کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری‌های ناشي از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه الزهرا است.

دانشکده علوم

گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بررسی زیرگروه‌هایی از گروه خودریختی‌های رده‌هایی خاص از گروه‌ها

استاد راهنما

دکتر مهری اخوان ملایری

دانشجو

زاهده اژدری

آبان ماه ۱۳۹۱

مادر،

تقدیم به تو

که کوثر وجودت

روشنی راهمان گشت.

الهی!...

الهی، الحمدلله؛ که در این حال به از این چه گویم و چه کنم!

الهی، شکرت که توشه ای جز توکل ندارم!

الهی، به سوی تو آمدم؛ به حق خودت مرا به من برمگردان!

الهی، ما هرچه کنیم کم است و تو هرچه دهی بسیار؛ "یا من یعطی الکثیر بالقلیل"!

الهی، شکرت که از اساتید بی رنگ، رنگ گرفته ام!

الهی، گرچه علم رسمی سربه سر قیل و قال است؛ باز شکر که علم و کتاب حجابم نشدند نه سنگ و گل و درهم و دینار!

الهی، کتاب دار و کتاب خوان و کتاب دان بسیارند؛ خنک آن که خود کتاب است و کتاب آر!

الهی، از کتاب ها پاسخ پرسش خواستن و حل مشکل طلبیدن، عیال سفره دیگران بودن است. "یا غنی و یا مغنی"، "یا ملی و یا معطی"، تا کی جیره خوار این و آن باشم و در کنار خوان آنان نشینم، هرچند بر سر هر سفره رزاق تویی!

الهی، علم موجب ازدیاد حیرتم شده است؛ ای علم محض و نور مطلق بر حیرتم بیفزا!

الهی، چگونه شکر این نعمت گزارم که اجازه داده ای تا نام نیکوی تو را به زبان آورم و در پیشگاهت با تو گفتگو کنم، وگرنه "این التراب و رب الأرباب"![1]

[1] الهی نامه، آیة الله حسن زاده آملی

سپاس گزاری...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چراکه این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

سپاس گزار افرادی، هستم که بی حضورشان تدوین این مجموعه ممکن نبود. در آغاز وظیفه خود می دانم از استاد فرهیخته ام سرکار خانم دکتر اخوان ملایری، که در طول مدت انجام این رساله از رهنمودهای علمی و اخلاقی ایشان بهره مند شدم، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

همچنین از آقایان دکتر حمالی، دکتر سالمکار و خانمها دکتر رجایی و دکتر هادیان که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل نمودند و با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود این رساله شدند، کمال امتنان را دارم.

زاهده اژدری

آبان ماه ۱۳۹۱

اظهارنامه

تمام فصل‌های رساله به غیر از فصل اول به مطالب اصیل اختصاص دارد.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه باشد و M و N زیرگروه‌های نرمالی از G باشند. در این صورت $\mathrm{Aut}_N^M(G)$ را گروه همه خودریختی‌های G در نظر می‌گیریم که G/M و N را مرکزی می‌کنند. همچنین برای سادگی $\mathrm{Aut}_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$ را با C^* نمایش می‌دهیم. یکی از سوالات جالبی که در مورد خودریختی‌ها مطرح می‌شود یافتن شرط لازم و کافی برای گروه G است به‌طوری‌که زیرگروه‌های خاصی از خودریختی‌های G با هم برابر شوند.
در این رساله با استفاده از روش‌های متنوع جبری به حل مسائل ذیل می‌پردازیم:

(۱) مشخص ساختن همه گروه‌های پوچ‌توان متناهی‌مولد G که در آن‌ها $C^* = \mathrm{Inn}(G)$.

(۲) مشخص ساختن گروه‌های پوچ‌توان متناهی‌مولد G که در آن‌ها $\mathrm{Aut}_c(G) = \mathrm{Inn}(G)$.

(۳) یافتن شرایط لازم و کافی برای G به‌طوری‌که $\mathrm{Aut}_N^M(G)$ با $Z(\mathrm{Inn}(G))$، $\mathrm{Inn}(G)$، C^* یا $\mathrm{Aut}_c(G)$ برابر شود.

(۴) مشخص ساختن p-گروه‌های متناهی G که در آن‌ها تساوی $\mathrm{Aut}_{N_1}^{M_1}(G) = \mathrm{Aut}_{N_2}^{M_2}(G)$ برای زیرگروه‌های نرمال M_1، M_2، N_1 و N_2 از G برقرار باشد.

(۵) یافتن شرایطی که وجود خودریختی‌های غیر داخلی از $\mathrm{Aut}_N^M(G)$ را تضمین کند.

(۶) طبق تعریف خودریختی θ از گروه G را داخلی نقطه‌ای گوییم هرگاه برای هر $x \in G$، $\theta(x)$ با x مزدوج باشد. ابتدا تعمیمی طبیعی از این مفهوم ارائه نموده و سپس به بررسی برخی ویژگی‌های آن و رابطه بین $\mathrm{Inn}(G)$ و گروه خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای در گروه‌های پوچ‌توان متناهی‌مولد از رده ۲ می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: خودریختی داخلی، خودریختی داخلی نقطه‌ای، خودریختی مرکزی، گروه پوچ‌توان، گروه متناهی‌مولد.

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۲۰D۴۵ و ۲۰E۳۶.

مقدمه

در بررسی هر دسته از اشیا جبری توابعی که ساختار جبری را به گونه‌ای حفظ می‌کنند از ضروریات است. جبر و به طور خاص نظریه گروه‌ها نیز از این قاعده مستثنی نیست. بر این اساس یکی از مفاهیم مهمی که به آن پرداخته شده و توجه محققان را به خود جلب نموده، همریختی و خودریختی است. بسیاری از ریاضیدانان علاقه‌مند به این موضوع، کوشیده‌اند تا ویژگی‌هایی از این خودریختی‌ها و همریختی‌ها را مورد بررسی قرار دهند. یکی از مفاهیمی که به طور خاص در نظریه گروه‌ها مورد بررسی قرار گرفته و در دهه‌های اخیر توجه بسیاری از ریاضیدان‌ها را به خود جلب کرده است، مفهوم خودریختی مرکزی و بررسی ساختار آن است. مراجع [۲]، [۱۲]، [۱۳]، [۲۷] و [۴۴] شاهدی بر این مدعا است. همچنین می‌توان به مفهوم خودریختی داخلی نقطه‌ای (حافظ کلاس) اشاره کرد که در این زمینه نیز پژوهش‌هایی انجام شده است. به عنوان مثال می‌توان از مراجع [۱۶]، [۴۶]، [۴۷]، [۴۸] و [۴۹] نام برد. در این پژوهش ما نیز می‌کوشیم تا ساختار این خانواده از خودریختی‌ها و همچنین رابطه بین آن‌ها و خودریختی‌های داخلی را مورد بررسی قرار دهیم. از آنجا که پژوهش ما عمدتاً به مفاهیم خودریختی مرکزی و خودریختی داخلی نقطه‌ای، می‌پردازد، در ادامه خلاصه‌ای از پیشینه هر یک از این دو مفهوم را به طور جداگانه بیان می‌کنیم.
در ابتدا پیشینه‌ای از خودریختی مرکزی می‌آوریم.

فرض کنیم G یک گروه باشد. همان طور که می‌دانیم، خودریختی α از G مرکزی است هرگاه با هر خودریختی از $\mathrm{Inn}(G)$ جابه‌جا شود یا به طور معادل هرگاه برای هر $x \in G$، $x^{-1}\alpha(x)$ عضو مرکز G باشد. خودریختی‌های مرکزی زیرگروه جابه‌جاگر G' از G را به طور نقطه‌ای ثابت نگه می‌دارند و تشکیل یک زیرگروه نرمال از گروه تمام خودریختی‌های G می‌دهند که آن را با $\mathrm{Aut}_c(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض کنیم M و N زیرگروه‌های نرمالی از G باشند. در این صورت $\mathrm{Aut}_N^M(G)$ را مجموعه تمام خودریختی‌های G در نظر می‌گیریم که G/M و N را مرکزی می‌کنند و $C_{\mathrm{Aut}_c(G)}(N)$ را زیرگروهی از خودریختی‌های مرکزی G در نظر می‌گیریم که N را به طور نقطه‌ای ثابت نگه می‌دارند. همچنین برای سادگی $\mathrm{Aut}_{Z(G)}^{Z(G)}(G) = C_{\mathrm{Aut}_c(G)}(Z(G))$ را با C^* نمایش می‌دهیم.

یکی از سوالاتی که در مورد خودریختی‌های مرکزی مطرح می‌شود، بررسی شرایطی است که گروه خودریختی‌های مرکزی G با زیرگروه دیگری از خودریختی‌های G مانند $\mathrm{Aut}(G)$، C^*، $\mathrm{Inn}(G)$ یا $Z(\mathrm{Inn}(G))$ برابر شود.

با توجه به تعریف خودریختی‌های مرکزی می‌دانیم $Z(\mathrm{Inn}(G)) \leq \mathrm{Aut}_c(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$. لذا بررسی شرایطی که تساوی $\mathrm{Aut}_c(G) = \mathrm{Aut}(G)$ یا $Z(\mathrm{Inn}(G)) = \mathrm{Aut}_c(G)$ برقرار باشد، جالب

است.

اگر G آبلی باشد به وضوح $\mathrm{Aut}_c(G) = \mathrm{Aut}(G)$. اما حتی اگر G ناآبلی باشد، گروه‌های با این ویژگی موجودند. گروه‌های ناآبلی که در آن $\mathrm{Aut}_c(G) = \mathrm{Aut}(G)$، به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این حالت باید G پوچ‌توان از رده ۲ باشد و لذا در گروه‌های متناهی می‌توانیم توجه خود را به p-گروه‌ها معطوف کنیم.

در ابتدا گروه‌هایی مورد مطالعه قرار گرفتند که دارای خودریختی‌های آبلی‌اند و لذا برای آنها تساوی $\mathrm{Aut}_c(G) = \mathrm{Aut}(G)$ برقرار است (مراجع [۱۴]، [۲۸]، [۳۳] و [۳۴] نمونه‌ای از تحقیقات انجام شده در این زمینه هستند). در واقع اولین گروه ناآبلی که گروه خودریختی‌های آن آبلی باشد، توسط میلر[۲] [۳۳] معرفی شد. او گروهی از مرتبه $۲^۶$ با خودریختی‌های آبلی مقدماتی از مرتبه $۲^۷$ معرفی کرد.

به طور طبیعی، این سوال مطرح می‌شود که "آیا تنها در گروه‌های با خودریختی‌های آبلی تساوی $\mathrm{Aut}_c(G) = \mathrm{Aut}(G)$ برقرار است؟" کارن [۳] در سال ۱۹۸۲ [۱۱] به این سوال پاسخ منفی داد. او با کمک گروه میلر، گروهی از مرتبه $۲^۷$ ساخت که در آن $\mathrm{Aut}(G)$ ناآبلی است و به علاوه همه خودریختی‌هایش مرکزی‌اند. بعد از او مثال‌های متنوعی در این زمینه ارائه شد (مراجع [۲۰] و [۳۲] را ببینید).

در سال ۲۰۰۱، کارن و مکون[۴] در [۱۲]، همه p-گروه‌هایی را مشخص ساختند که در آن‌ها $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Aut}_c(G)$. آنها ثابت کردند که در p-گروه متناهی G، $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Aut}_c(G)$ اگر و تنها اگر $G' = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد.

کارن در سال ۲۰۰۴ [۱۳]، به بررسی تساوی $Z(\mathrm{Inn}(G))$ با $\mathrm{Aut}_c(G)$ پرداخت. او ثابت نمود که اگر G، p-گروه ناآبلی متناهی باشد آنگاه تساوی $Z(\mathrm{Inn}(G)) = \mathrm{Aut}_c(G)$ برقرار است اگر و تنها اگر $\mathrm{Hom}(G/G', Z(G)) \simeq Z_۲(G)/Z(G)$. به علاوه او در پایان این مقاله نتیجه اصلی خود و مکون در [۱۲] را به روشی دیگر اثبات نمود.

شعبانی عطار نیز در سال ۲۰۰۷ در [۴۴]، p-گروه‌هایی را که در آن‌ها $C^* = \mathrm{Inn}(G)$ مشخص کرد و نشان داد که $C^* = \mathrm{Inn}(G)$ اگر و تنها اگر G آبلی یا پوچ‌توان از رده ۲ با مرکز دوری باشد.

یاداو[۵] در سال ۲۰۰۹ [۵۰]، این نتیجه را تعمیم داد و با در نظر گرفتن زیرگروه مرکزی به جای مرکز نتیجه مشابهی به دست آورد. در واقع او نشان داد که اگر G، یک p-گروه ناآبلی متناهی و M زیرگروه مرکزی G باشد آنگاه $\mathrm{Aut}^M_{Z(G)}(G) = \mathrm{Inn}(G)$ اگر و تنها اگر $G' \leq M$ و M دوری باشد.

---

[۲] Miller

[۳] Curran

[۴] McCaughan

[۵] Yadav

این نتایج برای گروه‌های نامتناهی لزوماً برقرار نیستند (گروهی نامتناهی با مرکز دوری ارائه می‌کنیم که در آن $\mathrm{Inn}(G) < C^*$). در این رساله ابتدا به بررسی تساوی $\mathrm{Inn}(G)$ با گروه خودریختی‌های C^* و $\mathrm{Aut}_c(G)$ در گروه‌های متناهی‌مولد می‌پردازیم. در واقع ثابت می‌کنیم که در گروه متناهی‌مولد G، $\mathrm{Inn}(G) = C^*$ اگر و تنها اگر G آبلی باشد و یا G پوچ‌توان از رده ۲ باشد که در یکی از شرایط زیر صدق کند:

(i) $Z(G)$ یکریخت با $C_m \times H \times \mathbb{Z}^r$ است که در آن

$$C_m \simeq \Pi_{p\in\pi(G/Z(G))} Z(G)_p \ , \ H \simeq \Pi_{p\notin\pi(G/Z(G))} Z(G)_p \ , \ r = r_\circ(Z(G)),$$

و به علاوه نمای $G/Z(G)$ متناهی است.

(ii) $Z(G)$ دوری نامتناهی است و $det(M_G) = 1$.

لازم است به این نکته اشاره کنیم که M_G ماتریس پادمتقارن متناظر با گروه متناهی‌مولد بی‌تاب G است که در فصل دوم معرفی شده است.

همچنین ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه متناهی‌مولد باشد که آمیخته و یا به صورت $C_2 \times N$ که در آن N گروهی ناآبلی محض و $|Z(N)|$ عددی فرد است، نیست، آنگاه $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Aut}_c(G)$ اگر و تنها اگر $G' = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد و در حالتی که مرکز G دوری نامتناهی است، $det(M_G)$ برابر ۱ باشد. سپس با کمک این نتایج، به بررسی شرایط لازم و کافی برای تساوی $\mathrm{Aut}_N^M(G)$ با $Z(\mathrm{Inn}(G))$، $\mathrm{Inn}(G)$، C^* یا $\mathrm{Aut}_c(G)$ می‌پردازیم.

نکته جالب در اثبات احکام در حالت نامتناهی این است که نتایج موجود برای حالت متناهی، حالت خاصی از نتایج اصلی رساله می‌شوند. اما در کل یافتن روشی مناسب برای اثبات احکام در حالت نامتناهی کار ساده‌ای نیست، زیرا در این رابطه نتایج زیادی اثبات نشده است و بیشتر نتایج موجود، حالت متناهی را در بر می‌گیرد.

مسئله دیگری که در مورد خودریختی‌های مرکزی مورد توجه قرار گرفته، بررسی شرایطی است که گروه دارای خودریختی مرکزی غیر داخلی باشد. در ابتدا وجود خودریختی‌های غیر داخلی (خارجی) مورد توجه قرار گرفتند.

فرض کنیم p یک عدد اول و G یک p-گروه متناهی ناآبلی باشد. یک حدس قدیمی بیان می‌کند که G دارای خودریختی غیر داخلی از مرتبه p است. بنابر نتیجه مشهور گاشوتس[۶] [۱۹]، هر گروه از مرتبه حداقل p^2 دارای یک خودریختی غیر داخلی از مرتبه توانی از p است. اما بعد از او برخی کوشیدند تا این حدس را در شرایط دیگری بررسی کنند.

[۶] Gaschutz

به عنوان مثال، بسیاری از محققان به بررسی وجود خودریختی‌های غیر داخلی پرداختند که روی زیرگروه خاصی از G مانند $\Phi(G)$ ثابت باشند.

لیبک[۷] در سال ۱۹۶۵ نشان داد که p-گروه‌های متناهی از رده ۲ با $p \neq 2$ دارای خودریختی غیر داخلی از مرتبه p می‌باشند که زیرگروه فراتینی $\Phi(G)$ را به طور نقطه‌ای ثابت نگه می‌دارند. او همچنین گروهی از رده ۲ و مرتبه 2^7 ارائه نمود که تمام خودریختی‌های از مرتبه ۲ آن که $\Phi(G)$ را ثابت نگه می‌دارند، داخلی‌اند.

سیلبربرگ[۸] و دیاکونسکیو[۹] در سال ۲۰۰۲ [۱۵] نشان دادند که اگر G، p-گروه ناآبلی متناهی باشد و اگر $C_G(Z(\Phi(G))) \neq \Phi(G)$، آنگاه G دارای خودریختی غیر داخلی از مرتبه p و ثابت روی $\Phi(G)$ است.

در ادامه این پژوهش‌ها، گروه G که در آن $C_G(Z(\Phi(G))) = \Phi(G)$ نیز مورد توجه قرار گرفت. از جمله در سال ۲۰۰۹ ، شعبانی عطار [۴۵] شرایطی را بررسی نمود که p-گروه متناهی G دارای خودریختی مرکزی غیر داخلی باشد که روی $\Phi(G)$ به طور نقطه‌ای، ثابت است.

علاوه بر بررسی حدس فوق در حالت متناهی، برخی نیز این حدس را برای گروه‌های نامتناهی مورد توجه قرارداده‌اند. مراجع [۱۸]، [۲۳]، [۳۸] و [۵۱] از جمله تحقیقات انجام شده در حالت نامتناهی هستند.

ما نیز شرایطی را ارائه می‌نماییم که وجود خودریختی‌های غیر داخلی از $\mathrm{Aut}_N^M(G)$ را در شرایط خاص تضمین می‌کند.

در ادامه پیشینه‌ای از خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای می‌آوریم.

فرض کنیم G یک گروه باشد. یک خودریختی $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ را داخلی نقطه‌ای گوییم اگر برای هر عضو $x \in G$، یک عضو $t = t(x) \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که $\alpha(x) = x^t = x[x,t]$. مجموعه همه خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای را با $\mathrm{Aut}_{pwi}(G)$ نمایش می‌دهیم.

در واقع مفهوم خودریختی داخلی نقطه‌ای تعمیمی از خودریختی داخلی است. یاد آور می‌شویم که با توجه به این که برای هر $x \in G$، $\alpha(x) = x^t \in x^G$، در اکثر منابع به این خودریختی‌ها، خودریختی‌های حافظ کلاس گفته می‌شود و آن را با $Aut_c(G)$ نمایش می‌دهند. اما از آنجا که ما خودریختی‌های مرکزی را با $\mathrm{Aut}_c(G)$ نمایش می‌دهیم، لذا برای تمایز بین این دو مفهوم ترجیح دادیم که از نمادگذاری اندیمیونی[۱۰] در [۱۶] یعنی خودریختی داخلی نقطه‌ای استفاده کنیم.

---

[۷] Liebeck

[۸] Silberberg

[۹] Deaconescu

[۱۰] Endimioni

به وضوح $\mathrm{Aut}_{pwi}(G)$ زیرگروه نرمالی از گروه خودریختی‌های G و شامل $\mathrm{Inn}(G)$ است. گروه همه خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای خارجی را با $\mathrm{Out}_{pwi}(G)$ نمایش می‌دهیم، به عبارت دیگر $\mathrm{Out}_{pwi}(G) = \mathrm{Aut}_{pwi}(G)/\mathrm{Inn}(G)$.

داستان با سوال زیر از برنساید[۱۱] در سال ۱۹۱۱ [۹] آغاز شد:

"آیا گروه متناهی G موجود است به‌طوری‌که دارای خودریختی داخلی نقطه‌ای خارجی (غیر داخلی) باشد؟"

در سال ۱۹۱۳ برنساید [۱۰] به این سوال جواب مثبت داد. او گروهی متناهی معرفی کرد که در آن $\mathrm{Out}_{pwi}(G) \neq 1$. بعد از او، مثال‌های متنوعی از گروه‌های متناهی ارائه شد که دارای خودریختی داخلی نقطه‌ای غیر داخلی‌اند (از جمله [۲۵] و [۳۱]).

علاوه بر تلاش‌های فراوانی که برای یافتن خودریختی داخلی نقطه‌ای غیر داخلی انجام شد، برخی نیز کوشیدند تا شرایطی را بررسی کنند که هر خودریختی داخلی نقطه‌ای، داخلی شود.

از جمله در سال ۱۹۸۸، فایت[۱۲] و زایتس[۱۳] در [۱۷] ثابت کردند که برای هر گروه ساده متناهی G، $\mathrm{Out}_{pwi}(G) = 1$. همچنین در حالتی که G یکی از گروه‌های S_n، A_n، $SL_n(D)$ و $GL_n(D)$ باشد که در آن منظور از D دامنه اقلیدسی است، تساوی $\mathrm{Aut}_{pwi}(G) = \mathrm{Inn}(G)$ برقرار است ([۳۶]، [۴۶] و [۴۷]).

یاداو در سال ۲۰۰۸ [۴۹]، با هدف بررسی خودریختی داخلی نقطه‌ای گروه‌های از مرتبه p^5، شرطی کافی روی p- گروه‌های متناهی از رده ۲ بیان کرد که $\mathrm{Out}_{pwi}(G) = 1$. او همچنین نشان داد که اگر G و H دو گروه متناهی همبر باشند آنگاه $\mathrm{Aut}_{pwi}(G) \simeq \mathrm{Aut}_{pwi}(H)$.

یاد آوری می‌کنیم که دو گروه G و H را همبر گوییم هرگاه یکریختی ϕ از گروه خارج‌قسمتی $\overline{G} = G/Z(G)$ بروی $\overline{H} = H/Z(H)$ و یکریختی θ از زیرگروه G' بروی H' چنان موجود باشند که اگر $\phi(aZ(G)) = a_1 Z(H)$ و $\phi(bZ(G)) = b_1 Z(H)$ آنگاه $\theta([a,b]) = [a_1, b_1]$.

با استفاده از این نتیجه، برای مطالعه در گروه‌های متناهی کافی است خانواده‌های غیر همبر را مورد بررسی قرار دهیم. لذا یاداو با یاری جستن از این دست‌آورد ثابت می‌کند که به جز در دو خانواده همبر، در همه گروه‌های از مرتبه p^5 برای عدد اول و فرد p، $\mathrm{Aut}_{pwi}(G) = \mathrm{Inn}(G)$.

همان طور که ذکر شد اکثر تحقیقات انجام شده در زمینه خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای، روی گروه‌های متناهی است، ولی برخی نیز روی گروه‌های نامتناهی تحقیقاتی انجام داده‌اند که از جمله آنها می‌توان اندیمیونی و سیگل[۱۴] را نام برد. سیگل در سال ۱۹۹۰ [۴۳] مثالی از گروه پوچ‌توان

[۱۱] Burnside

[۱۲] Feit

[۱۳] Seitz

[۱۴] Segal

بی‌تاب متناهی‌مولد بیان می‌کند که در آن $\mathrm{Out}_{pwi}(G)$ شامل عضوی از مرتبه نامتناهی است. اونو[۱۵] و وادا[۱۶] در سال ۱۹۷۴ [۳۵] ثابت کردند که در هر گروه آزاد $\mathrm{Aut}_{pwi}(G) = \mathrm{Inn}(G)$. این تساوی را می‌توان از کارهای گراسمن[۱۷] [۲۲] نیز نتیجه گرفت. او قبل از آن‌ها ثابت کرد که $\mathrm{Aut}_n(G) = \mathrm{Inn}(G)$ (منظور از $\mathrm{Aut}_n(G)$ مجموعه همه خودریختی‌های نرمال G است که هر زیرگروه نرمال G را پایا نگه می‌دارد) و در نتیجه $\mathrm{Aut}_{pwi}(G) = \mathrm{Inn}(G)$. اندیمیونی در سال ۲۰۰۲ [۱۶]، نشان داد این نتیجه برای هر گروه پوچ‌توان آزاد نیز برقرار است.

در ادامه نتایج فوق، در این رساله رابطه بین خودریختی‌های داخلی، خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای، خودریختی‌های مرکزی و زیرگروه‌های خاصی از خودریختی‌های مرکزی مورد توجه قرار خواهد گرفت.

این رساله مشتمل بر چهار فصل می‌باشد که به ترتیب زیر تنظیم شده است.

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی از نظریه‌ی گروه‌ها را مطرح می‌کنیم که در فصل‌های آتی به آن‌ها نیازمندیم. در طول رساله از مفاهیمی مانند ماتریس پادمقارن، گروه‌های همبر، ناآبلی محض، پوچ‌توان آزاد و ... استفاده می‌شود و لذا بخش‌هایی از فصل اول را به معرفی مختصری از این مفاهیم اختصاص داده‌ایم.

فصل دوم را با بررسی رابطه بین خودریختی‌های داخلی و خودریختی‌های مرکزی ثابت روی مرکز آغاز می‌کنیم. هدف اصلی این فصل مشخص ساختن همه گروه‌های با تولید متناهی است که در آن تساوی $\mathrm{Inn}(G) = C^*$ برقرار است. همچنین در پایان این فصل نتایجی به منظور مشخص ساختن گروه‌های متناهی‌مولد که در آن‌ها $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Aut}_c(G)$ آورده شده است. نتایج حاصل از فصل دوم به صورت مقالات [۳] و [۴] تنظیم شده‌اند.

در فصل سوم به معرفی زیرگروه مهمی از خودریختی‌های مرکزی و رابطه آن با $Z(\mathrm{Inn}(G))$، $\mathrm{Inn}(G)$، C^* یا $\mathrm{Aut}_c(G)$ می‌پردازیم. نتایج حاصل از این فصل به صورت مقالات [۵] و [۶] تنظیم شده‌اند.

و نهایتاً در فصل چهارم با معرفی زیرگروه دیگری از خودریختی‌ها، که در واقع تعمیمی طبیعی از مفهوم خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای است، علاوه بر بیان برخی ویژگی‌های آن، به بررسی رابطه بین $\mathrm{Inn}(G)$ و خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای در گروه‌های پوچ‌توان متناهی‌مولد از رده ۲ می‌پردازیم. بخشی از مطالب فصل چهارم در مقاله [۷] آورده شده است.

[۱۵] Ono

[۱۶] Wada

[۱۷] Grossman

همچنین بعد از اثبات قضایای اصلی رساله،کوشیده‌ایم که با ارائه مثال‌های مناسبی، کارآیی قضایا را نشان دهیم.

در سراسر این رساله، هر یک از تعاریف و گزاره‌ها همراه با یک مرجع ارائه شده‌اند و بقیه که مرجعی برای آن‌ها ذکر نشده است، اصیل محسوب می‌شوند. همچنین روش ارجاع به مطالب مندرج در متن رساله، به شیوه نگارش پارسی است. به عنوان نمونه برای ملاحظه "گزاره ۵.۲.۴"، باید به بخش دوم از فصل ۴ مراجعه شود. اما شیوه ارجاع به مراجع لاتین، به همان سبک لاتین است. مثلاً برای ملاحظه ([۴۰، ۲.۳.۴]) باید به بخش سوم از فصل ۲ مرجع [۴۰]، مراجعه شود.

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌ها و نمادها

C_m زیرگروه دوری از مرتبه m

G' زیرگروه جابجاگر

G^n زیرگروه تولید شده توسط همه g^n ها برای $g \in G$

G_p اعضای از مرتبه توانی از p در G

$Z(G)$ مرکز گروه G

$T(G)$ زیرگروه تابدار G

$\gamma_n(G)$ n-امین جمله از سری مرکزی پایینی

$\zeta_n(G)$ n-امین جمله از سری مرکزی بالایی

$\Phi(G)$ زیرگروه فراتینی G

$d(G)$ تعداد مولدهای مینیمال G

$c(G)$ رده پوچ‌توانی G

$\pi(G)$ مجموعه اعداد اول p به‌طوری‌که G دارای عضوی از آن مرتبه باشد

$r_p(G)$ ، $r_0(G)$ و $r(G)$ p-رتبه، ۰-رتبه و رتبه G

$\exp(G)$ نمای گروه G

M_G ماتریس پادمتقارن متناظر با G

$M_n(\mathbb{Z})$ ماتریس‌های از درجه n روی $\mathbb{Z}$

$GL_n(\mathbb{Z})$ گروه خطی عام از درجه n روی $\mathbb{Z}$

$SL_n(\mathbb{Z})$ گروه خطی خاص از درجه n روی $\mathbb{Z}$

$\langle X|R\rangle$ گروه تولید شده توسط مجموعه X و روابط R

$|x|$ مرتبه x

$x^y = y^{-1}xy$ مزدوج x توسط y

x^G کلاس تزویج x در G

$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ جابجاگر x و y

$[x_1, ..., x_{n-1}, x_n] = [x_1, ..., x_{n-1}]^{-1} x_n^{-1} [x_1, ..., x_{n-1}] x_n$ جابجاگر n عضو x_1، ...، x_n

$[x, H]$ مجموعه تمام $[x, h]$ برای هر $h \in H$

$\mathrm{Hom}(H, K)$ گروه همریختی‌ها از گروه H به K

$\mathrm{Aut}(G)$ گروه خودریختی‌های G

$\mathrm{Inn}(G)$ گروه خودریختی‌های داخلی G

I_g خودریختی داخلی القایی توسط g

C^* گروه خودریختی‌های مرکزی G ثابت روی مرکز

$\mathrm{Aut}_c(G)$ گروه خودریختی‌های مرکزی G

$\mathrm{Aut}_{pwi}(G)$ گروه خودریختی‌های داخلی نقطه‌ای G

$\mathrm{Aut}_N^M(G)$ گروه خودریختی‌های G که G/M و N را مرکزی می‌کنند

فصل ۱

پیشنیازها و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

این فصل به ارائه مطالب مقدماتی مورد نیاز در رساله اختصاص یافته است. نخست خلاصه‌ای از احکام مربوط به گروه‌های آبلی و گروه‌های پوچ‌توان را می‌آوریم.

۲.۱ گروه‌های آبلی

لم ۱.۲.۱. [۴۲، Theorem ۱۰.۷] *هر گروه آبلی تابدار G، به صورت ضرب مستقیم p- مولفه‌های اولیه‌اش است،* $G \simeq \prod_p G_p$.

لم ۲.۲.۱. [۴۲، Theorem ۱۰.۸] *فرض کنیم A و B گروه‌های آبلی تابدار باشند. در این صورت $G \simeq H$ اگر و تنها اگر برای هر* **عدد** *اول p،* $G_p \simeq H_p$.

در طول رساله بارها از مفهوم رتبه استفاده شده است. لذا تعریف زیر را از [۴۰] می‌آوریم.

تعریف. فرض کنیم G یک گروه آبلی و p عددی اول باشد. در این صورت p**-رتبه** G، $r_p(G)$ را عدد اصلی مجموعه مستقل خطی ماکسیمال از اعضای از مرتبه توانی از p تعریف می‌کنیم. به طور مشابه ۰**-رتبه** یا **رتبه بی‌تاب** G، $r_0(G)$ را عدد اصلی مجموعه مستقل خطی اعضای بی‌تاب

G تعریف می‌کنیم. در نهایت **رتبه** G یعنی $r(G)$ به صورت $r(G) = r_\circ(G) + \max_p r_p(G)$ تعریف می‌کنیم.

به سادگی می‌توان بررسی کرد که اگر H زیرگروهی از G باشد آنگاه $r(H) \leq r(G)$.

لم ۱.۲.۳. [۴۰، ۴.۲.۳ Exercises] *فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی‌مولد باشد. در این صورت $d(G) = r(G)$ که در آن منظور از $d(G)$ تعداد اعضای مجموعه مولد مینیمال G است. به علاوه $d(G) = r_\circ(G)$ اگر و تنها اگر G بی‌تاب باشد.*

لم ۱.۲.۴. [۴۰، ۴.۲.۷ Exercises] *فرض کنیم H زیرگروهی از گروه آبلی G باشد. در این صورت $r_\circ(G) = r_\circ(H) + r_\circ(G/H)$.*

لم ۱.۲.۵. [۲۷، ۲.۲ Lemma] *فرض کنیم G یک p-گروه آبلی متناهی و x عضوی دلخواه از G باشد. در این صورت اعضای غیر بدیهی $x_1, x_2, \cdots, x_t \in G$ چنان موجودند که*

$$G = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_t \rangle \ , \ x = x_1^{p^{s_1}} \cdots x_t^{p^{s_t}},$$

که در آن $s_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

۱.۳ گروه‌های پوچ‌توان

یکی از رده‌های مورد مطالعه در این رساله، گروه‌های پوچ‌توان است. لذا در اینجا به برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های این گروه‌ها اشاره می‌کنیم.

لم ۱.۳.۱. [۱۲، Lemma A] *فرض کنیم G یک p-گروه متناهی از رده ۲ باشد. در این صورت $\exp(G/Z(G)) = \exp(G')$.*

لم ۱.۳.۲. [۴۰، ۵.۲.۱۸] *هر گروه پوچ‌توان متناهی‌مولد دارای سری مرکزی است که عوامل آن دوری از مرتبه عدد اول یا دوری نامتناهی است.*

با توجه به لم فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر گروه پوچ‌توان متناهی‌مولد تابدار، متناهی است.