
بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين
الرحمن الرحيم
مالك يوم الدين
اياك نعبد و اياك نستعين
اهدنا الصراط المستقيم
صراط الذين انعمت عليهم
غير المغضوب عليهم و لا الضالين

دانشگاه الزهراء (س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

عنوان

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به روش تبدیل مشتق و تجزیه آدومیان

استاد راهنما
دکتر علی مردان شاه رضائی

استاد مشاور
دکتر شهناز طاهری

دانشجو
معصومه حسینی نیا

شهریور ۱۳۹۰

چکیده

هدف اصلی در این رساله، حل مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} = C^۲\nabla^۲U + F(X,t); \qquad X \in \Omega \subset R^d; ۰ < t < t_{max}, \alpha = ۰, ۱, ۲, d = ۱, ۲, \\ \\ \dfrac{\partial^k U}{\partial t^k}(X, ۰) = f_k(x); \qquad X \in \overline{\Omega}, k = ۰, ۱, \\ \\ U(X,t)|_{\partial\Omega} = g(t); \qquad ۰ \leq t \leq t_{max}, \\ \\ \dfrac{\partial U}{\partial n}(X,t)|_{\partial\Omega} = h(t); \qquad ۰ \leq t \leq t_{max}, \end{cases}$$

به دو روش تجزیه آدومیان و تبدیل مشتق است که در آن F، g، h و f_k توابع معلوم می‌باشد. $\nabla^۲$ عملگر لاپلاس و $\partial\Omega$ کران بسته و هموار ناحیه Ω از R^d ؛ $d = ۱, ۲$، $\overline{\Omega}$ بستار Ω، n بردار قائم خارجی بر سطح Ω و t_{max} که یک عدد مشخص(زمان نهایی)است. تابع U در این مساله تابع مجهول می‌باشد که به دو روش زیر به دست می‌آید.

روش تجزیه آدومیان، روشی کارا و قوی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی وغیرخطی، بدون نیاز به هر گونه پارامتر، است.در این روش جواب را به صورت $u = \sum_{n=۰}^{\infty} u_n$ تقریب می‌زنیم. خاصیت عملی روش تجزیه آدومیان، ارائه دادن جواب‌های واقعی و مناسب از دستگاه‌های مختلط غیرفیزیکی، بدون در نظر گرفتن شرایط اضافی و معمول در مساله‌ی اولیه است.

روش تبدیل مشتق، به عنوان روش دوم برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه شده است. روش تبدیل مشتق، یک روش تکراری و متفاوت از سری تیلور برای به‌دست آوردن جواب به صورت چند جمله‌ای است.

در این پایان نامه، علاوه بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل کسری

با مشتقات‌جزئی به روش تجزیه آدومیان بررسی می‌شود. با ارائه نتایج عددی، این دو روش مقایسه می‌شوند و نتایج عددی حاکی از دقت و سرعت محاسبات این دو روش در قیاس با سایر روش‌های عددی است.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، روش تجزیه آدومیان، روش تبدیل مشتق، چندجمله‌ای‌های آدومیان، معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی

فهرست مطالب

لیست جداول

مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در ارتباط با مسائل گوناگون فیزیکی و هندسی که شامل توابعی می‌باشند که این توابع به دو یا چند متغیر مستقل بستگی دارند، مطرح می‌شوند. اغلب مسائل مکانیک، سیالات و جامدات، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیس، مکانیک کوانتوم و دیگر زمینه‌های فیزیکی و علوم به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی منجر می‌شوند.
جواب‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی توسط نویسندگان مختلف بیان شده است[۹]، [۱۵] و [۱۶].
پرفسور آدومیان $George\ Adomian$، اولین کسی بود که روش تجزیه آدومیان را در سال ۱۹۸۱ برای حل معادلات عملگری خطی تصادفی ارائه نمود. مباحث مطرح شده توسط وی در قالب یک مجموعه مدون برای اولین بار در سال ۱۹۸۳ به چاپ رسید. این روش بین سال های ۱۹۸۱الی ۱۹۹۲ به سرعت برای حل پاره‌ای از مسائل غیرخطی فراگیر شد.[۳۱]
بحث همگرایی روش در اوایل سال ۱۹۸۹ توسط پرفسور ایو$Yves$ برای اولین بار مطرح شد. نتایج بیشتر در مورد همگرایی روش و بحث نظری در مورد ایده نظریه تجزیه آدومیان در سال ۱۹۹۲ بیان گردیده است.[۲۰]

روش تبدیل مشتق ابتدا توسط پرفسور ژو$Zhou$معرفی شد که برای حل مسائل خطی و غیرخطی به کار گرفته شد. پرفسور چن$Chen$و پرفسور هوHo این روش را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی گسترش دادند.[۳]

این پایان نامه در سه فصل تنظیم گردیده است. در فصل اوّل مقدمات و پیش نیازهایی که مورد نیاز در فصل‌های بعدی است، ارائه می‌گردد. در فصل دوّم، نخست ساختار، همگرایی و قضایای روش تجزیه آدومیان بیان می‌شود و سپس به حل مسائل کوشی، مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسائل معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی پرداخته می‌شود. فصل سوم به معرفی تبدیل مشتق یک بعدی، دو بعدی و n بعدی و سپس به حل مسائل

کوشی، مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسائل معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی به روش تبدیل مشتق و بیان نتایج عددی با هر دو روش اختصاص دارد.

معصومه حسینی‌نیا
تابستان ۹۰

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به ارائه تعاریف و مفاهیمی می‌پردازیم که در فصول آتی به آن‌ها نیاز داریم.

۱.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

یک معادله متشکل از دو یا تعداد بیشتری متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی یک یا تعداد بیشتری متغیر وابسته نسبت به متغیر های مستقل را یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با مشتقات جزئی می‌نامیم. صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای دو متغیر مستقل x و y و یک متغیر وابسته z، عبارت است از:

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = ۰ ,$$

که در آن $z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ ، $z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ و نظایر آن، نمایش مشتقات جزئی می‌باشد و نمایش صورت کلی یک معادله دیفرانسیل برای n متغیر مستقل $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ و متغیر وابسته‌ی u عبارت است از:

$$F(x_۱, x_۲, \cdots, x_n, u_{x_۱}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_۱x_۱}, u_{x_۱x_۲}, \cdots) = ۰.$$

تعریف ۱.۱.۱. *یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی می‌گوییم اگر متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها در معادله دیفرانسیل به صورت خطی ظاهر شوند. معادله دیفرانسیل را که خطی نباشد، غیرخطی می‌گوییم.*

تعریف ۲.۱.۱. *مرتبه یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر با بالاترین مرتبه‌ی مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود.*

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه‌ی اول برای دو متغیر مستقل عبارت است از:

$$P(x, y)U_x + Q(x, y)U_y + R(x, y)U = S(x, y) ,$$

و صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه‌ی دوم برای دو متغیر مستقل به شکل زیر می‌باشد:

$$A(x, y)U_{xx} + B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + D(x, y)U_x + E(x, y)U_y + F(x, y)U = G(x, y).$$

تعریف ۳.۱.۱. *یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را شبه خطی می‌گوییم اگر معادله نسبت به بالاترین مرتبه‌ی مشتقی که در معادله ظاهر می‌شود، خطی باشد.*

تعریف ۴.۱.۱. *یک معادله دیفرانسیل را نیمه خطی می‌گوییم اگر معادله شبه خطی بوده و ضرایب بالاترین مرتبه‌ی مشتق‌هایی که در معادله ظاهر می‌شوند، فقط به متغیرهای مستقل بستگی داشته باشند.*

جوابی از یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی در ناحیه‌ای مانند R از فضای متغیرهای مستقل، تابعی است که در ناحیه‌ای شامل R، همه مشتقات جزئی موجود در معادله را دارا بوده و در همه نقاط R در معادله صدق کند. در حالت کلی، تعداد جواب‌های یک معادله با مشتق جزئی بسیار زیاد است به عنوان مثال، هر یک از توابع :

$$u = Ln(x^۲ + y^۲)\,,\; u = \mathrm{e}^x \cos y\,,\; u = x^۲ - y^۲\,,\; u = x$$

که به کلی با هم تفاوت دارند، جواب معادله‌ی

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰\,,$$

می‌باشند.

تعریف ۵.۱.۱. انواع معادلات با مشتقات جزئی خطی مرتبه‌ی دوم

معادله‌ی مرتبه دوم

$$a\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + b\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = ۰\,,$$

که در آن a، b، c، d، e، f و g ممکن است توابعی از متغیرهای مستقل x و y یا متغیر وابسته $u(x,y)$ باشند را در نظر می‌گیریم. این معادله یک معادله بیضوی است اگر $b^۲ - ۴ac < ۰$، یک معادله سهموی است اگر $b^۲ - ۴ac = ۰$ و یک معادله هذلولوی است اگر $b^۲ - ۴ac > ۰$. اگر $g = ۰$، معادله را همگن می‌گویند، در غیر اینصورت معادله ناهمگن می‌باشد. در صنعت هرگاه یک مساله سهموی به حالت پایا یا مانا منجر شود به آن یک مساله بیضوی می‌گویند.

تعریف ۶.۱.۱. ***انواع شرایط***

۱- شرط کرانه‌ای

اگر به جای متغیرهای مکان، عدد قرار دهیم شرط حاصل را، شرط کرانه‌ای می‌گویند.

۲- شرط اولیه

چنانچه به جای متغیر زمان، نقطه آغازین $t_0 = 0$ در نظر گرفته شود آن شرط را شرط اولیه می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱. ***انواع شرایط کرانه‌ای***

یک مساله در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط کرانه‌ای (مثل مساله‌ی لاپلاس، پوآسون و نظایر آن)و یا با شرایط اولیه و کرانه‌ای (مانند مساله‌ی گرما، موج و نظایر آن)همراه می‌باشد. انواع شرایط کرانه‌ای عبارت‌اند از:

۱- شرط کرانه‌ای از نوع دیریکله:

در این نوع شرط کرانه‌ای، مقدار تابع روی کران ناحیه‌ی حل، مشخص می‌باشد.

۲- شرط کرانه‌ای از نوع نیومن:

در این نوع شرط کرانه‌ای، مقدار مشتق تابع روی کران ناحیه‌ی حل، مشخص می‌باشد.

۳- شرط کرانه‌ای از نوع روبین:

در این نوع شرط کرانه‌ای، مقدار تابع در بخشی از کران ناحیه‌ی حل و مقدار مشتق تابع در بخش دیگر کران ناحیه حل، مشخص می‌باشد.

۴- شرط کرانه‌ای از نوع آمیخته:

در این نوع شرط کرانه‌ای، ترکیب خطی از تابع و مشتق تابع روی کران ناحیه حل، معلوم می‌باشد.

۲.۱ مفاهیم آنالیز حقیقی

۱.۲.۱ فضای برداری

تعریف ۱.۲.۱. *یک فضای برداری (یا فضای خطی) روی میدان F مجموعه‌ای است تهی مانند X با دو عمل جمع و ضرب (ضرب اسکالر) همراه با یک میدان F اعضای x و y از X را بردار نامیم و اعضای α و β از میدان F را عدد اسکالر خوانیم به طوری‌که $(X,+)$ تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد یعنی به ازای هر x، y و z از X داشته باشیم:*

۱) $x + y \in X$

۲) $(x + y) + z = x + (y + z)$

۳) X دارای عضو خنثی باشد یعنی به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $x + 0 = 0 + x = x$.

۴) هر $x \in X$ دارای عضو قرینه $-x \in X$ باشد یعنی به ازای هر $x \in X$ داریم
$.x + (-x) = 0$

۵) $.x + y = y + x$

همچنین به ازای هر اسکالر $\alpha, \beta \in F$ و هر بردار $x, y \in X$ داشته باشیم:

۶) $\alpha x \in X$

۷) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

۸) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

۹) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

۱۰) $1x = x$

تعریف ۲.۲.۱. *فضای برداری X را یک فضای نرمدار(نرمیده) گوییم در صورتی‌که به ازای هر $x \in X$، عدد حقیقی و نامنفی $\| x \|$ که نرم x نامیده می‌شود، وجود داشته باشد به طوری‌که:*

الف) به ازای هر x و y در X، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

ب) به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α، $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

ج) اگر $x \neq 0$ آنگاه $\| x \| > 0$

تعریف ۳.۲.۱. *فضای نرم‌دار X را یک فضای باناخ گوییم در صورتی‌که فضای متری (X, d) با متر متعارف (متری که به وسیله نرم القا می‌شود)، یک فضای متری کامل باشد.*
فضای متری (X, d) کامل است در صورتی‌که هر دنباله کوشی در X همگرا به عضوی از X باشد.

۲.۲.۱ تبدیل خطی

تعریف ۴.۲.۱. *نگاشت T از فضای برداری X به توی فضای برداری Y با میدان یکسان را یک تبدیل خطی گوییم در صورتی‌که به ازای هر x_1 و x_2 از X و هر α و β از میدان مشترک داشته باشیم:*

۱) $.T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

۲) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ (خاصیت همگنی).

و یا به‌طور خلاصه

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2).$$

مثال ۱.۲.۱. *عملگر انتگرال* $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ *با ضابطه‌ی* $Tf(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *نیز یک عملگر خطی است.*[۳]

تعریف ۵.۲.۱. *فرض کنیم* X *و* Y *دو فضای نرمدار و* $T : X \to Y$ *یک عملگر خطی باشد. گوییم* T *کراندار است اگر عدد* $K > 0$ *وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر* $x \in X$ *داشته باشیم:*

$$\| Tx \| \leq K \| x \| .$$

تعریف ۶.۲.۱. *فرض کنیم* X *و* Y *دو فضای نرمدار و* $T : X \to Y$ *یک عملگر خطی باشد. گوییم* T *عملگر انقباضی است اگر عدد* $\delta > 0$ *وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر* $x \in X$ *داشته باشیم:*

$$\| T \| \leq \delta < 1.$$

قضیه ۱.۲.۱. *یک تبدیل خطی و کراندار به‌طور یکنواخت پیوسته است.*[۳]

قضیه ۲.۲.۱. *شرط لازم و کافی برای آن‌که یک نگاشت خطی پیوسته باشد آن است که فقط در یک نقطه مثلاً صفر پیوسته باشد.*[۳]

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنیم* $T : X \to Y$ *یک تبدیل خطی از فضای نرمیده* X *به‌توی فضای نرمیده* Y *باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:*[۳]

۱) T *پیوسته است.*

۲) T *کراندار است.*

۳) T *در یک نقطه پیوسته است.*

۴) *اگر* $x_n \to x$ *آنگاه* $T(x_n) \to T(x)$.

۵) T *در صفر پیوسته است.*

۶) *عدد ثابت و مثبتی مانند* c *باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر* $x \in X$، $\| T(x) \| \leq c \| x \|$.

۳.۲.۱ فضای هیلبرت

ضرب داخلی (ضرب عددی یا ضرب نقطه‌ای) روی فضای برداری X، یک تابع عددی مانند نماد $< .,. >$ روی $X \times X$، است به طوری‌که:

۱)به ازای هر $x, y \in X$، تابع $x \to < x, y >$ خطی باشد.

۲) $< \overline{y,x} >=< x,y >$.

۳)به ازای هر $x \in X$ ، $< x,x > \geq ۰$.

۴)شرط لازم و کافی برای آن‌که $< x,x >= ۰$ آن است که $x = ۰$.

یک ضرب داخلی روی X، یک نرم تعریف می‌کند که بوسیله‌ی $\| . \| = \sqrt{< x,x >}$ نمایش داده می‌شود و به همین ترتیب یک متر روی X با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y) = \| x - y \| = \sqrt{< x-y, x-y >}.$$

تعریف ۷.۲.۱. *فضای باناخ H را یک فضای هیلبرت گوییم هرگاه یک ضرب داخلی $< .,. >$ روی H تعریف شده باشد به طوری‌که به ازای هر $x \in H$،* $\| x \| = \sqrt{< x,x >}$.

پس یک فضای هیلبرت، فضای نرمدار کاملی است که نرم آن بوسیله‌ی یک ضرب داخلی تعریف شده باشد.

به عنوان مثال، $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{R}^n$ فضای هیلبرت با بعد متناهی هستند. $\mathbb{R}^n$ یک فضای هیلبرت است که ضرب داخلی آن به‌صورت $< x,y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ تعریف می‌شود که در آن داریم $x = (x_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $y = (y_i) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. در نتیجه $\| x \| =< x,x >^{1/2} = (\sum_{i=1}^n | x_i |^2)^{1/2}$.

$\mathbb{C}^n$ فضای هیلبرت است که با ضرب داخلی زیر تعریف می‌شود:

$$< x,y >= x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}.$$

بنابراین می‌یابیم $\| x \| =< x,x >^{1/2} = x_1\overline{x_1} + \cdots + x_n\overline{x_n} = (\sum_{i=1}^n | x_i |^2)^{1/2}$.

تعریف ۸.۲.۱. *دنباله توابع $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ را یک مجموعه متعامد می‌نامند اگر این توابع دو به دو متعامد باشند یعنی اگر $< \phi_n, \phi_m >= ۰$ وقتی $m \neq n$.*

تعریف ۹.۲.۱. *دنباله توابع $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه نامیده می‌شود اگر یک مجموعه متعامد باشد و به ازای هر n، $\| \phi_n \| = ۱$.*

۳.۱ سری فوریه

سری فوریه ابزاری برای ارائه توابع دوره‌ای بر حسب توابع سینوسی و کسینوسی می‌باشد. این سری، سری مثلثاتی است که ضرایب آنها از روی فرمول‌های اویلر محاسبه می‌شود.

فرمول‌های اویلر برای ضرایب فوریه

فرض کنید f تابعی دوره‌ای با دوره‌ی ۲π باشد که بتوان آن را به صورت مثلثاتی

$$f(x) = a_{\circ} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{۱.۱}$$

نمایش داد یعنی فرض کنیم که سری متشابهاً همگرا و $f(x)$ برابر حاصل جمع آن باشد، می‌خواهیم ضرایب a_n و b_n برای چنین تابع مفروض f را، در سری (۱.۱) متناظر به آن معین کنیم.

$$\begin{aligned} a_{\circ} &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

مقادیر مفروض در(۲.۱)به ضرایب تابع f موسوم‌اند که به فرمول‌های اویلر معروف‌اند[۳۵]. به سری مثلثاتی

$$a_{\circ} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{۳.۱}$$

با ضرایب داده شده در(۲.۱) را سری فوریه تابع f می‌نامند.

مثال ۱.۳.۱. *ضرایب فوریه تابع دوره‌ای*

$$f(x) = \begin{cases} -k & ; -\pi < x < \circ\,, \\ k & ; \circ < x < \pi\,, P = ۲\pi\,, \end{cases}$$

عبارت است از:

$$\begin{aligned} a_{۰} &= ۰\,, \\ a_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = ۰\,, \\ b_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{۲k}{n\pi}(۱-\cos n\pi) \\ &= \frac{۲k}{n\pi}(۱-(-۱)^n). \end{aligned}$$

از اینرو ضرایب فوریه b_n تابع مورد نظر عبارت‌اند از:

$$b_۱ = \frac{۴k}{\pi}\,,\ b_۲ = ۰\,,\ b_۳ = \frac{۴k}{۳\pi}\,,\ b_۴ = ۰\,, \cdots$$

و از آنجا که a_nها صفر هستند، سری فوریه $f(x)$ عبارت است از:

$$\frac{۴k}{\pi}(\sin x + \frac{۱}{۳}\sin ۳x + \frac{۱}{۵}\sin ۵x + \cdots).$$

قضیه ۱.۳.۱. (نمایش با سری فوریه) *هرگاه تابع متناوب $f(x)$ با دوره‌ی ۲π در فاصله‌ی $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته تکه‌ای بوده و در هر نقطه از فاصله‌ی مزبور مشتق چپ و راست داشته باشد، آنگاه سری فوریه (۳.۱) به تابع f همگرا است. مجموع آن در هر نقطه، به جز نقطه $x_۰$ که در آن $f(x)$ ناپیوسته است برابر $f(x)$ است و در نقطه $x_۰$ مجموع سری برابر میانگین حدهای چپ و راست*
$f(x)$ در این نقطه است.[۳۵]

در مثال بالا مقدار سری در $x = ۰$ برابر است با:

$$f(۰) = \frac{f(۰^+) + f(۰^-)}{۲} = \frac{k-k}{۲} = ۰.$$

این قضیه شرط کافی برای همگرایی این سری را بیان می‌کند.

تذکر ۱.۱. *تابع $y = g(x)$، زوج است هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$:*

$$g(-x) = g(x).$$

تابع $y = h(x)$، فرد است هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$:

$$h(-x) = -h(x).$$

قضیه ۲.۳.۱. **(سری فوریه توابع زوج و فرد)** سری فوریه تابع زوج f با دوره تناوب $2L$ یک سری فوریه کسینوسی است، یعنی [۳۵]

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x, \tag{۴.۱}$$

که در آن داریم:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, \mathrm{d}x \,,\; a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, \mathrm{d}x \,;\; n = 1, 2, \cdots .$$

سری فوریه تابع فرد f با دوره تناوب $2L$ یک سری فوریه سینوسی است، یعنی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \tag{۵.۱}$$

که در آن داریم:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, \mathrm{d}x \,;\; n = 1, 2, \cdots .$$

مثال ۲.۳.۱. ضرایب فوریه تابع فرد $(f(-x) = -f(x))$

$$f(x) = \begin{cases} x; & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x; & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\,, \end{cases}$$

با دوره تناوب $p = 2\pi$، برابر است با:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_n = 0\,, \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{4}{n^2\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}};\;\; n = 1, 3, \ldots . \end{aligned}$$