X است.

تعریف ۶.۲.۱: فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد. $E \subseteq X$ را در X بسته گویند، هر گاه $X - E$ در X باز باشد. به عبارت دیگر $E \subseteq X$ را در X بسته گویند، هرگاه $X - E \in \tau$.

قضیه ۷.۲.۱([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت:

(۱) $\emptyset$ و X در X بسته‌اند؛

(۲) اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته در X، بسته است؛

(۳) اشتراک هر خانواده دلخواه از مجموعه‌های بسته در X، بسته است.

تعریف ۸.۲.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A \subseteq X$ و $\mathcal{C}_A$ خانواده همه مجموعه‌های بسته شامل A باشد. با توجه به قسمت (۱) قضیه ۷.۲.۱، $\mathcal{C}_A \neq \emptyset$ و با توجه به قسمت (۳) قضیه ۷.۲.۱، $\bigcap \mathcal{C}_A$ بسته است. $\bigcap \mathcal{C}_A$ را بستار A نامند و آن را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر بستار A، کوچکترین مجموعه بسته شامل A است.

به وضوح $A \subseteq X$ بسته است اگر و فقط اگر $A = \overline{A}$.

قضیه ۹.۲.۱([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A, B \subseteq X$ باشد. در این صورت:

(۱) $\overline{\emptyset} = \emptyset$؛

(۲) $A \subseteq \overline{A}$؛

(۳) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$؛

(۴) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\overline{A} \subseteq \overline{B}$؛

(۵) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

تعریف ۱۰.۲.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A \subseteq X$. اجتماع همه مجموعه‌های باز مشمول در A را درون A می‌نامند و آن را با $Int(A)$ نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر درون A بزرگترین مجموعه باز مشمول در A است.

به وضوح $A \subseteq X$ باز است اگر و فقط اگر $A = Int(A)$.

قضیه ۱۱.۲.۱ ([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A, B \subseteq X$ باشد. در این صورت:

(۱) $Int(X) = X$؛

(۲) $Int(A) \subseteq A$؛

(۳) $Int(Int(A)) = Int(A)$؛

(۴) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

تعریف ۱۲.۲.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. نقطه $x \in X$ را یک نقطه حدی $A \subseteq X$ گویند، هرگاه $x \in \overline{A - \{x\}}$. مجموعه همه نقاط حدی A را مجموعه مشتق A می‌نامند و آن را با A^d نمایش می‌دهند و نقاط مجموعه $A - A^d$ را نقاط منفرد مجموعه A می‌نامند.

قضیه ۱۳.۲.۱ ([۴]): نقطه x در فضای توپولوژی X منفرد است اگر و فقط اگر یک همسایگی مانند U از x در X موجود باشد بطوریکه $U \cap X = \{x\}$، اگر و فقط اگر مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ باز باشد، اگر و فقط اگر $\{x\} = X - (\overline{X - \{x\}})$، بدین معنی که $x \notin (\overline{X - \{x\}})$.

قضیه ۱۴.۲.۱ ([۴]): مجموعه مشتق دارای خواص زیر می‌باشد:

(۱) $\overline{A} = A \cup A^d$؛

(۲) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A^d \subseteq B^d$؛

(۳) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$؛

(۴) $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^d \subset (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^d$.

قضیه ۱۵.۲.۱ ([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد.

(۱) $Y \subseteq X$ را در X چگال گویند، هرگاه $\overline{Y} = X$.

(۲) $Y \subseteq X$ را در X هم‌چگال گویند، هرگاه $X - Y$ در X چگال باشد.

(۳) $Y \subseteq X$ را در X هیچ‌جاچگال گویند، هرگاه $\overline{Y}$ در X هم‌چگال باشد.

قضیه ۱۶.۲.۱ ([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $Y \subseteq X$ هیچ‌جاچگال در X باشد. آنگاه $Int\ \overline{Y} = \phi$.

قضیه ۱۷.۲.۱ ([۴]): اجتماع متناهی از مجموعه‌های هیچ‌جاچگال، هیچ‌جاچگال است.

۱—۳ خانواده موضعاً‌متناهی

تعریف ۱.۳.۱: خانواده $\{A_i\}_{i \in I}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژی X را موضعاً‌متناهی گویند، هرگاه برای هر نقطه $x \in X$، همسایگی باز U از x در X موجود باشد بطوریکه مجموعه $\{i \in I \mid U \cap A_i \neq \phi\}$ متناهی باشد. اگر مجموعه $\{i \in I \mid U \cap A_i \neq \phi\}$ حداکثر یک عضو داشته باشد، آنگاه این خانواده را بطور مجزا موضعاً‌متناهی گویند.

قضیه ۲.۳.۱ ([۴]): برای هر خانواده موضعاً‌متناهی از مجموعه‌ها مانند $\{A_i\}_{i \in I}$

داریم:

$$\overline{(\cup_{i\in I}A_i)}=\cup_{i\in I}\overline{A_i}.$$

قضیه ۳.۳.۱([۴]): فرض کنید $\mathcal{F}$ یک خانواده موضعاًمتناهی باشد. اگر همه اعضای $\mathcal{F}$ بسته باشند، آنگاه $F=\bigcup\mathcal{F}$ بسته است و اگر همه اعضای $\mathcal{F}$ هم باز و هم بسته باشند، آنگاه $F=\bigcup\mathcal{F}$ نیز هم باز و هم بسته است.

قضیه ۴.۳.۱([۴]): فرض کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده موضعاًمتناهی (بطور مجزا موضعاًمتناهی) باشد. آنگاه خانواده $\{\overline{A_\alpha}\}_{\alpha\in I}$ نیز موضعاًمتناهی (بطور مجزا موضعاًمتناهی) است.

۱ــ۴ اصول جداسازی

در این بخش پنج اصل جداسازی $T_۰$، $T_۱$، $T_۲$، $T_۳$ و $T_۴$ و همچنین فضای تیخونوف [۱] را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای $T_۰$ گویند، در صورتی که برای هر دو نقطه متمایز آن، یک مجموعه باز موجود باشد بطوریکه یک و تنها یکی از آن‌ها را شامل شود.

تعریف ۲.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای $T_۱$ گویند، در صورتی که برای هر دو نقطه متمایز آن مانند x و y، مجموعه باز U شامل x موجود باشند بطوریکه $y\notin U$.

تعریف ۳.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای $T_۲$ یا هاسدورف [۲] گویند، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز آن مانند x و y، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند بطوریکه:

$$x\in U,\quad y\in V,\quad U\cap V=\emptyset.$$

[۱] Tychonoff space

[۲] Hausdorff space

قضیه ۴.۴.۱([۴])**:** حد در فضاهای هاسدورف، منحصربفرد است.

تعریف ۵.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای T_3 یا منظم گویند، در صورتی که X یک فضای T_1 باشد و برای $x \in X$ و هر مجموعه بسته مانند F در X که x را شامل نشود، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند بطوریکه:

$$x \in U, \quad F \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

تعریف ٦.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ یا تیخونوف گویند، هرگاه X یک فضای T_1 باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه بسته $F \subseteq X$ در X که x را شامل نشود، تابع پیوسته $f : X \to [0, 1]$ موجود باشد بطوریکه:

$$f(x) = 0, \quad f(F) = 1.$$

تعریف ۷.۴.۱: فضای توپولوژی (X, τ) را یک فضای T_4 یا نرمال گویند، هرگاه X یک فضای T_1 باشد و برای هر دو مجموعه بسته جدا از هم F و E در آن، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند بطوریکه:

$$F \subseteq U, \quad E \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

۱ــ۵ پیوستگی و همان‌سانی‌ها

تعریف ۱.۵.۱: فرض کنید (X, τ) و (Y, τ') دو فضای توپولوژی باشند. نگاشت $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ را پیوسته گویند، هرگاه برای هر $U \in \tau'$ داشته باشیم $f^{-1}(U) \in \tau$. به عبارت دیگر نگاشت $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ را پیوسته گویند، هرگاه نقش معکوس هر مجموعه باز در Y یک مجموعه باز در X باشد.

تعریف ۲.۵.۱: فرض کنید (X,τ) و (Y,τ') دو فضای توپولوژی باشند. نگاشت $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ را باز (بسته) گویند، هرگاه تصویر هر مجموعه باز (بسته) در X، یک مجموعه باز (بسته) در Y باشد.

قضیه ۳.۵.۱([۴]): فرض کنید (X,τ) و (Y,τ') دو فضای توپولوژی باشند و $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ یک تناظر یک‌به‌یک باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) f باز است.

(۲) f بسته است.

(۳) f^{-1} پیوسته است.

تعریف ۴.۵.۱: نگاشت دوسویی پیوسته f را که در یکی از شرایط قضیه قبل صدق کند، یک همانسانی یا یک همئومورفیسم گویند.

قضیه ۵.۵.۱([۴]): فرض کنید (X,τ) و (Y,τ') دو فضای توپولوژی باشند. برای نگاشت $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) f پیوسته است.

(۲) تصویر معکوس هر مجموعه باز در Y، مجموعه‌ای باز در X است.

(۳) تصویر معکوس هر مجموعه بسته در Y، مجموعه‌ای بسته در X است.

(۴) به ازای هر $A\subseteq X$ داشته باشیم:

$$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}.$$

(۵) به ازای هر $B\subseteq Y$ داشته باشیم:

$$\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

قضیه ۶.۵.۱([۴]): نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ بسته است اگر و فقط اگر برای هر $B\subset Y$ و هر مجموعه باز

$A \subset X$ که شامل $f^{-1}(B)$ است، مجموعه بازی چون $C \subset Y$، شامل B موجود باشد بطوریکه $f^{-1}(C) \subset A$.

۱—۶ تورها

تعریف ۱.۶.۱: فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد. یک رابطه دوتایی روی X یک زیرمجموعه مانند ρ از $X \times X$ می‌باشد. اگر $(a,b) \in \rho$، می‌نویسیم $a\rho b$ و می‌گوییم a تحت رابطه ρ، در رابطه است با b.
مجموعه تمام روابط دوتایی روی X را با β_X نمایش می‌دهند.
فرض کنید α و ρ دو رابطه دوتایی در β_X باشند. ترکیب α و ρ را برای هر $a,b \in X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$(a,b) \in \alpha \circ \rho$، هرگاه $x \in X$ موجود باشد بطوریکه $(x,b) \in \rho$ و $(a,x) \in \alpha$.

تعریف ۲.۶.۱: رابطه دوتایی w روی مجموعه X (یعنی زیرمجموعه w از $X \times X$) را یک رابطه ترتیب جزئی گویند، هرگاه:

(۱) برای هر $x \in X$، $(x,x) \in w$. یعنی w انعکاسی باشد.

(۲) برای هر $x,y \in X$ اگر $(x,y) \in w$ و $(y,x) \in w$، آنگاه $x = y$. یعنی w پادمتقارن باشد.

(۳) برای هر $x,y,z \in X$ اگر $(x,y) \in w$ و $(y,z) \in w$، آنگاه $(x,z) \in w$. یعنی w متعدی باشد.

در این صورت (X,w) را یک مجموعه مرتب جزئی می‌نامند.

تعریف ۳.۶.۱: یک تور در فضای توپولوژی X یک تابع دلخواه از مجموعه مرتب جزئی ناتهی Σ به فضای X است. معمولاً یک تور را به صورت $\{x_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ نمایش می‌دهند، جایی که x_σ نقطه‌ای از X است و σ عنصری از مجموعه مرتب جزئی Σ می‌باشد.

تعریف ۴.۶.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. گوییم تور $\{x_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ به $x \in X$ همگراست، هرگاه برای هر همسایگی U از x، $\sigma_\circ \in \Sigma$ موجود باشد بطوریکه برای هر $\sigma \geq \sigma_\circ$ داشته باشیم:

$$x_\sigma \in U.$$

یک تور ممکن است به تعداد زیادی نقطه همگرا باشد. مجموعه حدود تور $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ را با $\lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$ نمایش می‌دهند. اگر تور $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ تنها یک حد داشته باشد، آنگاه می‌نویسند:

$$x = \lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma.$$

قضیه ۵.۶.۱([۴]): $x \in \overline{A}$ است اگر و فقط اگر توری از عناصر A، همگرا به x موجود باشد.

قضیه ۶.۶.۱([۴]): مجموعه A بسته است اگر و فقط اگر برای هر تور موجود در A مجموعه حدود آن تور نیز در A باشد.

قضیه ۷.۶.۱([۴]): نگاشت $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر تور $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ در فضای X داشته باشیم:

$$f(\lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma) \subseteq \lim_{\sigma\in\Sigma} f(x_\sigma).$$

قضیه ۸.۶.۱([۴]): فضای توپولوژی X هاسدورف است اگر و فقط اگر هر تور در X حداکثر یک حد داشته باشد.

۱—۷ فضاهای فشرده

در این قسمت با مفاهیم فشردگی، فشرده شمارایی، فشرده‌نمایی، بطور مجزا فشرده‌نمایی، فشرده دنباله‌ای و فشرده موضعی آشنا می‌شویم.

تعریف ۱.۷.۱: فرض کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژی X

باشد. این گردایه را یک پوشش برای X می‌نامند، هرگاه $X = \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$.
این پوشش را یک پوشش باز (بسته) نامند، هرگاه همه A_αها باز (بسته) باشند.
در صورتی که همه A_αها هم باز و هم بسته باشند، آنگاه این پوشش را یک پوشش هم باز و هم بسته نامند.

تعریف ۲.۷.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای فشرده نامند، هرگاه X هاسدورف باشد و هر پوشش باز آن یک زیرپوشش متناهی داشته باشد.

قضیه ۳.۷.۱([۴])**:** هر زیرمجموعه بسته از یک فضای توپولوژی فشرده، فشرده است.

قضیه ۴.۷.۱([۴])**:** فرض کنید $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای توپولوژی فشرده X به فضای توپولوژی Y باشد. آنگاه $f(X)$ در Y فشرده است.

قضیه ۵.۷.۱([۴])**:** فضای توپولوژی X یک فضای تیخونوف است اگر و فقط اگر قابل نشاندن در یک فضای فشرده باشد.

تعریف ٦.۷.۱: فضای توپولوژی X را فشرده شمارا گویند، هرگاه X یک فضای هاسدورف و هر پوشش باز شمارا از X دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

تذکر ۷.۷.۱: هر فضای توپولوژی فشرده، فشرده شمارا می‌باشد.

تعریف ۸.۷.۱: فضای توپولوژی X را لیندلوف [۳] گویند، هرگاه هر پوشش باز X دارای یک زیرپوشش شمارا باشد.

---
[۳] Lindeloff

قضیه ۹.۷.۱ ([۴]): فضای توپولوژی X فشرده است اگر و فقط اگر X یک فضای فشرده شمارا با خاصیت لیندلوف باشد.

قضیه ۱۰.۷.۱ ([۴]): هر زیرفضای بسته از یک فضای فشرده شمارا، فشرده شمارا است.

قضیه ۱۱.۷.۱ ([۴]): فرض کنید $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای فشرده شمارای X به فضای هاسدرف Y باشد، آنگاه Y یک فضای فشرده شمارا است.

قضیه ۱۲.۷.۱ ([۴]): هر تابع پیوسته حقیقی‌مقدار روی یک فضای فشرده شمارا، بسته و کراندار است.

قضیه ۱۳.۷.۱ ([۴]): حاصل‌ضرب دکارتی یک فضای فشرده شمارا در یک فضای فشرده، فشرده شمارا است.

تعریف ۱۴.۷.۱: فضای توپولوژی X را فشرده‌نما (بطور مجزا فشرده‌نما) گویند، هرگاه هر خانواده موضعاًمتناهی (بطور مجزا موضعاًمتناهی) از زیرمجموعه‌های ناتهی باز X، متناهی باشد.

قضیه ۱۵.۷.۱ ([۴]): فضای توپولوژی تیخونوف X فشرده‌نما است اگر و فقط اگر هر تابع حقیقی‌مقدار پیوسته روی X، کراندار باشد.

قضیه ۱۶.۷.۱ ([۴]): برای هر فضای توپولوژی هاسدرف X شرایط زیر معادلند:

(۱) X فشرده شمارا است.

(۲) هر خانواده شمارا از زیرمجموعه‌های بسته در X که دارای خاصیت اشتراک متناهی باشد، اشتراک ناتهی داشته باشد.

(۳) برای هر دنباله نزولی $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ از زیرمجموعه‌های بسته ناتهی از X، $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ ناتهی باشد.

قضیه ۱.۷.۱۷ ([۴]): برای هر فضای هاسدرف X شرایط زیر معادلند:

(۱) X فشرده شمارا است.

(۲) هر خانواده موضعاً‌متناهی از زیرمجموعه‌های ناتهی از X متناهی است.

(۳) هر خانواده موضعاً‌متناهی از زیرمجموعه‌های تک‌نقطه‌ای از X متناهی است.

(۴) هر زیرمجموعه نامتناهی از X دارای یک نقطه حدی است.

(۵) هر زیرمجموعه شمارای نامتناهی از X دارای یک نقطه حدی است.

قضیه ۱.۷.۱۸ ([۴]): هر فضای تیخونوف فشرده شمارا، فشرده‌نما است.

قضیه ۱.۷.۱۹ ([۴]): هر فضای نرمال فشرده‌نما، فشرده شمارا است.

قضیه ۱.۷.۲۰ ([۴]): فرض کنید $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای فشرده‌نمای X به فضای تیخونوف Y باشد. آنگاه Y نیز فشرده‌نما است.

تعریف ۱.۷.۲۱: فضای توپولوژی X را فشرده دنباله‌ای گویند، هرگاه هر دنباله در X یک زیردنباله همگرا در X داشته باشد.

قضیه ۱.۷.۲۲ ([۴]): هر فضای فشرده دنباله‌ای، فشرده شمارا است.

قضیه ۱.۷.۲۳ ([۴]): فرض کنید $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای فشرده دنباله‌ای X به فضای هاسدرف Y باشد، آنگاه Y نیز فشرده دنباله‌ای است.

قضیه ۱.۷.۲۴ ([۴]): هر زیرفضای بسته از یک فضای فشرده دنباله‌ای، فشرده دنباله‌ای