

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه  
گوازنک - زنجان



# کاربرد پراش فرنل از اجسام فازی در تعیین فاز

پایان نامه دکتري

رسول عالی پور

استاد راهنما: دکتر محمد تقی توسلی

استاد مشاور: دکتر احمد درودی

شهریور ۱۳۸۹

بنام یگانه هستی

## قدردانی و تشکر

اینجانب صمیمانه به آقای دکتر محمد تقی توسلی به خاطر رهنمودهای بسیار سودمندشان در طول ۸ سال دوره تحصیلی کارشناسی ارشد و دکتری و توجهات دلسوزانه‌اش به زندگی اینجانب تا آخر عمر مدیون هستم. بی‌شک ایشان نقش تعیین کننده‌ای در شکل‌گیری این رساله و چراغ راه علمی برای فردای بنده داشته است. امیدوارم جامعه علمی قدر ایشان را بهتر دانسته و تا سالیان از وجود ایشان بهره‌مند گردد.

می‌توان به جرأت گفت که در ایران کمتر کسی پیدا شده که به اندازه دکتر یوسف ثبوتی به جامعه علمی کشور خدمت کرده باشد. ایشان به عنوان چهره ماندگار فیزیک در ایران دانشگاهی را تاسیس کرد که علاوه بر اینکه جایگاه پژوهش را ارتقا داد، چهره سنتی آموزش در دانشگاههای کشور را دگرگون کرد. من به نوبه خود از تلاش‌های بی‌دریغ ایشان در این راه صمیمانه تشکر می‌کنم.

همچنین مایلم مراتب قدردانی خویش را از تلاش‌های ارزشمند آقای دکتر حمیدرضا خالصی فرد در فراهم آوردن محیطی سالم در آزمایشگاه اپتیک و آقای دکتر حمید عبدالهی معاونت دانشجویی وقت به خاطر مساعدت ایشان در فراهم کردن خوابگاه ابراز نمایم.

در اینجا لازم می‌دانم از آقایان دکتر احمد درودی به خاطر مساعدت در انجام بخشی از کارهای رساله، دکتر سیدنادر سیدریحانی و دکتر سیف‌الله رسولی به خاطر مساعدت‌های علمی و فراهم آوردن تجهیزات آزمایشگاهی تشکر کنم.

در پایان از شکیبایی و همراهی بی‌دریغ همسرم خانم الناز عطایی آذر که در دوره تحصیلی دکتری رنج زندگی دانشجویی و دوری از خانواده‌اش را تحمل کرد و امکان تحصیل راحت‌تر را برای بنده فراهم آورد، خالصانه قدردانی می‌کنم. حَقِّش بر من حلال باد.

## چکیده

در این رساله کاربرد پراش فرنل از پله‌های فازی و برهم‌نهی امواج پراشیده در تعیین فاز به طور نظری و تجربی مطالعه می‌شود. وقتی بخشی از جبهه موج نور به خاطر انعکاس از پله یا عبور از محیط شفاف با تغییر ناگهانی در ضخامت یا ضریب شکست دچار تغییر شدید در فاز شود، پراش فرنل قابل توجه می‌شود. با استفاده از شدت فریزهای نقش پراش فرنل از پله فازی می‌توان ارتفاع پله را اندازه‌گیری کرد. پله‌های فاز با ارتفاع قابل تغییر را با تعدیل تداخل سنج مایکلسون و ماخ-زرنر می‌توان ایجاد کرد. در این حالت ارتفاع پله با تغییر اختلاف راه نوری بین بازوهای تداخل سنج، تغییر می‌کند. همچنین با استفاده از تیغه شفاف می‌توان پله فازی در عبور ساخت که ارتفاع آن با تغییر زاویه نور فرودی تغییر کند. با استفاده از شدت بهنجار فریزهای نقش پراش از پله و همچنین با استفاده از نمایانی فریزهای مرکزی نقش پراش، اختلاف راه حاصل از ارتفاع پله قابل اندازه‌گیری است. بطور مثال با استفاده از پله فازی در عبور تغییر فاز ناشی از مغزی یک تار نوری تعیین شده است. همچنین در این رساله جابه‌جایی ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های مرکزی نقش پراش (فریزهای روشن و تاریک مرکزی) با تغییر ارتفاع پله بطور نظری و تجربی مطالعه شده است.

در قسمت دیگر رساله با برهم‌نهی میدان‌های پراشیده از دو جسم مشابه جهت تضعیف و تقویت نور پراشیده مورد مطالعه قرار گرفته است. این روش در مطالعه ناهمگنی‌ها و ناهمسانگردی‌های کم در محیط‌های شفاف و همچنین در مواردی که پراش از هندسه جسم باعث اختلال در داده‌ها می‌شود، بسیار سودمند است. برای نمایش کارایی این روش با برهم‌نهی موجهای پراشیده از دو سیم مشابه که یکی از آنها داغ بود گرادیان دما در اطراف سیم داغ تعیین شده است. دقت اندازه‌گیری فاز در مطالعه از مرتبه  $\frac{\pi}{200}$  رادیان بوده است.

# فهرست

چهار	چکیده
هشت	مقدمه

## ۱ نظریه پراش

۱	۱.۱ تاریخچه
۴	۲.۱ نظریه فرنل - هویگنس
۵	۳.۱ فرمول پراش فرنل - کیرشهف
۹	۴.۱ فرمول پراش ریلی - سمرفلد
۱۳	۵.۱ تصحیح فرمول پراش برای چشمه‌های خطی
۱۵	۶.۱ پراش فرنل و الگوریتم‌های محاسبه آن
۱۶	۱.۶.۱ پراش فرنل از لبه پرده
۱۹	۲.۶.۱ تبدیل فوریه گسسته ( $DFT$ )
۲۱	۳.۶.۱ محاسبه پراش فرنل با استفاده از روش تبدیل فوریه گسسته

۴.۶.۱ محاسبه پراش فرنل با استفاده از روش تبدیل فوریه کسری (FRT) . . . . . ۲۴

## ۲ پراش فرنل از پله‌های فازی

۲۷	پراش فرنل از اجسام فازی . . . . .	۱.۲
۲۹	محاسبه توزیع شدت پراش از پله فازی یک بعدی در انعکاس . . . . .	۲.۲
۳۵	نقاط فرینه شدت . . . . .	۳.۲
۴۲	پراش فرنل از پله فازی با گوه هوا در انعکاس . . . . .	۴.۲
۴۳	پراش فرنل از پله فازی یک بعدی در عبور . . . . .	۵.۲
۴۴	چیدمان‌های آزمایش و نتایج بدست آمده . . . . .	۶.۲
۵۷	جمع‌بندی و کارهای پیش‌رو . . . . .	۷.۲

## ۳ کاربرد پراش فرنل از پله فازی یک بعدی در تداخل‌سنجی جابه‌جایی فاز

۵۹	روش تعیین فاز . . . . .	۱.۳
۶۱	روش ایجاد پله فازی یک بعدی در عبور برای مطالعه تارنوری . . . . .	۲.۳
۶۳	تعیین نمایه ضریب شکست تارنوری . . . . .	۳.۳
۶۵	روش آزمایش و نتایج بدست آمده . . . . .	۴.۳
۷۲	نتیجه‌گیری . . . . .	۵.۳

## ۴ برهم‌نهی امواج پراشیده

۷۵	.....	۱.۴	اصل باینه
۸۰	.....	۲.۴	برهم نهی امواج پراشیده از یک سیم گرم با سیم سرد مشابه آن
۸۱	.....	۱.۲.۴	روش اندازه‌گیری تغییر فاز
۸۲	.....	۲.۲.۴	محاسبه نمایه دمای پیرامون سیم گرم
۸۴	.....	۳.۲.۴	روش آزمایش و نتایج بدست آمده
۹۱	.....	۴.۲.۴	خطاهای اندازه‌گیری
۹۳	.....	۳.۴	برهم نهی امواج پراشیده از دو شکاف یکسان
۹۶	.....	۴.۴	جمع‌بندی و کارهای پیش رو
۹۸	.....		پیوست
۱۰۳	.....		مراجع

## مقدمه

پدیده متعارف پراش نور وقتی ظاهر می‌شود که قسمتی از یک باریکه نور هم‌دوس توسط مانعی مسدود شود. در این صورت شدت موج انتشار یافته در حوالی مرز مانع و میدان نوری دچار تغییر شدید می‌شود. بعد از ارائه نظریه موجی توسط هویگنس و فرمولبندی نظریه موجی به وسیله فرنل و کیرشهف، این نظریه توانست پدیده‌های مختلف اپتیکی را توصیف کند. بر پایه این نظریه موضوع پراش شامل پراش فرنل (میدان نزدیک) و پراش فرانیهوفر (میدان دور) می‌شود. اخیراً فرمولبندی جامعی با استفاده از تبدیل فوریه کسری صورت گرفته است که پدیده پراش را از ناحیه جسم تا ناحیه دور توصیف می‌کند. پراش فرانیهوفر دارای کاربردهای زیادی در طیف‌سنجی و در توصیف بسیاری از سیستم‌های اپتیکی دارد، اما کاربرد پراش فرنل خیلی محدود است. محدودیت کاربردهای پراش فرنل از غیرخطی بودن فاز و عدم قابلیت در تغییر اختلاف راه نوری ناشی می‌شود. اما اخیراً شکل جدیدی از پراش فرنل ارائه شده که در آن تغییر تند در فاز قسمتی از جبهه موج باعث آن می‌شود. تغییر تند در فاز را به آسانی می‌توان با انعکاس باریکه نور از یک پله یا عبور آن از یک تیغه شفاف با تغییر تند در ضریب شکست یا ضخامت ایجاد کرد. این نوع پراش، پراش فرنل از اجسام فازی نامیده می‌شود و موضوع اصلی بحث در این رساله است.

در فصل اول این رساله نظریه پراش بحث شده است. در فصل دوم پراش فرنل از پله فازی فرمولبندی می‌شود و روش‌های مختلف تعیین ارتفاع پله از روی نقش پراش بررسی می‌گردد. همچنین کارهای تجربی انجام یافته مرتبط با فرمولبندی‌ها می‌آید. در فصل سه از فریزهای نقش پراش فرنل از پله فازی یک بعدی در تداخل‌سنجی جابه‌جایی فاز استفاده شده و نمایه ضریب شکست یک تار نوری تک مد تعیین شده است. در فصل چهارم بحث جدیدی تحت عنوان برهم‌نهی امواج پراشیده معرفی و پتانسیل و کاربردهای آن در تعیین نمایه دما در اطراف یک سیم گرم و مطالعه ناهمگنی در محیط‌های شفاف مطالعه شده است.



# فصل اول

## نظریه پراش

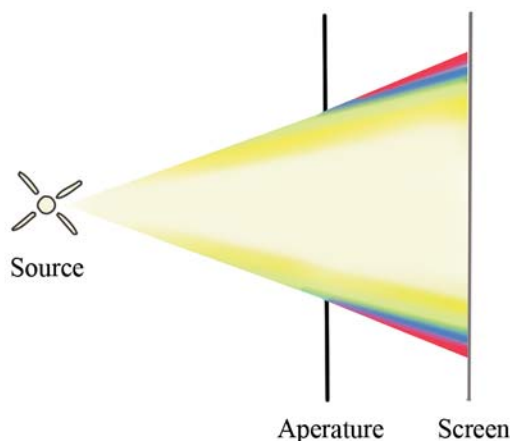
### ۱.۱ تاریخچه

اولین مرجع برای پدیده پراش در کارلئوناردو داوینچی<sup>۱</sup> مشاهده می‌شود. یک چنین پدیده‌ای اولین بار به طور دقیق توسط گریمالدی<sup>۲</sup> در سال ۱۶۶۵ گزارش شده است. چیدمان اندازه‌گیری در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. روزنه کوچکی در پرده‌ای کدر ایجاد شده و توسط چشمه نوری روشن شده است. شدت نور در صفحه‌ای کمی دورتر از پرده مشاهده می‌شود. طبق نظریه انتشار نور در آن زمان سایه پشت پرده می‌باید دارای مرزهای تیزی باشد. مشاهدات گریمالدی نشان داد که عبور از ناحیه روشن به سایه ناگهانی نیست و تدریجی است. اگر از نور با همدوسی بیشتر استفاده می‌کرد، می‌توانست حتی نتایج چشمگیرتری همچون مشاهده فریزهای روشن و تاریک اتفاق می‌افتاد. یک چنین اثراتی با نظریه آن زمان قابل توضیح نبود. طبق آن نظریه در غیاب انعکاس و شکست، نور به مسیر مستقیم حرکت می‌کند. نظریه‌ای که یک چنین اثراتی را توضیح می‌داد توسط کریستین

---

<sup>۱</sup> Leonardo Da Vinci

<sup>۲</sup> Grimaldi



شکل ۱-۱: چیدمان استفاده شده توسط گریمالدی برای مشاهده پراش نور

هویگنس<sup>۳</sup>، در سال ۱۶۷۸ بیان شد. بنابه نظریه هویگنس هر نقطه روی جبهه را می‌توان به صورت چشمه‌های ثانویه در نظر گرفت. جبهه موج در زمانهای بعدی با تشکیل پوش موجک‌های ثانویه ایجاد شده توسط این چشمه‌ها بدست می‌آید. در طول قرن هیجدهم به دلیل تاثیر عمیق نظریه ذره‌ای نور پیشرفتی در زمینه درک بهتر پدیده پراش صورت نگرفت. نظریه ذره‌ای نور توسط دانشمند پرآوازه فیزیک اسحاق نیوتن<sup>۴</sup> ارائه شده بود. در سال ۱۸۰۴ توماس یانگ<sup>۵</sup>، فیزیکدان انگلیسی، به تئوری موجی نور با معرفی تداخل نور قوت بخشید. او ادعا کرد تحت شرایطی نور با نور جمع می‌شود و تاریکی به وجود می‌آورد.

آگوستین فرنل<sup>۶</sup> در سال ۱۸۱۸ در گزارش معروفش نظریه هویگنس و یانگ را باهم تلفیق کرد. فرنل با استفاده از تداخل موجک‌های تولید شده توسط چشمه‌های ثانویه هویگنس قادر شد که توزیع نور در نقش پراش را با دقت خوبی محاسبه کند. مقاله فرنل در کمیته جایزه آکادمی فرانسه توسط ریاضیدان بزرگ فرانسوی، پواسون<sup>۷</sup> به طور جدی مورد بحث قرار گرفت. او نشان داد که نظریه فرنل وجود یک لکه روشن در مرکز سایه یک دیسک کدر را پیش بینی می‌کند. به همین دلیل نظریه او را واهی خواند. آراگو<sup>۸</sup> که رئیس کمیته جایزه بود با ترتیب

<sup>۳</sup> Christian Huygens

<sup>۴</sup> Isaac Newton

<sup>۵</sup> Thomas Young

<sup>۶</sup> Augustin Jean Fresnel

<sup>۷</sup> S. Poisson

<sup>۸</sup> F. Arago

دادن آزمایشی لکه پیش بینی شده را نشان داد. فرنل برنده جایزه شد و از آن زمان این اثر معروف به لکه پواسون شد.

در سال ۱۸۶۰ ماکسول<sup>۹</sup> نشان داد که نور یک موج الکترومغناطیسی است. در سال ۱۸۸۲ نظریه فرنل و هویگنس در یک شکل ریاضی منسجم توسط کیرشهف<sup>۱۰</sup> بیان شد. او نشان داد که دامنه و فاز نسبت داده شده به چشمه های ثانویه توسط فرنل نتیجه منطقی طبیعت موجی نور است. کیرشهف فرمولبندی ریاضی اش را براساس دو فرض به روی مقادیر مرزی نور فرودی به سطح مانعی در مسیر انتشار نور پایه گذاری کرد. بعدها پوانکاره<sup>۱۱</sup> در سال ۱۸۹۲ و سمرفلد<sup>۱۲</sup> در سال ۱۸۹۴ نشان دادند که این دو فرض باهم سازگار نیستند. نتیجه نقدهای آنها منجر به این شد که فرمولبندی کیرشهف می باید به عنوان تقریب اول تلقی شود. هرچند که در بسیاری از موارد نتایج آن به طور شگفت آوری با آزمایش همخوانی داشت. نظریه کیرشهف توسط سمرفلد تغییر کرد. او یکی از فرض های مذکور دامنه نور در مرز را با استفاده از تئوری توابع گرین حذف کرد. این نظریه تحت عنوان نظریه پراش ریلی<sup>۱۳</sup> - سمرفلد نامیده شد. بایستی تأکید شود که نظریه کیرشهف و ریلی - سمرفلد در چندین ویژگی مشترک اند. مهم ترین آنها اینست که با نور بصورت پدیده اسکالر برخورد می کنند. در یک چنین رهیافتی از رابطه مولفه های مختلف میدان های الکتریکی و مغناطیسی در مرزها در قالب معادلات ماکسول چشم پوشی می شود. آزمایشات در ناحیه میکروموج نشان داده که نظریه اسکالر با داشتن دو شرط زیر جواب های دقیقی می دهد:

(۱) روزه پراش دهنده بایستی در مقایسه با طول موج بزرگ باشد.

(۲) میدان های پراشیده نباید در ناحیه خیلی نزدیک روزه مشاهده شوند.

این دو شرط در بسیاری از مسائل صدق می کنند [۱، ۲].

---

James Clerk Maxwell<sup>۹</sup>

Gustav Kirchhoff<sup>۱۰</sup>

Poincare<sup>۱۱</sup>

Sommerfeld<sup>۱۲</sup>

Rayleigh<sup>۱۳</sup>

## ۲.۱ نظریه فرنل – هویگنس

بر اساس تعبیر هویگنس هر نقطه از جبهه موج مرکز اختلال‌های ثانویه‌ای است که موجک‌های کروی تولید می‌کنند. جبهه موج در هر لحظه بعدی توسط پوش این موجک‌ها بدست می‌آید. فرنل با تکمیل تعبیر هویگنس با این فرض که موجک‌های ثانویه می‌توانند تداخل کنند، پراش را حساب کرد. ترکیب تعبیر هویگنس با تداخل، اصل فرنل-هویگنس نامیده می‌شود. برای اینکه اصل فرنل-هویگنس را به انتشار نور اعمال کنیم یک گشودگی<sup>۱۴</sup> به شکل دلخواه در نظر می‌گیریم که آرایه‌ای از چشمه‌های هویگنس آن را پر کرده است. میدان مختلط حاصل از هر یک از چشمه‌های نقطه‌ای هویگنس را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V(r, t) = U(r) e^{-i\omega t}. \quad (۱.۱)$$

در خلا قسمت مکانی دامنه مختلط در معادله موج مستقل از زمان زیر صدق می‌کند.

$$(\nabla^2 + k^2) U = 0. \quad (۲.۱)$$

که در آن  $k = \frac{\omega}{c}$  است. این معادله، معادله موج هلمهولتز<sup>۱۵</sup> نامیده می‌شود. موجک‌هایی که از چشمه‌های نقطه‌ای هویگنس انتشار پیدا می‌کنند، موجک‌های کروی هستند که دامنه آنها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A \frac{e^{-ik \cdot r}}{r}, \quad (۳.۱)$$

که جوابی از معادله موج هلمهولتز است. برای پیاده کردن نظریه فرنل مطابق شکل ۱-۲ دو چشمه هویگنس دلخواه از روزنه‌های<sup>۱۶</sup>  $P_1$  و  $P_2$  به مساحت‌های  $\Delta S_1$  و  $\Delta S_2$  در نظر می‌گیریم. میدان حاصل از برهم‌نهی این دو را در نقطه  $P_0$  حساب می‌کنیم.

$$U(P_0) = A_1 \frac{e^{-ik \cdot R_1}}{R_1} + A_2 \frac{e^{-ik \cdot R_2}}{R_2}. \quad (۴.۱)$$

<sup>۱۴</sup> aperture

<sup>۱۵</sup> Helmholtz

<sup>۱۶</sup> pinhole

در این معادله  $R_1$  و  $R_2$  به ترتیب فاصله روزنه‌های  $P_1$  و  $P_2$  از نقطه  $P_0$  و  $A_1$  و  $A_2$  به ترتیب دامنه نور خارج شده از هر یک از چشمه‌های ثانویه است که به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} A_1 &\propto U_i(r_1) \Delta S_1, \\ A_2 &\propto U_i(r_2) \Delta S_2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

در این رابطه  $U_i$ ها دامنه موج فرودی به هر یک از روزنه‌ها است. با جاگذاری روابط بالا در معادله (۴.۱) خواهیم داشت:

$$U(P_0) = K_1 \frac{U_i(r_1)}{R_1} e^{-ik \cdot R_1} \Delta S_1 + K_2 \frac{U_i(r_2)}{R_2} e^{-ik \cdot R_2} \Delta S_2. \quad (6.1)$$

در این معادله  $K_i$ ها  $i = 1, 2$  ضرایب ثابت که به زاویه  $r_i$  با نرمال المان‌های سطحی  $\Delta S_i$ ، بستگی دارد. حال اگر به جای دو چشمه،  $N$  تا چشمه موجک ثانویه در نظر بگیریم، در این صورت دامنه میدان مختلط از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$U(P_0) = \sum_{j=1}^N K_j \frac{U_i(r_1)}{R_j} e^{-ik \cdot R_j} \Delta S_j. \quad (7.1)$$

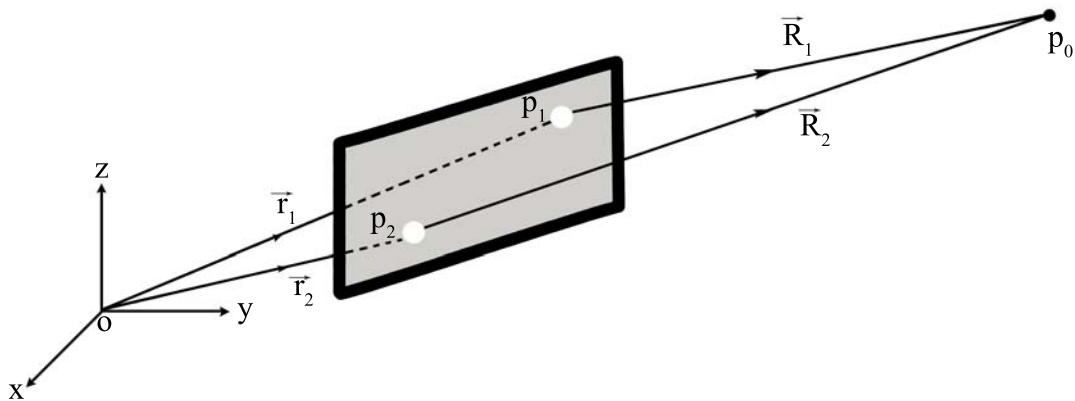
بنابه تعریف، چشمه‌های هویگنس در حقیقت چشمه‌های نقطه‌ای هستند. بنابراین می‌باید  $\Delta S_j \rightarrow 0$  شود. با این کار  $N$  خیلی بزرگ می‌شود. بنابراین علامت جمع در معادله (۷.۱) تبدیل به انتگرال می‌شود:

$$U(P_0) = \int \int_A K(r) \frac{U(r)}{R} e^{-ik \cdot R} ds. \quad (8.1)$$

این معادله، رابطه انتگرال فرنل است [۳].

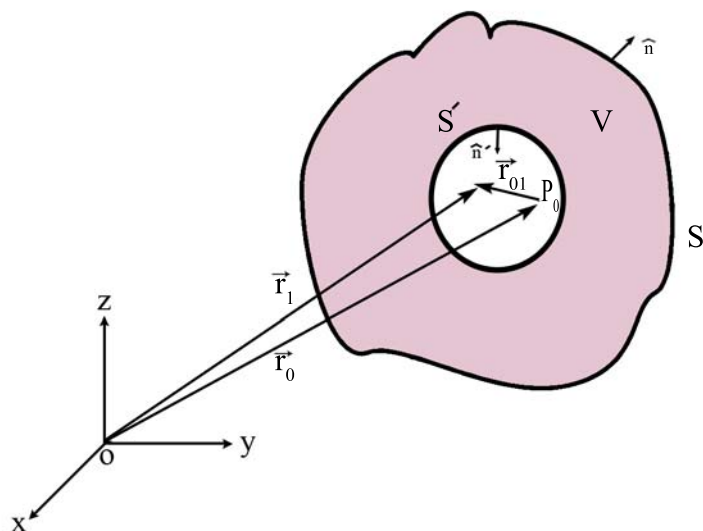
### ۳.۱ فرمول پراش فرنل – کیرشهف

کیرشهف با گسترش نظریه اسکالراز پراش نشان داد که نتایج فرنل و هویگنس شکل تقریبی از یک قضیه انتگرالی است. طبق این قضیه جواب معادله موج همگن در هر نقطه از فضا برحسب مقدار میدان و مشتق اولیه



شکل ۱-۲: هندسه محاسبه‌ی میدان پراشیده براساس اصل هویگنس.

آن روی سطح دلخواه دربرگیرنده آن نقطه بیان می‌شود.



شکل ۱-۳: ناحیه انتگرال‌گیری برای جواب انتگرال پراش کیرشهف.

مطابق شکل ۱-۳ حجم  $V$  را در نظر می‌گیریم که بوسیله سطح بسته  $S$  دربر گرفته شده است. می‌خواهیم میدان را در نقطه  $P_0$  تعیین کنیم. فرض کنید جواب‌های معادله موج همگن،  $U$  و  $G$ ، پیوسته و دارای مشتق اول و دوم بکتا در داخل و روی سطح  $S$  باشند. آنگاه با استفاده از قضیه گرین<sup>۱۷</sup> می‌توان نوشت:

$$\iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV = - \iint_S \left( G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (9.1)$$

<sup>۱۷</sup> Green theorem

از روی معادله موج (۲.۱) طرف اول معادله (۹.۱) صفر می شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int \int_S (G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n}) dS = 0. \quad (۱۰.۱)$$

برای اینکه میدان در نقطه  $P_0$  را تعیین کنیم، یک موج کروی با دامنه واحد، بعنوان تابع گرین، حول نقطه  $P_0$  بسط می دهیم. بنابراین برای این تابع در هر نقطه اختیاری روی سطح  $S$  می توان نوشت:

$$G(P_1) = \frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (۱۱.۱)$$

در این رابطه  $r_{01} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0|$  است. این تابع یک تکینگی برای  $r_1 = r_0$  دارد. از اینرو  $P_0$  را با استفاده از یک کره کوچک به شعاع  $\epsilon$  از ناحیه انتگرال گیری کنار می گذاریم. بنابراین به جای معادله (۹.۱) خواهیم داشت:

$$\int \int_S + \int \int_{S'} (\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}})) dS = 0. \quad (۱۲.۱)$$

در این معادله  $S'$  مساحت سطح کره کوچک که نقطه  $P_0$  را دربر گرفته است. بنابراین با در نظر گرفتن  $r_{01} = \epsilon$  برای عبارت داخل انتگرال روی  $S'$ ، معادله بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

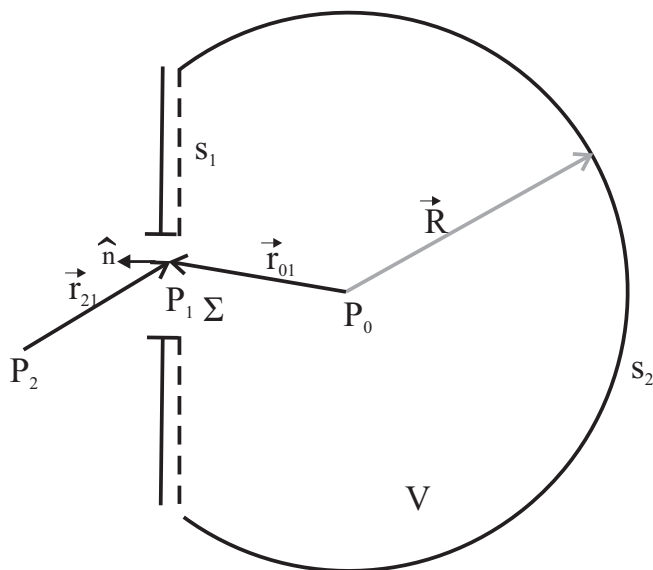
$$\int \int_S (\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}})) dS = \int \int_{S'} (U \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} (ik - \frac{1}{\epsilon}) - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial n}) \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (۱۳.۱)$$

انتگرال طرف دوم معادله بالا در حد  $\epsilon \rightarrow 0$  برابر با  $4\pi U(P_0)$  است. بنابراین میدان در نقطه  $P_0$  به صورت زیر استخراج می شود:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S (\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}})) dS. \quad (۱۴.۱)$$

این رابطه یکی از شکل های قضیه انتگرالی کیرشهف-هلمهولتز است

مطابق شکل ۱-۴ یک چشمه نقطه ای در  $P_2$  موج کروی ایجاد می کند که این موج بروی روزنه ای در صفحه کدر فرود می آید. فرض کنید  $P_0$  نقطه ای است که می خواهیم میدان در آنجا حساب شود. همچنین ابعاد روزنه در مقایسه با طول موج بزرگ ولی در مقایسه با فاصله  $P_0$  و  $P_2$  از صفحه کدر کوچک است. برای اینکار انتگرال کیرشهف را روی سطح بسته  $S$  در نظر می گیریم. این سطح از (۱) روزنه  $\Sigma$ ، (۲)  $s_1$ ، قسمت کناره مسدود



شکل ۱-۴: سطح انتگرال گیری برای محاسبه پراش.  $P_2$  محل چشمه و  $P_0$  نقطه‌ای است که می‌خواهیم میدان در آنجا حساب شود.

از صفحه کدر و  $s_2$  (۳) قسمتی از سطح یک کره بزرگ به شعاع  $R$  و به مرکز  $P_0$  تشکیل شده است. قضیه انتگرالی کیرشهف طبق معادله (۱۴.۱) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \left[ \int \int_{\Sigma} + \int \int_{s_1} + \int \int_{s_2} \right] \left( \frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr_{01}}}{r_{01}} \right) \right) dS. \quad (15.1)$$

مشکل مسئله در این است که مقادیر  $U$  و  $\frac{\partial U}{\partial n}$  روی  $\Sigma$  و  $s_1$  و  $s_2$  را نمی‌توان بطور دقیق تعیین کرد. اما در هر جایی روی  $\Sigma$ ، به استثنای نزدیکی لبه روزنه می‌توان فرض کرد که  $U$  و  $\frac{\partial U}{\partial n}$  با مقادیرشان در غیاب روزنه یکسان و روی  $s_1$  صفر است. بنابراین

روی  $\Sigma$

$$U = U(P_1), \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{P_1},$$

روی  $s_1$

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$



که در این روابط

$$U(P_1) = \frac{Ae^{-ikr_{21}}}{r_{21}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}|_{P_1} = \frac{Ae^{-ikr_{21}}}{r_{21}} \left[ ik - \frac{1}{r_{21}} \right] \cos(\hat{n}, r_{21}). \quad (16.1)$$

تقریب های بکاربرده شده شرایط مرزی کیرشهف نامیده می شود. این شرایط اساس نظریه پراش کیرشهف هستند.

حال اگر در شکل ۱-۴ R به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه مقادیر  $U$  و  $\frac{\partial U}{\partial n}$  روی سطح  $s_2$  تقریباً کوچک می شوند. بنابراین می توان از سهم انتگرال روی  $s_2$  در رابطه (۱۵.۱) چشم پوشی کرد. با جاگذاری معادلات (۱۶.۱) در معادله (۱۵.۱) و با یادآوری اینکه  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  و  $\lambda$  در مقایسه با  $r_{01}$  و  $r_{21}$  کوچک است، می توان از  $\frac{1}{r_{01}}$  و  $\frac{1}{r_{21}}$  در برابر  $k$  صرف نظر کرد. لذا قضیه انتگرالی کیرشهف به صورت زیر نوشته می شود:

$$U(P_0) = \frac{-iA}{2\lambda} \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} [\cos(\hat{n}, r_{01}) - \cos(\hat{n}, r_{21})] dS. \quad (17.1)$$

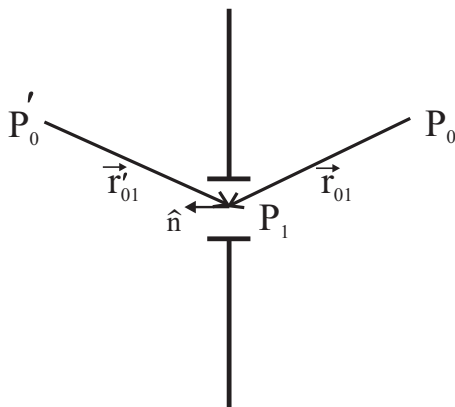
این معادله انتگرال پراش فرنل-کیرشهف نامیده می شود [۳].

## ۴.۱ فرمول پراش ریلی-سمرفلد

بطور تجربی نشان داده اند که نظریه کیرشهف دارای جواب های دقیقی است. با این وجود تناقض های مشخصی در نظریه وجود دارد که منجر به انگیزه ای برای تحقیق بیشتر روی ریاضیات اش شده است. مشکلات نظریه کیرشهف از این حقیقت بر می خیزد که شرایط مرزی هم روی میدان و هم روی مشتق اش اعمال می شود. طبق نظریه پتانسیل ها اگر تابع پتانسیلی و مشتق اش در طول هر المان کوچک از منحنی صفر باشد، آنگاه تابع پتانسیل بایستی روی کل صفحه صفر شود. به طور مشابه اگر جواب معادله موج سه بعدی روی هر المان سطحی صفر باشد آنگاه جواب معادله بایستی روی کل فضا صفر شود. بنابراین دو شرط مرزی کیرشهف دلالت بر این دارند که میدان در هر نقطه پشت روزنه صفر است. نتیجه ای که با شرایط فیزیکی مورد نظر در تناقض است. همچنین وقتی صفحه مشاهده به روزنه خیلی نزدیک می شود همان شرایط مرزی در فرمول بندی فرنل-کیرشهف بدست

نمی آید. خیلی جالب است که نظریه کیرشهف در عمل چنین نتایج دقیقی می دهد.

تناقض های نظریه کیرشهف توسط سمرفلد رفع شد. اولزوم اعمال شرایط همزمان روی میدان و مشتق اش را حذف کرد. سمرفلد فرض کرد که میدان  $G$  به عنوان تابع گرین تنها به دلیل یک چشمه نقطه ای در  $P_0$  نیست،



شکل ۱-۵: هندسه ی پراش ریلی - سمرفلد.

بلکه مطابق شکل ۱-۵ دو چشمه نقطه ای یکی در  $P_0$  و دیگری در  $P'_0$  می توان در نظر گرفت. نقطه  $P'_0$  تصویر آینه ای نقطه  $P_0$  در پشت پرده شامل روزنه است. میدان موج جدید،  $G_-$ ، و مشتق اولیه اش را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$G_- = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}},$$

$$\frac{\partial G_-}{\partial n} = \cos(\hat{n}, r_{01}) \left( ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \cos(\hat{n}, r'_{01}) \left( ik - \frac{1}{r'_{01}} \right) \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}}. \quad (18.1)$$

برای نقطه ای مانند  $P_1$  روی روزنه،  $r_{01} = r'_{01}$  و  $\cos(\hat{n}, r_{01}) = -\cos(\hat{n}, r'_{01})$  است. بنابراین برای میدان و مشتق اش در این نقطه داریم:

$$G_-(P_1) = 0,$$

$$\frac{\partial G_-}{\partial n} \Big|_{P_1} = 2 \cos(\hat{n}, r_{01}) \left( ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}. \quad (19.1)$$

چون  $\lambda \gg r_{01}$  است، بنابراین در رابطه مربوط به مشتق میدان از جمله دوّم در مقابل اولی صرفنظر می‌شود. بنابراین برای این رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial G_-}{\partial n}|_{P_1} = 2ik \cos(\hat{n}, r_{01}) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}. \quad (20.1)$$

حال اگر این شرایط مرزی با شرایط مرزی کیرشهف مقایسه شود می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\partial G_-}{\partial n}|_{P_1} = 2 \frac{\partial G}{\partial n}|_{P_1}. \quad (21.1)$$

با این شرایط مرزی جدید میدان در نقطه  $P_0$  طبق معادله (۱۵.۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_I(P_0) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma} U \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (22.1)$$

مطابق شکل ۱-۴ روزه توسط موج کروی انتشار یافته از چشمه‌ای نقطه‌ای در  $P_2$  روشن می‌شود. از اینرو برای میدان حاصل از آن در روزه می‌توان نوشت:

$$U(P_2) = A \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}}. \quad (23.1)$$

با جاگذاری معادلات (۱۹.۱) و (۲۳.۱) در معادله (۲۲.۱) خواهیم داشت:

$$U_I(P_0) = -\frac{iA}{\lambda} \int \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} \cos(\hat{n}, r_{01}) dS. \quad (24.1)$$

این معادله جواب اول ریلی - سمرفلد نامیده می‌شود.

سمرفلد فرض کرد اگر دو چشمه به طور همفاز نوسان کنند آنگاه بایستی تابع گرین را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$G_+ = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} + \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}}. \quad (25.1)$$

در این حالت شرایط مرزی در  $P_1$  روی روزه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$G_+(P_1)|_{P_1} = 2 \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}},$$

$$\frac{\partial G_+}{\partial n} = 0. \quad (26.1)$$

اگر این معادله با شرایط مرزی کیرشهف مقایسه شود، آنگاه:

$$G_+(P_1) = 2G(P_1). \quad (27.1)$$

برای شرایط مرزی بالا میدان در نقطه  $P_0$  طبق معادله (15.1) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma} G \frac{\partial U}{\partial n} dS \quad (28.1)$$

در نهایت با استفاده از معادلات (19.1)، (23.1) و (25.1) میدان در نقطه  $P_0$  به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$U_{II}(P_0) = \frac{iA}{\lambda} \int \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} \cos(\hat{n}, r_{21}) dS \quad (29.1)$$

این معادله جواب دوم ریلی - سمرفلد نامیده می‌شود.

طبق معادله (29.1) فرمول پراش فرنل - کیرشهف تنها در چیزی که ضریب میل نامیده می‌شود با نظریه ریلی - سمرفلد تفاوت دارد. اگر نتایج بدست آمده از سه رهیافت را مقایسه کنیم می‌توان فرمول انتگرال پراش را در حالت کلی به صورت زیر نوشت:

$$U_I(P_0) = \int \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} K dS. \quad (30.1)$$

در این معادله  $K$  ضریب میل است که مقدارش برای سه حالت نظریه کیرشهف و جواب های اول و دوم سمرفلد به ترتیب به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \frac{-i}{2\lambda} (\cos(\hat{n}, r_{01}) - \cos(\hat{n}, r_{21})), \\ & \frac{-i}{\lambda} \cos(\hat{n}, r_{01}), \\ & \frac{i}{\lambda} \cos(\hat{n}, r_{21}). \end{aligned} \quad (31.1)$$

برای حالت خاص چشمه نقطه‌ای در بی نهایت، موج فرودی به روزه یک موج تخت است. بنابراین روابط بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{-i}{2\lambda} (1 + \cos \theta),$$