دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده‌ی علوم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضی محض – آنالیز

موضوع:

قضایای نقطه‌ی ثابت در فضاهای متریک مخروطی

نگارش:

آریس آقانیانس

استاد راهنما:

دکتر کوروش نوروزی

استاد مشاور:

دکتر هاشم پروانه‌مسیحا

مرداد ۱۳۸۹

تقدیم به

مادر مهربانم که هرچه دارم از اوست،

و

پدر عزیزم که وجودش هستی‌بخش ماست،

و همچنین آنان که با ابزار دانش در راه آسایش و رستگاری انسان می‌کوشند و
به سوی هدفی والا ره می‌سپارند و روز و شب پیوسته در خیال خویش
وظیفه‌ای مشخص دارند با عشقی بزرگ.

اظهارنامه‌ی دانشجو

موضوع پایان‌نامه: قضایای نقطه‌ی ثابت در فضاهای متریک مخروطی

استاد راهنما: دکتر کوروش نوروزی

نام دانشجو: آریس آقانیانس

شماره‌ی دانشجویی: ۸۷۰۴۹۴۴

اینجانب **آریس آقانیانس** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارایه‌شده در پایان‌نامه با عنوان «**قضایای نقطه‌ی ثابت در فضاهای متریک مخروطی**»، با راهنمایی استاد محترم **جناب آقای دکتر کوروش نوروزی**، توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش‌شده مورد تأیید می‌باشد و در موارد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده‌است. به علاوه، گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه، تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ‌جا ارایه نشده‌است و در تدوین متن پایان‌نامه، چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضای دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

. . . و چنانک به نادر افتد که مردمی که نجارت ناآموخته تختی نیک تواند تراشید، به نادر افتد که مردمی منطق ناآموخته علمی مکتسب بر وجهی کامل حاصل تواند کرد. بل، همچنانک بیشتر مردم که نجارت ندانند قادر باشند بر آنک چوبی بتراشند اما واثق نباشند به آنک آن چوب به آن تراشیدن به اصلاح آید یا نیاید، بلک تباه شود، بیشتر مردم که منطق ندانند در معانی تصرفی توانند کرد، اما واثق نباشند به آنک از آن تصرف علمی حاصل شود یا نشود، بلک در حیرت بیفزاید، یا در ضلالت افکند. و نه هرکه کاری کند داند که چه میکند، یا چه میباید کرد، بلک بسیار کسان باشند که در کارها شروع کنند بر سبیل خبط. و همچنین باشد حکم کسانی که طلب علوم کنند و بر صناعت منطق واقف نباشند.

خواجه نصیرالدین طوسی

اکنون که مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می‌رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره مشوق من بوده‌اند، تشکر و قدردانی کنم.

همچنین، از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر کوروش نوروزی که راهنمای اینجانب در دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد بوده‌اند و هدایت این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، و استاد مشاور بزرگوارم، جناب آقای دکتر هاشم پروانه‌مسیحا، کمال تشکر و سپاس را دارم.

در انتها، وظیفه‌ی خود می‌دانم که از حمایت‌های مدیریت محترم تحصیلات تکمیلی دانشکده، همکاری انتشارات دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی و زحمات کلیه‌ی معلمین، دبیران و اساتید خود در مقاطع مختلف تحصیلی، تقدیر و تشکر نمایم.

باشد که گوشه‌ای از زحماتشان را ارج نهاده‌باشم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به مطالعه‌ی مخروط‌ها در فضاهای نرمدار حقیقی پرداخته و مخروط‌های منظم و نرمال و ارتباط بین آن‌ها را بیان می‌کنیم. سپس در فصل دوم، فضاهای متریک مخروطی را بررسی کرده و در پایان، در فصل سوم، قضایای نقطه‌ی ثابت و نقطه‌ی ثابت مشترک نگاشت‌های انقباضی و شبه‌انقباضی و زوج‌های AJ را در این فضاها ارایه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: مخروط؛ فضای متریک مخروطی؛ برخورد؛ نقطه‌ی ثابت مشترک؛ به طور ضعیف سازگار؛ زوج AJ؛ دنباله‌ی جانک؛ نقطه‌ی ثابت؛ نگاشت انقباضی؛ نگاشت شبه‌انقباضی؛ به طور ضعیف صعودی.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

در بسیاری از موارد، استفاده از ریاضیات به معنای حل معادله می‌باشد. با این هدف، مهم‌ترین مسأله‌ای که باید مورد توجه قرار گیرد آن است که آیا معادله‌ی مورد نظر جواب دارد یا خیر؟ برای مثال قضیه‌ی بولتزانو[۱] وجود حداقل یک ریشه را برای توابع پیوسته‌ای که روی یک بازه تعریف شده و در دو انتهای بازه مقادیر مختلف‌العلامه‌ای را اختیار می‌کنند، ایجاب می‌کند.

امروزه، آنالیز غیرخطی و آنالیز غیرمحدب کاربردهای بسیاری در ریاضیات کاربردی پیدا کرده‌اند. به عنوان مثال در نظریه‌ی بهینه‌سازی، از مخروط‌ها در فضاهای نرمدار که یک رابطه‌ی ترتیب جزیی روی آن القا می‌کنند، استفاده می‌شود [۵].

در سال ۱۹۸۰، آرزِپکی[۲] [۳۲] یک متر تعمیم‌یافته روی مجموعه‌ای ناتهی تعریف کرد که مقادیر آن اعضایی از یک فضای باناخ مرتب با مخروطی نرمال بودند. هفت سال بعد، لین[۳] [۲۲] به بررسی $K-$متریک‌ها پرداخت و سرانجام در سال ۲۰۰۷، هوانگ[۴] و ژانگ[۵] [۱۳]، بدون توجه به کارهای آرزِپکی و لین، با جای‌گزینی یک فضای باناخ مرتب به جای مجموعه‌ی اعداد حقیقی (به عنوان هم‌دامنه‌ی متر) فضاهای متریک مخروطی را معرفی کردند که مشابه $K-$متریک‌ها تعریف می‌شد. آن‌ها به علاوه، به مفاهیم همگرایی، خاصیت کوشی و تام بودن این فضاها پرداخته و چند قضیه‌ی

---

[۱] Bolzano
[۲] Rzepecki
[۳] Lin
[۴] Huang
[۵] Zhang

نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت‌های انقباضی اثبات کردند. یک سال بعد، رضاپور[۶] و حَمل‌بَرانی[۷] [۲۵]، [۲۸] توپولوژی این فضاها را مطالعه کرده و با حذف شرط نرمال بودن مخروط که هوانگ و ژانگ از آن استفاده کرده‌بودند، قضایای آن‌ها را تعمیم دادند. بعد از آن بود که محققین و نویسندگان بسیاری از جمله جانک[۸] و همکارانش [۱۷] قضایای متعددی را برای نقطه‌ی ثابت و نقطه‌ی ثابت مشترک در فضاهای متریک مخروطی ارایه دادند. آلتون[۹]، دامیانوویچ[۱۰] و جوریچ[۱۱] [۳]، و همچنین کادِلبِرگ[۱۲]، پاولوویچ[۱۳] و رادِنوویچ[۱۴] [۱۸] از جمله کسانی بودند که این قضایا را در فضاهای متریک مخروطی مرتب جزیی مورد مطالعه قرار دادند.

مهم‌ترین هدف این پایان‌نامه که مطالب اصلی آن از [۳]، [۸]، [۹]، [۱۳]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۵]، [۲۸] و [۳۵] استخراج گردیده‌است، گردآوری و مرتب نمودن این قضایا و ارایه‌ی مثال‌های گوناگون برای آن‌ها می‌باشد.

شایان ذکر است که شماره‌هایی که در مقابل تعاریف، قضایا و ... و همچنین در متن پایان‌نامه داخل قلاب آورده شده‌اند، شماره‌ی مراجعی هستند که کل یا قسمتی از این مطالب از آن‌ها برداشت شده‌است و ممکن است آن مراجع برای اولین بار مطلب مورد نظر را ذکر نکرده‌باشند.

به هر حال، با وجود این که سعی زیادی به عمل آمده‌است تا این پایان‌نامه از هر حیث بدون اشکال باشد، ولی یقیناً این‌طور نیست. اما هر چه که هست آن را در طَبَق اخلاص گذاشته و به محققین و دوستداران ریاضی محض تقدیم می‌نمایم.

آریس آقانیانس
دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تهران، مرداد ۱۳۸۹

---

[۶] Rezapour
[۷] Hamlbarani
[۸] Jungck
[۹] Altun
[۱۰] Damjanović
[۱۱] Djorić
[۱۲] Kadelburg
[۱۳] Pavlović
[۱۴] Radenović

فصل ۱

مخروطها در فضاهای نرمدار

از نظر هندسه‌ی اقلیدسی، مخروط جسمی فضایی است که از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه‌ی قائمه‌اش به دست می‌آید. با استفاده از این شهود و به کمک مفاهیم جبری و توپولوژیکی، مخروطها در فضاهای نرمدار حقیقی و نابدیهی قابل تعریف هستند. یک مخروط از این حیث اهمیت دارد که قادر است یک رابطه‌ی ترتیب جزیی روی فضاهای نرمدار القا کند. بدین ترتیب، بسیاری از ویژگی‌های مربوط به ترتیب‌ها در اعداد حقیقی، به ویژه خاصیت ارشمیدسی را می‌توان به فضاهای نرمدار تعمیم داد.

در این فصل، به معرفی مخروطها و بررسی انواع آن‌ها پرداخته و ویژگی‌های رابطه‌ی ترتیب جزیی مذکور را که در فصل‌های آتی کاربردهای بسیاری دارند، بیان می‌کنیم.

۱.۱ معرفی مخروطها

در این بخش، مخروطها را با ارایه‌ی چندین مثال ساده و ملموس معرفی کرده و ویژگی‌های رابطه‌ی ترتیب جزیی‌ای را که روی فضا القا می‌کنند، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱ [۱۳] فرض کنید E یک فضای نرمدار حقیقی و نابدیهی باشد. $P \subseteq E$ را یک مخروط در E می‌نامیم، هرگاه،

(C۱) P ناتهی و بسته بوده و $P \neq \{\circ\}$؛

(C۲) به ازای هر دو اسکالر $a, b \geq \circ$ و هر $x, y \in P$ داشته‌باشیم $ax + by \in P$؛

(C۳) $P \cap (-P) = \{\circ\}$.

به آسانی می‌توان نشان داد که P در (C۲) صدق می‌کند، اگر و فقط اگر مجموعه‌ای محدب بوده و تحت عمل ضرب در اسکالر نامنفی بسته باشد.

برای مخروط P در فضای نرمدار حقیقی و نابدیهی E، رابطه‌ی $\leq$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\forall x, y \in E: \; x \leq y \; \Leftrightarrow \; y - x \in P.$$

چون $\leq$ خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدی را دارا می‌باشد، پس یک ترتیب جزیی روی E تعریف و آن را به یک مجموعه‌ی مرتب جزیی تبدیل می‌کند. $\leq$ را رابطه‌ی ترتیب جزیی القاشده توسط P روی E می‌نامیم. همچنین، نماد $x < y$ را برای $x \leq y$ با $x \neq y$، و نماد $x \ll y$ را برای $y - x \in P^\circ$ به کار می‌بریم که در آن منظور از P°، درون مخروط P می‌باشد. به علاوه، چون عبارات $\circ \leq x$ و $x \in P$ معادل‌اند، اعضای مخروط P را عناصر مثبت E نیز می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ [۳۵] رابطه‌ی ترتیب جزیی $\leq$ روی فضای برداری X، ارشمیدسی خوانده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$، اگر $nx \leq y$ برای $n = ۱, ۲, \ldots$، آن‌گاه $x \leq \circ$.

با توجه به تعریف رابطه‌ی ترتیب جزیی القاشده توسط P روی E، از $nx \leq y$ بلافاصله مثبت بودن جملات $\{\frac{y}{n} - x\}$ نتیجه می‌شود و چون P بسته است، حد این دنباله؛ یعنی $-x$ نیز مثبت می‌باشد. بنابراین $x \leq \circ$ و از این رو رابطه‌ی ترتیب جزیی القاشده توسط P روی E ارشمیدسی است.

در سرتاسر این پایان‌نامه، E یک فضای نرمدار حقیقی و نابدیهی، P یک مخروط در E و $\leq$ رابطه‌ی ترتیب جزیی القاشده توسط P روی E است، مگر آن که خلاف آن صراحتاً ذکر گردد.

مثال ۳.۱.۱ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی، شعاع‌های $[\circ, +\infty)$ و $(-\infty, \circ]$ دو مخروط را مشخص می‌کنند.

مثال ۴.۱.۱ به ازای هر $n \geq ۱$، مجموعه‌ی $P = \{(x_۱, \ldots, x_n) \mid x_۱, \ldots, x_n \geq ۰\}$ یک مخروط را در $E = \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کند.

مخروط P در مثال ۴.۱.۱ را می‌توان به شکل $P = \prod_{i=۱}^{n} [۰, +\infty)$ نیز نمایش داد. این ایده به حالات کلی‌تری می‌تواند تعمیم پیدا کند که در این باره در بخش ۳.۱ به تفصیل صحبت خواهیم کرد.

مثال ۵.۱.۱ فرض کنید $E = \mathbb{R}^n$. برای $r = ۱, ۲, \ldots, n$ قرار دهید،

$$P_r = \Big\{(x_۱, \ldots, x_n) \;\Big|\; x_۱ = \cdots = x_{r-۱} = x_{r+۱} = \cdots = x_n = ۰,\ x_r \geq ۰\Big\}.$$

در این صورت به ازای هر r، P_r یک مخروط را در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کند.

مثال‌های ۴.۱.۱ و ۵.۱.۱ نشان می‌دهند که در یک فضا می‌توان مخروط‌های متعددی را تعریف کرد و بالطبع هرکدام از آن‌ها یک رابطه‌ی ترتیب جزیی خاص را روی فضا القا می‌کنند.

مثال ۶.۱.۱ فرض کنید $\{P_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای ناتهی از مخروط‌های E باشد. در این صورت واضح است که $\bigcap_{i\in I} P_i$ یک مخروط در E است، اگر و فقط اگر $\bigcap_{i\in I} P_i \neq \{۰\}$.

مثال ۷.۱.۱ فرض کنید x عضوی ناصفر در E باشد. در این صورت مجموعه‌ی $P = \{ax \mid a \geq ۰\}$ یک مخروط در E است.

مثال ۷.۱.۱ نشان می‌دهد که هر فضای نرمدار حقیقی و نابدیهی E را می‌توان به وسیله‌ی یک مخروط مرتب کرد.

مثال ۸.۱.۱ [۱۱] به ازای هر $n \geq ۱$ فضای $E = M_n(\mathbb{R})$ را با نرم

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=۱} \|Ax\| \qquad (A \in E),$$

در نظر بگیرید. ماتریس $A \in E$ را معین مثبت می‌نامیم، هرگاه به ازای هر بردار با مؤلفه‌های حقیقی مانند x، داشته‌باشیم $x^T Ax \geq 0$. به روشنی دیده می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های معین مثبت متقارن، یک مخروط در E است.

مثال ۹.۱.۱ [۲۸] فرض کنید $E = C[0, 1]$[1]. در این صورت E با نرم سوپریمم که به شکل

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \qquad (f \in E),$$

تعریف می‌شود، یک فضای باناخ حقیقی و $P = \{f \in E \mid f \geq 0\}$ یک مخروط در این فضا می‌باشد.

مثال ۱۰.۱.۱ [۱۹] فضای $E = C^1[0, 1]$ را با نرم $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ در نظر بگیرید. در این صورت $P = \{f \in E \mid f \geq 0\}$ یک مخروط در این فضا می‌باشد. به طور کلی، در فضای $E = C^r[0, 1]$ $(r \geq 1)$ با نرم $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(r)}\|_\infty$، مجموعه‌ی $P = \{f \in E \mid f \geq 0\}$ یک مخروط را تعریف می‌کند.

مثال ۱۱.۱.۱ [۱۲] فرض کنید $E = \mathcal{L}^p[0, 1]$ که $1 \leq p < \infty$. در این صورت $P = \{f \in E \mid f \geq 0 \text{ a.e.}\}$ یک مخروط را در این فضا تعریف می‌کند.

مثال ۱۲.۱.۱ [۱۲] در $E = \ell^p$ که $1 \leq p \leq \infty$، $P = \{\{x_n\} \mid \forall n \geq 1 : \ x_n \geq 0\}$ یک مخروط می‌باشد.

---

[1] در متن این پایان‌نامه، نمادهای $C[0, 1]$، $C^r[0, 1]$ $(r \geq 1)$ و $\mathcal{L}^p[0, 1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ برای توابع حقیقی و نماد ℓ^p $(1 \leq p \leq \infty)$ برای دنباله‌های حقیقی به کار می‌رود.

مثال ۱۳.۱.۱ [۳٦] فرض کنید Ω یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و $M(\Omega)$ خانواده‌ای ناتهی از اندازه‌های (حقیقی و نامنفی) بُرل منظم روی Ω باشد. به ازای هر $\mu \in M(\Omega)$، $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ را فضای برداری همه‌ی توابع حقیقی اندازه‌پذیر بُرل و اساساً کران‌دار روی Ω در نظر بگیرید و نرم اساسی را روی این فضا به شکل زیر تعریف کنید:

$$\|f\|_{\mu,\infty} = \inf_{\mu(N)=0} \sup_{t\notin N} |f(t)| = \inf\Big\{c \geq 0 \;\Big|\; |f| \leq c \;\; \mu - \text{a.e.}\Big\},$$

که در آن $f \in \mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ و $\mu \in M(\Omega)$. تابع

$$f = (f_\mu)_{\mu\in M(\Omega)} : \Omega \to \prod_{\mu\in M(\Omega)} \mathbb{R}$$

را یک تابع تعمیم‌یافته روی Ω می‌نامیم، هرگاه،

(GF۱) $\sup_{\mu\in M(\Omega)} \|f_\mu\|_{\mu,\infty} < \infty$؛

(GF۲) برای هر $\mu,\nu \in M(\Omega)$ که $\mu \ll \nu$، داشته‌باشیم $f_\mu = f_\nu \;\; \mu - \text{a.e.}$.

(نماد $\mu \ll \nu$ به این معناست که اگر $E \in \mathcal{B}_X$ و $\nu(E) = 0$، آن‌گاه $\mu(E) = 0$. در این حالت گوییم μ نسبت به ν به طور مطلق پیوسته است.)

مجموعه‌ی همه‌ی توابع تعمیم‌یافته روی Ω را با $\mathcal{GL}(\Omega)$ نشان می‌دهیم. این مجموعه با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌وار به یک فضای برداری حقیقی تبدیل شده و

$$\|f\| = \sup_{\mu\in M(\Omega)} \|f_\mu\|_{\mu,\infty} \qquad (f = (f_\mu)_{\mu\in M(\Omega)} \in \mathcal{GL}(\Omega)),$$

یک نرم روی آن تعریف می‌کند. تابع تعمیم‌یافته‌ی $f = (f_\mu)_{\mu\in M(\Omega)}$ را نامنفی گوییم، هرگاه به ازای هر $\mu \in M(\Omega)$، $f_\mu \geq 0 \;\; \mu - \text{a.e.}$. مجموعه‌ی همه‌ی توابع تعمیم‌یافته‌ی نامنفی روی Ω یک مخروط در $\mathcal{GL}(\Omega)$ می‌باشد.

پس از ارایه‌ی مثال‌های گوناگون، ویژگی‌های رابطه‌ی ترتیب جزیی القاشده توسط P روی E را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۱۴.۱.۱ [۲۸] برای هر مخروط P گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) $P + P^\circ \subseteq P^\circ$.

(۲) $P^\circ + P^\circ \subseteq P^\circ$.

(۳) به ازای هر $a > 0$، $aP^\circ \subseteq P^\circ$.

برهان. (۱) فرض کنید $c \in P^\circ$ و $x \in P$. در این صورت $r > 0$ وجود دارد به طوری که $N_r(c) \subseteq P$. اگر $y \in N_r(c+x)$، آن‌گاه از این که $\|y-(c+x)\| < r$، داریم $y - x \in P$. بنابراین طبق (C۲)، $y \in P$. از این رو $c + x \in P^\circ$.

(۲) بنابر (۱) بدیهی است.

(۳) فرض کنید $c \in P^\circ$. در این صورت $r > 0$ وجود دارد به طوری که $N_r(c) \subseteq P$. اگر $y \in N_{ar}(ac)$، آن‌گاه $\|y - ac\| < ar$ و لذا $a^{-1}y \in P$. چون $a > 0$، طبق (C۲) $y = aa^{-1}y \in P$.
از این رو $ac \in P^\circ$. ○

لم ۱۵.۱.۱ [۱۹]، [۲۸] فرض کنید $P^\circ \neq \emptyset$ و $x, y \in E$. در این صورت،

(۱) اگر به ازای هر $c \in P^\circ$ داشته‌باشیم $0 \leq x \ll c$، آن‌گاه $x = 0$.

(۲) اگر به ازای هر $c \in P^\circ$ داشته‌باشیم $x \leq y + c$، آن‌گاه $x \leq y$.

برهان. (۱) چون $P^\circ \neq \emptyset$، پس می‌توان $c \in E$ را با شرط $c \gg 0$ پیدا کرد. بنابر لم ۱۴.۱.۱ به ازای هر $n \geq 1$، $\frac{c}{n} \in P^\circ$. از طرفی طبق فرض، به ازای هر $n \geq 1$، $\frac{c}{n} - x \in P^\circ \subseteq P$. چون P بسته است، پس $-x = \lim_{n\to\infty}(\frac{c}{n} - x) \in P$ و چون x مثبت است، (C۳) نتیجه می‌دهد که $x = 0$.

(۲) به ازای c پیداشده در برهان قسمت (۱) و طبق فرض، برای هر $n \geq 1$، $\frac{c}{n} + y - x \in P$. چون P بسته است،

$$y - x = \lim_{n\to\infty}(\frac{c}{n} + y - x) \in P.$$

در نتیجه $x \leq y$. ○

لم ۱۶.۱.۱ [۱۹]، [۳۷] فرض کنید $x, y, z, u \in E$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر $x \leq y$ و $y \ll z$، آن‌گاه $x \ll z$.

(۲) اگر $x \ll y$ و $y \ll z$، آن‌گاه $x \ll z$.

(۳) اگر $x \leq y$ و $y < z$، آن‌گاه $x < z$.

(۴) اگر $x \leq y$ و $z \leq u$، آن‌گاه $x + z \leq y + u$.

(۵) اگر $x \ll y$ و $z \ll u$، آن‌گاه $x + z \ll y + u$.

برهان. (۱) طبق فرض $y - x \in P$ و $z - y \in P^\circ$. پس $r > \circ$ وجود دارد به طوری که $N_r(z-y) \subseteq P$. نشان می‌دهیم $N_r(z-x) \subseteq P$. فرض کنید $v \in N_r(z-x)$. در این صورت v را می‌توان به شکل

$$v = (y - x) + (v - (y - x))$$

نوشت. به روشنی دیده می‌شود که $v - (y - x) \in N_r(z - y) \subseteq P$. چون $y - x \in P$، طبق (C۲) $v \in P$. بنابراین $z - x \in P^\circ$، یا به طور معادل، $x \ll z$.

(۲) بنابر قسمت (۱) بدیهی است.

(۳) چون $\leq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزیی است، پس $x \leq z$. حال اگر $x = z$، آن‌گاه $x \leq y \leq x$ که نشان می‌دهد $x = y = z$ و این غیرممکن است. بنابراین $x < z$.

(۴) طبق فرض $y - x, u - z \in P$ و لذا مجموع آن‌ها؛ یعنی، $y + u - (x + z)$ نیز عضوی از P می‌باشد. بنابراین $x + z \leq y + u$.

(۵) طبق لم ۱۴.۱.۱ P° نسبت به عمل جمع بسته است. چون $y - x, u - z \in P^\circ$، پس $y + u - (x + z) \in P^\circ$. بنابراین $x + z \ll y + u$. ○

لم ۱۷.۱.۱ [۱۹]، [۳۷] فرض کنید $x, y \in E$ و $a \in \mathbb{R}$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر $x \in P$، $a \in [\circ, ۱)$ و $x \leq ax$، آن‌گاه $x = \circ$.

(۲) اگر $x \leq y$ و $a \geq \circ$، آن‌گاه $ax \leq ay$.

(۳) اگر $x \leq y$ و $a \leq \circ$، آن‌گاه $ay \leq ax$.

(۴) اگر $x \ll y$ و $a > \circ$، آن‌گاه $ax \ll ay$.

(۵) اگر $x \ll y$ و $a < \circ$، آن‌گاه $ay \ll ax$.

برهان. (۱) چون $x \leq ax$، پس $(a-1)x \in P$ و از آن جایی که $a < 1$، $-x = \frac{1}{1-a}(a-1)x \in P$.
بنابراین طبق (C3)، $x = 0$.

(۲) چون $y - x \in P$ و $a \geq 0$، پس $ay - ax \in P$. لذا $ax \leq ay$.

(۳) از این که $a < 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $-a > 0$. پس طبق قسمت (۲)، $-ax \leq -ay$.
بنابراین $-ay + ax \in P$، یا به طور معادل، $ay \leq ax$.

(۴) طبق لم ۱۴.۱.۱ P° تحت عمل ضرب در اسکالر مثبت بسته است. بنابراین مشابه قسمت (۲)، حکم ثابت می‌شود.

(۵) با توجه به قسمت (۴) و با استدلالی مشابه قسمت (۳) حکم نتیجه می‌شود. ○

تبصره‌ی ۱۸.۱.۱ مشابه برهان قسمت‌های (۲) و (۴) لم ۱۷.۱.۱ می‌توان نشان داد که اگر $a, b \in \mathbb{R}$، $a < b$ و $x \in E$، آن‌گاه $0 \leq x$ و $0 \ll x$ به ترتیب $ax \leq bx$ و $ax \ll bx$ را نتیجه می‌دهند.

لم ۱۹.۱.۱ (خاصیت ارشمیدسی) [۲۵]، [۳۴] اگر $c \in P^\circ - \{0\}$ و $x \in E$، آن‌گاه عدد صحیح مثبت n وجود دارد به طوری که $x \ll nc$.

برهان. چون $c \in P^\circ$، پس $r > 0$ وجود دارد به طوری که $N_r(c) \subseteq P$ و چون هر همسایگی باز است، $N_r(c) \subseteq P^\circ$. بنابراین $c + N_r(0) \subseteq P^\circ$. از طرفی، می‌توان عدد صحیح مثبت n را طوری یافت که x و در نتیجه $-x$ عضوی از $nN_r(0)$ باشند. از این رو $nc - x \in nP^\circ \subseteq P^\circ$، یا به طور معادل، $x \ll nc$. ○

تعریف ۲۰.۱.۱ [۳۱] مجموعه‌ی مرتب جزیی X را جهت‌دار گوییم، هرگاه به ازای هر $a, b \in X$، $c \in X$ وجود داشته‌باشد به طوری که $a \leq c$ و $b \leq c$. به عبارت دیگر، X جهت‌دار است، هرگاه هر دو عضو آن یک کران بالا داشته‌باشند.

لم ۱۹.۱.۱ نشان می‌دهد که $\leq$ درون هر مخروط P را به مجموعه‌ای جهت‌دار تبدیل می‌کند.

گزاره‌ی ۲۱.۱.۱ [۱۹] فرض کنید $x,y \in E$ و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در E باشند به طوری که $x_n \to x$ و $y_n \to y$. در این صورت،

(۱) اگر برای هر $n \geq ۱$، $x_n \leq y_n$، آن‌گاه $x \leq y$.

(۲) اگر $\{x_n\} \subseteq P$ و $x = ۰$، آن‌گاه برای هر $c \in P^\circ - \{۰\}$ عدد صحیح $N > ۰$ وجود دارد به طوری که رابطه‌ی $x_n \ll c$ به ازای هر $n \geq N$ برقرار است.

برهان. (۱) طبق فرض $\{y_n - x_n\}$ دنباله‌ای در P است و چون P بسته است، پس حد آن؛ یعنی $y - x$، عضوی از P می‌باشد. بنابراین $x \leq y$.

(۲) فرض کنید $x = ۰$ و $c \in P^\circ - \{۰\}$ را داده‌باشند. $r > ۰$ را طوری اختیار کنید که $N_r(c) \subseteq P$. در این صورت طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\|c\| < m \cdot \frac{r}{۳}$. از طرفی، چون $x_n \to ۰$، پس عدد صحیح مثبتی مانند N هست به طوری که

$$\|x_n\| < \frac{۱}{m} \cdot \|c\| < \frac{r}{۳} \qquad (n \geq N).$$

نشان می‌دهیم به ازای هر $n \geq N$، $N_{\frac{r}{۳}}(c - x_n) \subseteq P$. فرض کنید $n \geq N$ و $z \in N_{\frac{r}{۳}}(c - x_n)$. در این صورت،

$$\|z - x_n - c\| \leq \|z - (c - x_n)\| + ۲\|x_n\| < \frac{r}{۳} + \frac{۲r}{۳} = r.$$

پس $z - x_n \in P$ و چون $x_n \in P$، در نتیجه $z \in P$. بنابراین برای هر $n \geq N$، $c - x_n \in P^\circ$، یا به طور معادل، $x_n \ll c$. ○

این بخش را با معرفی مخروط‌های صلب به پایان می‌بریم. برای این منظور، ابتدا به گزاره‌ی زیر که منشأ این تعریف است، می‌پردازیم.

گزاره‌ی ۲۲.۱.۱ صفر یک نقطه‌ی درونی مخروط P است، اگر و فقط اگر یک نقطه‌ی تنهای آن باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید $۰ \in P^\circ$. در این صورت $r > ۰$ وجود دارد به طوری که $N_r(۰) \subseteq P$. اگر $y \in N_r(۰)$، آن‌گاه به روشنی دیده می‌شود که $y, -y \in P$. پس طبق (C۳)، $y = ۰$. این نشان

می‌دهد که صفر نمی‌تواند یک نقطه‌ی حدی P باشد و چون $\circ \in P$، پس یک نقطه‌ی تنهای آن است.

($\Rightarrow$) به عکس، اگر صفر نقطه‌ی تنهای P باشد، آن‌گاه صفر یک همسایگی دارد که فقط خودش را در بر می‌گیرد. بنابراین صفر یک نقطه‌ی درونی P می‌باشد. ○

تعریف ۲۳.۱.۱ [۳] مخروط P را صلب گوییم، هرگاه $P^\circ \neq \emptyset$.

مثال ۲۴.۱.۱ فرض کنید $n \geq ۲$ و برای $r = ۲, ۳, \ldots, n$، مخروط P_r مثال ۵.۱.۱ را در نظر بگیرید. در این صورت، به ازای $X = (\circ, \ldots, \circ, x, \circ, \ldots, \circ) \in P_r$، که x در مکان rام قرار دارد و $\varepsilon > \circ$ داده‌شده،

$$Y = (\frac{\varepsilon}{۲}, \circ, \ldots, \circ, \underbrace{x + \frac{\varepsilon}{۲}}_{r\text{ام}}, \circ, \ldots, \circ)$$

برداری در P_r^c است که در همسایگی به مرکز X و شعاع ε قرار دارد. بنابراین $P_r^\circ = \emptyset$. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که $P_۱^\circ = \emptyset$.

مثال ۲۴.۱.۱ نشان می‌دهد بر خلاف شهود اولیه، مخروط‌هایی نیز وجود دارند که صلب نمی‌باشند. در حالی که مخروط‌های سایر مثال‌ها صلب هستند.

دربخش‌های بعدی این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم که P یک مخروط صلب است و $\circ \notin P^\circ$.

۲.۱ مخروط‌های منظم و نرمال

در این بخش، با مخروط‌های منظم و نرمال آشنا شده و خواص پایه‌ای آن‌ها را بررسی می‌کنیم. به علاوه، نشان می‌دهیم که اگر E باناخ باشد، آن‌گاه هر مخروط منظم، نرمال است.