بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

قضایای مینیمم سازی و قضایای نقطه ثابت در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک

اساتید راهنما

دکتر محمد باقر مقیمی

دکتر بهرام فرهادی نیا

استاد مشاور

دکتر عباس نجاتی

توسط

نسیم کیانپور

دانشگاه محقق اردبیلی

زمستان ۱۳۸۹

تقدیم به

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه‌ی ایثار و از خود گذشتگان.

به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب و روح بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید.

این پایان نامه را به **روح پاک پدرم** و امید زندگیم **مادر مهربانم** تقدیم می کنم.

قدردانی

سپاس خداوند منان، هستی بخش همه‌ی آفاق و انفس، که به ما آموختن آموخت و سپاس بی کران پروردگاری را که توفیق پیشرفت و تعالی را به بندگانش ارزانی کرد.

شایسته است از زحمات استاد محترم و بزرگوار دکتر محمدباقر مقیمی که باغ فکر و اندیشه‌ی خود را بر دنیای من گشودند و افق بی کران تفکر را در کهکشان های لایتناهی علم برای من صادقانه و مخلصانه نشان دادند و هدایتم کردند که هم اندیشه و هم اندیشیدن را فرا گیرم، صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

هم چنین از زحمات ارزنده اساتید معزز، جناب آقای دکتر بهرام فرهادی نیا و جناب آقای دکتر عباس نجاتی که همواره با راهنمایی های ارزشمندشان مرا یاری نمودند، کمال تشکر و سپاس را دارم.

در پایان تشکر و قدردانی فراوان خدمت مادر مهربانم به خاطر تمامی زحماتی که در دوران پرفراز و نشیب زندگی ام متحمل شدند و نیز از همسر عزیزم که در تمامی این ایام یاریم نمود.

خدایا عاقبت به خیری و عافیت و طول عمر را برای تمامی کسانی که مرا در پیشبرد این پایان نامه یاری نمودند از درگاهت خواستارم.

نسیم کیانپور

بهمن ۱۳۸۹

نام خانوادگی: **کیانپور** نام: **نسیم**
عنوان پایان‌نامه: **قضایای مینیمم سازی و قضایای نقطه ثابت در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک**
اساتید راهنما: **دکتر محمد باقر مقیمی، دکتر بهرام فرهادی نیا**
استاد مشاور: **دکتر عباس نجاتی**
مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد** رشته: **ریاضی محض** گرایش: **آنالیز** دانشگاه: **محقق اردبیلی** دانشکده: **علوم پایه** تاریخ فارغ التحصیلی: **۱۳۸۹/۱۱/۲۳** تعداد صفحه: **۷۰**
کلید واژه‌ها: نقطه ثابت، نقطه انطباق، مینیمم سازی، فازی، فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک.
چکیده: دراین پایان نامه قضایای مینیمم سازی و قضایای نقطه ثابت را در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک و فضاهای متریک فازی اثبات می کنیم. هم چنین برخی قضایای نقطه انطباقی برای نگاشت های تک مقداری و چند مقداری در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک ارایه می دهیم و نیز قضایای نقطه ثابت را برای نگاشت های فازی بیان واثبات خواهیم کرد.

فهرست مندرجات

۱ پیشینه و مقدمه ۱

۱.۱ پیشینه و مقدمه ۲

۲.۱ نظریه‌ی مجموعه‌های فازی ۳

۲ فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک و شبه نرم و فضای متریک فازی ۷

۱.۲ مقدمه ۸

۲.۲ نیم پیوستگی پایینی و بالایی ۸

۳.۲ فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک ۸

۴.۲ فضای مولد خانواده‌ی شبه نرم ۱۰

۵.۲ فضای متریک فازی ۱۱

۶.۲ خانواده‌ای از شبه متریک های ضعیف ۱۷

۳ قضایای مینیمم سازی ۲۱

۱.۳ مقدمه ۲۲

۲.۳ قضایای مینیمم سازی ۲۲

۴ قضایای نقطه ثابت ۲۹

۱.۴ مقدمه ۳۰

۲.۴ اصل متغیر تعمیم یافته‌ی اکلند ۳۰

۳.۴ قضایای نقطه ثابت ۳۴

۵ قضایای نقطه انطباقی و قضایای مینیمم سازی و نقطه ثابت در فضاهای متریک فازی ۳۸

۱.۵ مقدمه ۳۹

۲.۵ قضایای نقطه انطباقی در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک ۳۹

۳.۵ قضایای نقطه انطباقی در فضاهای متریک احتمالی ۴۴

۴.۵ قضایای مینیمم سازی ۴۷

۵.۵ قضایای نقطه ثابت ۴۹

٦ قضایای نقطه ثابت برای نگاشت های فازی در فضاهای متریک کامل ٥٦

۱.٦ مقدمه ٥٧

۲.٦ نگاشت فازی ٥٧

۳.٦ قضایای نقطه ثابت برای نگاشت های فازی ٥٨

الف واژه نامه ٦٣

ب مراجع ٦٧

فصل ۱

پیشینه و مقدمه

۱.۱ پیشینه و مقدمه

قضیه‌ی مینیمم سازی و قضایای نقطه ثابت نقش مهمی در مسائل ریاضی بازی می‌کنند. نویسندگان بسیاری [4] و[10] و[12] و[14] قضایای مینیمم سازی و قضایای نقطه ثابت را برای مطالعه‌ی بخش وسیعی از مسائل مهم بوجود آمده در شاخه‌های مختلف علوم ریاضی فازی تعمیم و توسیع داده‌اند.

اخیراً، کالوا[۱] [14] برخی قضایای نقطه ثابت را در فضاهای متریک فازی کامل اثبات کرده است. جانگ [۲] [11] نیز یک قضیه‌ی مینیمم سازی نوع تاکاهاشی [۳] [17] را در فضای متریک فازی کامل ثابت کرده است.

با استفاده از قضیه‌ی مینیمم سازی، آنها تشابهاتی از قضیه‌ی نقطه ثابت داوینگ کیرک[۴] [7] و اصل متغیراکلند [۵] [8] در فضاهای متریک فازی کامل بدست آوردند. هم چنین آنها با استفاده از نتایج بدست آمده یک نوع کلی تری از اصل متغیر اکلند در فضاهای متریک فازی کامل را بدست آوردند.

اخیراً چانگ [۶] [3] و[4]، تعریف، برخی خواص و مثال هایی از فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک بدست آورده که شامل فضاهای متریک فازی [14] و فضاهای متریک احتمالی منجر[۷] [16] در حالت های خاص هستند. هم چنین آنها قضایای انطباقی [3] و[4]، برخی قضایای نقطه ثابت و قضایای مینیمم سازی نوع تاکاهاشی را در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک کامل ثابت کرده‌اند.

---

[۱] *Kaleva*

[۲] *Jung*

[۳] *Takahashi*

[۴] *Dowing Kirk*

[۵] *Ekeland*

[۶] *Chang*

[۷] *Menger*

اخیراً، کادا [8] [13] مفهوم w—مسافت (مسافت ضعیف) را در فضاهای متریک معرفی کرده و قضیه‌ی نقطه ثابت کاریستی [9]، اصل متغیر اکلند و قضیه‌ی مینیمم سازی تاکاهاشی را در فضاهای متریک کامل با استفاده از w—مسافت ثابت کرده است.

بعد از کادا، آیبین [10] [1] یک قضیه‌ی نقطه ثابت نوع کاریستی برای نگاشت های مجموعه مقدار در فضاهای متریک کامل و نیز قضیه‌ی نقطه ثابت دیگری برای نگاشت های مجموعه مقدار بدون فرض نیم پیوستگی پایینی بدست آورده است.

ما در این پایان نامه یک خانواده از شبه متریک های ضعیف در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک معرفی می‌کنیم. با دیدگاهی از کادا [13]، یک قضیه‌ی مینیمم سازی نوع تاکاهاشی در فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک کامل اثبات می‌کنیم. با استفاده از قضیه‌ی مینیمم سازی، یک اصل متغیر تعمیم یافته‌ی اکلند و یک قضیه‌ی نقطه ثابت کلی نوع کاریستی برای نگاشت های مجموعه مقدار در فضاهای مولد خانواده شبه متریک کامل بدست می آوریم. هم‌چنین با نتیجه‌ای از آیبین[1]، قضیه‌ی نقطه ثابت دیگری برای نگاشت های مجموعه مقدار در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک کامل بدون فرض نیم پیوستگی پایینی اثبات می‌کنیم. با استفاده از نتایج بدست آمده در فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک کامل، قضایای متناظری برای نگاشت های مجموعه مقدار در فضای متریک فازی کامل بدست می آوریم.

۲.۱ نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

در نظریه‌ی مجموعه‌ها که زیربنای ریاضیات مدرن است، مجموعه‌ها بصورت گردایه‌ای معین از اشیاء تعریف می شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش تعریف مشخص می‌شود. اگر یک شیء مفروض، دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه‌ی متناظر است واگر

[8] $Kada$

[9] $Caristi$

[10] $Aubin$

نباشد، عضو آن نیست. مثلاً اگر مجموعه‌ی مرجع X، مجموعه‌ی اعدادحقیقی فرض شود وP ویژگی «بزرگتر از ده بودن»، آنگاهP یک ویژگی خوش تعریف است که یک مجموعه‌ی مثلاً A باآن متناظر می‌شود. زیرا برای هرعدد از مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ده است یا خیر وبنابراین عضو A است یا نه. حال فرض کنید بخواهیم درباره‌ی آن دسته ازمجموعه‌ی اعداد حقیقی صحبت کنیم که بزرگ باشند. در اینجا با یک ویژگی ناخوش تعریف و مبهم یعنی «بزرگ» سرو کار داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند وچه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت ویا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه‌ای باویژگی «بزرگ بودن» قطعی نیست. مثلاً آیا ۱۰۰۰۰۰۰عددی «بزرگ» است و عضو گردایه‌ی اعداد حقیقی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰چطور؟ ۱۰۰چطور؟ می‌بینیم که ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معین نیست و بنابراین جامعه‌ی نظریه‌ی معمولی از صورت بندی این مفاهیم و ویژگی ها ناتوان است. از قضا، بیشتر مفاهیم و ویژگی هایی که در زندگی روزمره و واقعی و نیز در شاخه‌های مختلف علوم انسانی و اجتماعی با آن سرو کار داریم، این گونه‌اند. یعنی مفاهیمی هستند منعطف و مجموعه‌هایی هستند با کران های نادقیق. برای مثال ما در زندگی واقعی کمتر از کودکان بلندقدتر از (cm)۱۰۰، زمین های بزرگتر از ۱۰هکتار، مسافت های طولانی‌تراز(km)۱۰۰ و...صحبت می کنیم. بلکه فهم وزبان طبیعی ما بیشتر با مفاهیمی مانند کودکان بلند قد (کوتاه قد،خیلی کوتاه‌و...)، زمین های وسیع (کوچک، خیلی وسیع و...)، اجناس گران (ارزان، خیلی ارزان، تقریباًگران و...) سرو کار دارد. هم چنین در علوم، به ویژه علوم انسانی و اجتماعی به جای صحبت از کشورهای دارای ۱۰۰۰ کارخانه به بالا، شهرهای با جمعیت بیشتر از یک میلیون نفر و...با مفاهیم و عباراتی مانند جوامع پیشرفته‌ی صنعتی، فرهنگ های بومی، تراکم جمعیت زیاد، کودکان کندذهن و...سروکار داریم. هیچ کدام از این مفاهیم وتعاریف، تعاریف دقیقی نیستند که بتوان برای هرکدام مجموعه‌هایی دقیق را تصور کرد.

در قلمرو ریاضیات و نظریه‌ی مجموعه‌های کلاسیک جایی برای این مفاهیم نیست و قالبی برای صورت بندی این مفاهیم و ابزاری برای تجزیه و تحلیل آن ها وجود ندارد.

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت بندی وتجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی هاست. این نظریه، یک تعمیم وگسترش طبیعی نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی است که موافق بازبان و فهم طبیعی انسان ها نیز می باشد.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر یا تابع مشخصه‌ی هر زیر مجموعه‌ی معمولی A از X، یک تابع از X به $\{۱ و ۰\}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع مشخصه را از مجموعه‌ی دو عضوی $\{۱ و ۰\}$ به بازه‌ی $[۱ و ۰]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X، عددی را از بازه‌ی $[۱ و ۰]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم.

اکنون A دیگر یک مجموعه‌ی معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه‌ی فازی می‌نامیم (بطور دقیق تر، یک زیر مجموعه‌ی فازی ازX). بنابراین یک مجموعه‌ی فازی A، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می‌تواند بطور پیوسته از I=$[۱ و ۰]$ اختیار شود. این مجموعه بطور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_A(x)$ نمایش می‌دهیم، مشخص می‌شود. تابعی که به هر عنصر از X، یک عدد را از بازه‌ی $[۱ و ۰]$ به عنوان درجه‌ی عضویت آن عنصر در مجموعه‌ی فازی A نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهنده‌ی تعلق بیشتر x به مجموعه‌ی فازی A است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده‌ی تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_A(x)$ را می‌توان درجه‌ی پذیرش ما در قبول x بعنوان عضوی از A در نظر گرفت. در حالت حدی چنانچه x کاملاً در A

عضو باشد، $\mu_A(x) = 1$ و چنانچه اصلاً در A عضو نباشد، $\mu_A(x) = 0$.

پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آنها حالت های خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آنها هستند. اعداد فازی و همچنین بازه‌های فازی کاربردهای بسیاری دارند. اساس همه‌ی این کاربردها، توانایی این دو مفهوم در صورت بندی کمیت های عددی غیر دقیق است. از طرف دیگر همان طور که عدد نقش اساسی در ریاضیات دارد، عدد فازی هم نقش اساسی در ریاضیات فازی دارد.

فصل ۲

فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک و شبه نرم و فضای متریک فازی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا تعاریف، برخی خواص و مثال هایی از فضاهای مولد خانواده‌ی شبه متریک و شبه نرم ارایه می دهیم. سپس تعریفی از عدد فازی و فضای متریک فازی می‌آوریم. سپس گزاره‌ای را بیان و اثبات خواهیم کرد که این گزاره رابطه‌ایست بین یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک و یک فضای متریک فازی و در ادامه، این فصل را با تعریف و مثال هایی از خانواده‌ای از شبه متریک های ضعیف به پایان می‌رسانیم.

۲.۲ نیم پیوستگی پایینی و بالایی

تعریف ۱.۲.۲ فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت باشد. f را نیم پیوسته‌ی پایینی گوییم، هرگاه به ازای هر α ی حقیقی مجموعه‌ی $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ و یا معادلاً $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ باز باشد. هم چنین، f را در نقطه‌ی $x_\circ$ که $x_\circ \in X$، نیم پیوسته‌ی پایینی گوییم، هرگاه

$$f(x_\circ) \leq \liminf_{x \to x_\circ} f(x)$$

تعریف ۲.۲.۲ فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت باشد. f را نیم پیوسته‌ی بالایی گوییم، هرگاه به ازای هر α ی حقیقی مجموعه‌ی $\{x \mid f(x) < \alpha\}$ و یا معادلاً $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ باز باشد. هم چنین، f را در نقطه‌ی $x_\circ$ که $x_\circ \in X$، نیم پیوسته‌ی بالایی گوییم، هرگاه

$$f(x_\circ) \geq \limsup_{x \to x_\circ} f(x)$$

۳.۲ فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک

تعریف ۱.۳.۲ فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و $\{d_\alpha : \alpha \in (\circ, 1]\}$ یک خانواده از نگاشت های d_α از $X \times X$ بتوی $\mathbb{R}^+ = [\circ, \infty)$ باشد. در این صورت $(X, d_\alpha : \alpha \in (\circ, 1])$ یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

$(QM-1)$ به ازای هر $\alpha \in (\circ, 1]$، $d_\alpha(x, y) = \circ$ اگر و فقط اگر $x = y$.

$(QM-2)$ به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in (\circ, 1]$، $d_\alpha(x, y) = d_\alpha(y, x)$.

$(QM-۳)$ به ازای هر $\alpha \in (۰,۱]$، یک عدد $\mu \in (۰,\alpha]$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x,y,z \in X$، $d_\alpha(x,y) \leq d_\mu(x,z) + d_\mu(z,y)$.

$(QM-۴)$ به ازای هر $x,y \in X$، $d_\alpha(x,y)$ نسبت به α ناصعودی و پیوسته‌ی چپ در α باشد.

مثال ۲.۳.۲ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و به ازای هر $\alpha \in (۰,۱]$ و هر $x,y \in X$، $d_\alpha(x,y) = d(x,y)$ باشد. در این صورت واضح است که $(X, d_\alpha : \alpha \in (۰,۱])$ یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک است.

تبصره ۳.۳.۲ فن [1] [9] ثابت کرد که اگر $(X, d_\alpha : \alpha \in (۰,۱])$ یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک باشد، در این صورت یک توپولوژی $\zeta_{\{d_\alpha\}}$ روی X وجود دارد بطوریکه $(X, \zeta_{\{d_\alpha\}})$ یک فضای توپولوژیکی هاسدورف است و $\mho(x) = \{U_x(\epsilon,\alpha) : \epsilon > ۰, \alpha \in (۰,۱]\}$ یک پایه در نقطه‌ی $x \in X$ برای توپولوژی $\zeta_{\{d_\alpha\}}$ است که در آن

$$U_x(\epsilon,\alpha) = \{y \in X : d_\alpha(x,y) < \epsilon\}$$

تعریف ۴.۳.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله در یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک $(X, d_\alpha : \alpha \in (۰,۱])$ باشد و $x \in X$. در این صورت همگرایی در X این چنین تعریف می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (۰,۱], \quad \lim_{n\to\infty} d_\alpha(x_n,x) = ۰$$

تعریف ۵.۳.۲ دنباله‌ی $\{x_n\}$ در یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک $(X, d_\alpha : \alpha \in (۰,۱])$ یک دنباله‌ی کوشی نامیده می‌شود، اگر

$$\forall \alpha \in (۰,۱], \quad \lim_{n,m\to\infty} d_\alpha(x_m,x_n) = ۰$$

یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک، تام گفته می‌شود، اگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

---

[1] Fan

۴.۲ فضای مولد خانواده‌ی شبه نرم

ما اکنون یک فضای مولد خانواده‌ی شبه نرم را تعریف می‌کنیم که مشابه با فضای نرم دار فازی تعریف شده در مرجع [5] و [6] است.

تعریف ۱.۴.۲ فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط K باشد و $\{||.||_\alpha : \alpha \in (۰,۱]\}$ یک خانواده از نگاشت های $||.||_\alpha$ از X بتوی $\mathbb{R}^+$ باشد. در این صورت $(X, ||.||_\alpha : \alpha \in (۰,۱])$ یک فضای مولد خانواده‌ی شبه نرم نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

$(QN-۱)$ به ازای هر $\alpha \in (۰,۱]$، $||x||_\alpha = ۰$ اگر وفقط اگر $x = ۰$.

$(QN-۲)$ به ازای هر $k \in K$ و هر $x \in X$، $||kx||_\alpha = |k|.||x||_\alpha$.

$(QN-۳)$ به ازای هر $\alpha \in (۰,۱]$، یک عدد $\mu \in (۰,\alpha]$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$||x+y||_\alpha \leq ||x||_\mu + ||y|||_\mu$$

$(QN-۴)$ به ازای هر $x \in X$، $||x||_\alpha$ نسبت به α ناصعودی و پیوسته‌ی چپ در α باشد.

مثال ۲.۴.۲ فرض کنید

$$L_p[۰,۱] = \{f : \text{ یک تابع اندازه پذیر است } f \text{ و } \int_۰^۱ |f|^p dt < \infty\}$$

و $L^W[۰,۱] = \cap_{p=۱}^{\infty} L_p[۰,۱]$. اگر به ازای هر $f \in L^W[۰,۱]$ و هر $\alpha \in (۰,۱]$ تعریف کنیم $||f||_\alpha = |f|_{\frac{۱}{\alpha}}$ که $|f|_\beta = (\int_۰^۱ |f|^\beta dt)^{\frac{۱}{\beta}}$. در این صورت می‌توان اثبات کرد که $(L^W[۰,۱], ||.||_\alpha; \alpha \in (۰,۱])$ یک فضای مولد خانواده‌ی شبه نرم است.

اثبات: به قضیه‌ی ۱.۴ مرجع [6] مراجعه شود.

مثال ۳.۴.۲ اگر $(X, ||.||_\alpha : \alpha \in (۰,۱])$ یک فضای مولد خانواده‌ی شبه نرم باشد، در این صورت با فرض $d_\alpha(x,y) = ||x-y||_\alpha$ به ازای هر $\alpha \in (۰,۱]$، $(X, d_\alpha : \alpha \in (۰,۱])$ یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک خواهد شد.

اثبات :

۱) اگر به ازای هر $\alpha \in (0,1]$، $d_\alpha(x,y) = ||x-y||_\alpha = 0$. در این صورت بنا به شبه نرم بودن $(X, ||.||_\alpha : \alpha \in (0,1])$، $x - y = 0$ یعنی $x = y$. پس $d_\alpha(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

۲) $$d_\alpha(x,y) = ||x-y||_\alpha = ||-(y-x)||_\alpha = |-1|||y-x||_\alpha = ||y-x||_\alpha = d_\alpha(y,x)$$

پس به ازای هر $\alpha \in (0,1]$، $d_\alpha(x,y) = d_\alpha(y,x)$.

۳) $d_\alpha(x,y) = ||x-y||_\alpha = ||(x-z)+(z-y)||_\alpha$. بنا به شبه نرم بودن $(X, ||.||_\alpha : \alpha \in (0,1])$، یک عدد $\mu \in (0,\alpha]$ وجود دارد بطوریکه

$$d_\alpha(x,y) = ||(x-z)+(z-y)||_\alpha \leq ||x-z||_\mu + ||z-y||_\mu = d_\mu(x,z) + d_\mu(z,y)$$

۴) چون به ازای هر $x,y \in X$، $||x-y||_\alpha$ نسبت به α ناصعودی و پیوسته‌ی چپ در α است، پس $d_\alpha(x,y)$ نسبت به α ناصعودی و پیوسته‌ی چپ در α است.

در نتیجه $(X, d_\alpha : \alpha \in (0,1])$ یک فضای مولد خانواده‌ی شبه متریک است.

۵.۲ فضای متریک فازی

تعریف ۱.۵.۲ هر نگاشت از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به $[0,1]$ را یک عدد فازی نامند.

تعریف ۲.۵.۲ به ازای هر $\alpha \in (0,1]$ و عدد فازی x، مجموعه‌ی $[x]_\alpha = \{u \in \mathbb{R} : x(u) \geq \alpha\}$ یک مجموعه‌ی سطح α از x نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۵.۲ عدد فازی x محدب گفته می‌شود، اگر به ازای هر سه عدد حقیقی r,s,t که $r \leq s \leq t$، داشته باشیم

$$min\{x(r), x(t)\} \leq x(s)$$

تعریف ۴.۵.۲ عدد فازی x نرمال گفته می‌شود، اگر $u \in \mathbb{R}$ یی موجود باشد بطوریکه $x(u) = 1$.

تبصره ۵.۵.۲ اگر عدد فازی x نیم پیوسته‌ی بالا، محدب و نرمال باشد، در این صورت هر مجموعه‌ی سطح α از x یک بازه‌ی کراندار و بسته است. یعنی

$$[x]_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha], \qquad (\alpha \in (0, 1])$$

تعریف ۶.۵.۲ عدد فازی x نامنفی گفته می‌شود، اگر به ازای هر $u < 0$، $x(u) = 0$.

تعریف ۷.۵.۲ عدد فازی $\overline{\theta}$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\theta}(u) = \begin{cases} 1 & ; u = 0 \\ 0 & ; u \neq 0 \end{cases}$$

تذکر ۸.۵.۲ مجموعه‌ی همه‌ی اعداد فازی نامنفی، نیم پیوسته‌ی بالا، نرمال و محدب را با G نمایش می‌دهیم و همواره فرض می‌کنیم $L, R : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ دو تابع نانزولی نسبت به هر دو مؤلفه ی x و y بوده و متقارن اند و $L(0, 0) = 0$ و $R(1, 1) = 1$.

تذکر ۹.۵.۲ فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و $d : X \times X \longrightarrow G$ یک نگاشت باشد. به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in (0, 1]$ تعریف می‌کنیم

$$[d(x, y)]_\alpha = [\lambda_\alpha(x, y), \rho_\alpha(x, y)]$$

که درآن $\lambda_\alpha(x, y)$ و $\rho_\alpha(x, y)$ به ترتیب نقطه‌ی انتهایی چپ و راست از مجموعه‌ی سطح α از $d(x, y)$ هستند.

تعریف ۱۰.۵.۲ (کالوا و سیکالا [2] [14]) چهارتایی (X, d, L, R) یک فضای متریک فازی نامیده می‌شود، اگر نگاشت $d : X \times X \longrightarrow G$ در شرایط زیر صدق کند:

$(FM - 1)$ $d(x, y) = \overline{\theta}$ اگر و فقط اگر $x = y$.

$(FM - 2)$ به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$.

$(FM - 3)$ به ازای هر $x, y, z \in X$،

$$d(x, y)(s + t) \geq L(d(x, z)(s), d(z, y)(t)) \qquad (1.5.2)$$

وقتی که

[2] Kaleva and Seikkala