وزارت علوم تحقیقات و فناوری
مؤسسه آموزش عالی سجاد

پایان‌نامه کارشناسی ارشد برق – مخابرات سیستم

پیشنهاد روش جدیدی برای محاسبه PSVD

محمد رحمتی

استاد راهنما :

دکترایمان احدی اخلاقی

اسفند ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

سپاسگزاری :

با سپاس ازسه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

اساتیدمان.

تقدیم :

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به پدر و مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم

فهرست مطالب

فهرست اشکال :

فهرست جداول:

چکیده:

در این پایان‌نامه به معرفی روش‌های مختلف محاسبه‌ی PSVD[1] می‌پردازیم. بخشی از این روش‌ها به بررسی روش‌هـای مختلف محاسبه‌ی PSVD در مقالات مطالعه شده می‌پردازد که می‌توان به محاسبه‌ی PSVD با اسـتفاده از الگـوریتم‌هـای PQRD[2] وPEVD [3] و SBR۲ [4] و محاسـبه‌ی PSVD براسـاس تکنیـک KOGBETLIANTZ و روش پارامتریـک بـرای محاسبه‌ی PSVD اشاره نمود. بخش بعدی نیز به بررسی روش‌های مستقیم پیشنهادی محاسبه‌ی PSVD بـرای مـاتریس-های ۲×۲و n ×۲ و۲×n و n ×۳ و۳×n می‌پردازد. محاسبات انجام شده توسط روش‌های مستقیم پیشنهادی، نشـان دهنـده‌ی این است که این روش‌ها به‌صورت دقیق و ریزبینانه به محاسبه‌ی PSVD می‌پردازند به‌طـوری‌کـه محاسـبه PSVD بـرای ماتریس‌های n ×۱ و۱×n به‌شرط ۱ ≠n ، قابل محاسبه نخواهد بود . در بخش پایانی نیز به طراحی اکولایزر و پیش‌کـد گذار در سیستم‌های SISO[5] می‌پردازیم به‌طوری‌که ابتدا CCI[6] اعمـال شـده بـه سیسـتم فرسـتنده MIMO[7]، بـا محاسـبه BSVD[8] از خواهد رفت که در ادامه با طراحی اکولایزر و پیش‌کد گذاری، باعـث کـاهش ISI[9] مـابین کانـال‌هـای فرعـی خواهد شد.

---

[1] Polynomial singular value decomposition
[2] Polynomial QR-decomposition
[3] Polynomial Eigen value decomposition
[4] Sequential Best Rotation
[5] Single Input Single Output
[6] co-channel interference
[7] Multi Input Multi Output
[8] Broadband SVD
[9] inter-symbol interference

فصل اول: مقدمه

امروزه مبحث PSVD (تجزیه مقادیر تکین چند جمله‌ای) آن‌چنان از اهمیت خاصی برخوردار است که اکثریت محققین و تشنگان علم، به دنبال ارائه روش‌های مختلفی برای تجزیه مقادیر تکین چند جمله‌ای می‌باشند که این مبحث درزمینه‌های گوناگون علمی و ... کاربردهای فراوانی دارد.

برای تهیه‌ی این پایان‌نامه، مقالات متعددی مطالعه شد و سپس ما روش‌های مختلفی که توسط افراد خبره در این زمینه ارائه شده بود را مورد بررسی قرار داده و با نتایج به‌دست آورده مورد مقایسه قرار دادیم.

اکثر روش‌های پیشنهادی در مقالات گوناگون، نشان دهنده‌ی این است که فرد یا افرادی روشی را برای تجزیه‌ی مقادیر تکین چند جمله‌ای ارائه داده و سپس فرد و افراد دیگری، آن روش قبلی را بهبود بخشیده و یا از آن استفاده نموده و روش‌های جدید دیگری را ارائه داده‌اند.

ضمناً لازم است که بدانیم اکثر مقالات مرتبط با مبحث PSVD، این مبحث را در اکثر سیستم‌های مخابراتی و کنترلی و ... به صورت کاربردی (مثلا تخمین کانال و ...) استفاده نموده اند و مقالات اندکی وجود داشتند که به خود بحث PSVD و روش‌های موجود برای تجزیه مقادیر تکین چند جمله‌ای بپردازند.

از جمله روش‌هایی که در عرصه‌ی PSVD ارائه شده است ، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد که در ادامه و فصل‌های بعدی به طور کامل به آن اشاره خواهد شد:

١ -محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم PQRD
٢ -محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم PEVD
٣ -محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم SBR٢
٤ -محاسبه‌ی PSVD براساس تکنیک KOGBETLIANTZ
٥ -روش پارامتریک برای محاسبه‌ی PSVD

در فصل اول، مقدمه‌ای مختصر را بیان می‌کنیم . فصل دوم حاوی توضیحات مختصری درمورد PSVD و فرمول‌بندی آن می‌باشد.

فصل سوم به بررسی روش‌های موجود در مقالات مختلف می‌پردازد که عبارتند از:

۱ –محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم PQRD

۲ –محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم PEVD

۳ –محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم SBR۲

٤ –محاسبه‌ی PSVD براساس تکنیک KOGBETLIANTZ

۵ –روش پارامتریک برای محاسبه‌ی PSVD

در فصل چهارم نیز روش‌های مستقیم پیشنهادی محاسبه‌ی PSVD را مورد بررسی قرار خواهیم داد که شامل روش‌های زیر می‌باشند:

۱– محاسبه‌ی PSVD ماتریس $W_{۲\times۲}$ (متقارن– نامتقارن)

۲– محاسبه‌ی PSVD ماتریس $W_{n\times۲}$ ($n\neq ۲$)

۳– محاسبه‌ی PSVD ماتریس $W_{۲\times n}$ ($n\neq ۲$)

٤– محاسبه‌ی PSVD ماتریس‌های $W_{۳\times n}$ و $W_{n\times۳}$ ($n\neq ۲$)

حالت یک ، به بررسی محاسبه‌ی PSVD یک ماتریس ۲× ۲ (متقارن– نامتقارن) می‌پردازد که به نتایج قابل توجهی دست خواهیم یافت. در حالت دو، به بررسی محاسبه‌ی PSVD یک ماتریس $n \times ۲$ (بجز $n=۲$) خواهیم پرداخت که در این حالت نیز درمی‌یابیم که محاسبه‌ی PSVD یک ماتریس ۲×۱ امکان‌پذیر نخواهد بود. در حالت سه نیز به بررسی محاسبه‌ی PSVD یک ماتریس $۲ \times n$ (بجز $n=۲$) خواهیم پرداخت که در این حالت درمی‌یابیم که محاسبه‌ی PSVD یک ماتریس ۱ × ۲ نیز امکان‌پذیر نخواهد بود و حالت چهارم نیز به بررسی محاسبه‌ی PSVD ماتریس‌های $W_{۳\times n}$ و $W_{n\times۳}$ ($n\neq ۲$) خواهد پرداخت. فصل پنجم به کاربرد PSVD خواهد پرداخت.

فصل ششم نیز به جمع بندی ، نتیجه‌گیری و پیشنهادات اختصاص می‌یابد و در انتها، مراجع بررسی شده معرفی می‌شود.

ماتریس‌های چند جمله‌ای ، ماتریس‌هایی با المان‌های چند جمله‌ای می‌باشند[۱] که غالباً به‌طور گسترده در فضاهای کنترلی استفاده می‌شده‌اند [۹] و در چند سال گذشته ، به‌صورت گسترده در زمینه‌ی پردازش سیگنال دیجیتال و مخابرات استفاده می‌شوند [۱]. کاربردهای دیگر این ماتریس‌ها، شامل پردازش آرایه حسی وفقی باند پهن [۱۶,۱۰,۷]، کانال‌های مخابراتی MIMO [۱۲,۱۳] ، تطبیق باند پهن [۱۷,۱۸] ، فیلتر بانک‌های دیجیتال برای کدینگ زیرباند [۲۰,۱۹,۷] و فشرده سازی داده‌ها می‌باشد.

ضمناً ماتریس‌های چند جمله‌ای به‌عنوان توصیف کننده‌ی ماتریس کانال باند پهن در سیستم‌های MIMO مورد استفاده قرار می‌گیرند که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$W(z) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2} W(\tau)\, Z^{-\tau} = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & \cdots & W_{1q}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{p1}(z) & \cdots & W_{pq}(z) \end{bmatrix} \qquad (۱-۲)$$

وقتی‌که $t_1 \in \mathbb{Z}$و t_2 به ترتیب به‌عنوان تاخیر پایین و بالا تعریف شده و به‌صورت زیر خواهند بود:

$$w_{jk}(z) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2} w_{jk}(\tau)\, Z^{-\tau} \qquad (۲-۲)$$

برای ماتریس چند جمله ای $W(z)$ در معادله‌ی ۲-۱، که با کمیت $(t_2 - t_1)$ تعریف می‌شود خواهیم داشت[۲،۳]:

$\tilde{W}(z) = W_*^T(1/z)$: پاراکانجوگیت[۱] ماتریس چند جمله‌ای $W(z)$

ماتریس $W(z)$ پارایونیتاری[۲] است اگر $\tilde{W}(z)W(z) = I_p$ و $W(z)\tilde{W}(z) = I_p$

ماتریس $W(z) \in \mathbb{C}^{p\times p}$ پاراهرمیتین[۳] است اگر $\tilde{W}(z) = W(z)$

۱ Para-Conjugate
۲ Para-Unitary
۳ Para-Hermitian

۲-۱- SVD ماتریس‌های چند جمله‌ای

SVD یک ماتریس چند جمله‌ای (PSVD) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$U^{H}(z^{-1})\, W(z)\, V(z^{-1}) = S(z) \qquad (۲-۳)$$

$U \epsilon\mathbb{C}^{p\times p}$ و $V \epsilon\mathbb{C}^{p\times p}$: ماتریس‌های چند جمله‌ای پارایونیتاری

$S \epsilon\mathbb{C}^{p\times p}$: ماتریس چند جمله‌ای قطری

W یک ماتریس چند جمله‌ای M×N [شامل المان‌های چند جمله‌ای از z^{-1}] می‌باشد.

$$W(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & \cdots & W_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{M1}(z) & \cdots & W_{MN}(z) \end{bmatrix} = W^{(0)} + W^{(1)}z^{-1} + W^{(2)}z^{-2} + \cdots + W^{(L-1)}z^{-L+1} \qquad (۲-٤)$$

که به عنوان مثال ، PSVD کانال MIMO به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_{M\times N}=U_{M\times M}S_{M\times N}V^{H}_{N\times N} \qquad (۲-۵)$$

$$\text{When} \quad U^{H}(z^{-1})U(z) = I, \quad V^{H}(z^{-1})V(z) = I \qquad (۲-٦)$$

M (آنتن گیرنده) و N (فرستنده‌ی خط اتصال)

$S(z)=U^{H}(z^{-1})\, W(z)V(z^{-1})$: (ماتریس قطری شامل مقادیر تکین از W)

$U(z) =W(z)\, V(z^{-1})S^{-1}(z)$: (ماتریس اورتونرمال[1] شامل ستون‌های بردارتکین چپ وپارایونیتاری)

$V^{H}(z)=S^{-1}(z)U^{H}(z^{-1})\, W(z)$: (ماتریس اورتونرمال شامل ستون‌های بردارتکین راست و پارایونیتاری)

که در فرمول‌های به‌دست آمده‌ی بالا، بردارهای U و V به ترتیب به عنوان اکولایزر [2] و پیش‌کد گـذار[3] در حـذف ICI در کانال MIMO مسطح، به کار می‌روند.

[1] orthonormal
[2] equalizer
[3] precoder

فصل سوم: روش‌های ارائه شده برای محاسبه‌ی PSVD

در این فصل، ما به طور مختصر به بررسی روش‌های محاسبه‌ی PSVD توسط مقالات مطالعه شده، خـواهیم پرداخـت و این روش‌ها را معرفی و بررسی خواهیم کرد.

۳-۱- محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم PEVD

الگوریتم PEVD که بیشتر مواقع برای محاسبه‌ی PSVD ماتریس‌های اسکالر استفاده می‌شده است ، جدیـداً بـه‌عنـوان الگوریتم محاسبه‌ی EVD ماتریس‌های چند جمله‌ای [۲] برای محاسبه‌ی PSVD به‌کار مـی‌رود و مطـابق معادلـه‌ی ۲-۳، با محاسبه‌ی دو ماتریس پاراهرمیتین $W(z)\widetilde{W}(z) \epsilon \mathbb{C}^{p\times p}$ و $\widetilde{W}(z)\, W(z) \epsilon \mathbb{C}^{p\times p}$ فرمول‌بندی می‌شود.

PEVD هر یک از این ماتریس‌های پاراهرمیتین بالا، مطابق معادله‌ی ۲-۲ محاسبه شده و باعث تولیـد بردارهـای تکـین چپ (V) و راست (U) می‌شود که در زیر مشاهده می‌کنید:

$$\widetilde{U}(z)W(z)\widetilde{W}(z)\, U\,(z) = S(z)\widetilde{S}(z) \qquad (۳-۱)$$

$$\widetilde{V}\,(z)\, \widetilde{W}(z)\, W(z)\, V(z) = \widetilde{S}(z)\, S(z) \qquad (۳-۲)$$

خواهیم دید که ماتریس‌های به دست آمده بالا تقریباً قطری‌اند که سرانجام تقریبی از این ماتریس‌ها، بـا مـاتریس چنـد جمله‌ای W(z) محاسبه شده و باعث تولید دو ماتریس پارایونیتاری U و V می‌شود.

۳-۲- محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم PQRD

روشی که اخیراً آتورز[۱] برای محاسبه‌ی PSVD پیشنهاد داده است ، براساس تجزیه‌ی QR ماتریس چند جمله‌ای (PQRD) ، فرمول‌بندی شده است که این روش با استفاده از الگوریتم ارائه شده در [۳,٤] برای محاسبه‌ی تجزیه QR ماتریس چند جمله‌ای به کار می‌رود .

برای محاسبه‌ی PSVD با استفاده ازالگوریتم PQRD، ابتدا ماتریس چند جمله‌ای W(z) ، به یک ماتریس بالا مثلثی و سپس به ماتریس پایین مثلثی تبدیل می‌شود و این فرایند ادامه خواهد داشت که در نهایت به یک ماتریس چند جمله-ای قطری همگرا خواهد شد.

در ابتدا با فرض معادله‌ی زیر، الگوریتم آغاز می‌شود:

$$W(z) = W_{۱}(z) \qquad (۳-۳)$$

که فرآیند در i اُمین تکرار از الگوریتم مورد نظر انجام می‌شود که i اُمین تکرار با محاسبه‌ی PQRD ماتریس $W_{۱}$ به صورت زیر اجرا می‌شود :

$$U_i(z)\, W_i(z) = R_{۱}(z) \qquad (٤-۳)$$

طبق معادله‌ی بالا، $U_i \in \mathbb{C}^{p\times p}$ پارایونیتاری و $R_{۱} \in \mathbb{C}^{p\times q}$ یک ماتریس چند جمله‌ای حدوداً بالا مثلثی است.

در ادامه، ماتریس چند جمله‌ای پایین مثلثی $\widetilde{R_{۱}} \in \mathbb{C}^{q\times p}$ به صورت زیر فرمول‌بندی خواهد شد:

$$V_i(z)\, \widetilde{R_{۱}}(z) = R_{۲}(z) \qquad (٥-۳)$$

طبق معادله‌ی بالا، $V_i \in \mathbb{C}^{q\times q}$ پارایونیتاری و $R_{۲} \in \mathbb{C}^{q\times p}$ بالا مثلثی است.

در ادامه با تنظیم معادله‌ی زیر، فرایند ادامه می یابد:

$$W_{i+۱}(z) = R_{۲}(z) \qquad (٦-۳)$$

و تا زمانی که به شرط توقف زیر برسیم، معادله‌ی بالا تکرار خواهد شد :

$$\left|[W_{i+۱}(z)]_{jkt}\right| < \varepsilon \;, j\neq k \quad \forall t\in\mathbb{Z}\,, j = ۱,\dots,p\,, k = ۱,\dots,q \qquad (۷-۳)$$

که شرط بالا نشان دهنده‌ی ضریب z^{-t} در (j,k) اُمین عنصر از $W_{i+۱}(z)$ و $\varepsilon > ۰$ ، یک مقدار کوچک بالقوه است.

[۱] authors

اگر فرض کنیم که الگوریتم به N چرخش نیاز دارد تا همگرا شود (طبق معادله‌ی ۳-۷) ، تجزیه کلی به صورت زیر انجام می‌شود :

$$U_N(z)\ldots U_1(z)W(z)\ \widetilde{V}_1(z)\ \ldots\ \widetilde{V_N}(z) = W_N(z) \quad (۳-۸)$$

که مطابق معادله‌ی به‌دست آمده بالا، $W_N \ \epsilon\mathbb{C}^{p\times q}$ یک ماتریس چند جمله‌ای حدوداً قطری می باشد و در نتیجه معادلات زیر هر دو دارای ساختار پارایونیتاری خواهند بود:

$$U(z) = U_N(z)\ldots U_1(z) \quad (۳-۹)$$

$$V(z) = \ \widetilde{V}_1(z)\ \ldots\ \widetilde{V_N}(z) \quad (۳-۱۰)$$

ما فقط در این بخش به طور خلاصه به بیان روش‌های محاسبه‌ی PSVD پرداختیم و لذا برای توضیحات کامل الگوریتم، از جمله نمونه‌های عددی و اثبات همگرایی می‌توانیم به [۲،۳] مراجعه نماییم.

۳-۳- محاسبه‌ی PSVD با استفاده از الگوریتم SBR۲

SBR۲، الگوریتمی است که می‌تواند هر ماتریس چند جمله‌ای پاراهرمیتین را با به کار بردن یک سری تبدیلات پارا یونیتاری، قطری کند [۵] و ضمناً مانند الگوریتم EVD [ماتریس‌های اسکالر]، قابل اجرا می‌باشد.
تبدیلات پارایونیتاری به‌کاررفته در الگوریتم SBR۲ اصولاً چرخشی می‌باشند که در طول هر فرایند، بعد از هر چرخشی یک تاخیر خواهد آمد که باعث اجرای این الگوریتم در یک سری از این چرخش‌ها می‌شود .

این الگوریتم که به عنوان یک روش کلی از روش ژاکوبی [۱] [محاسبه کننده‌ی EVD ماتریس‌های اسکالر] می‌باشد ، دارای دو مشکل اساسی است. اولاً این الگوریتم فقط می‌تواند از ماتریس‌های چند جمله‌ای پاراهرمیتین برای محاسبه-ی EVD استفاده کند ودر مقابل نمی‌تواند SVD ماتریس‌های غیر پاراهرمیتین را محاسبه کند. ثانیاً این الگوریتم، یک الگوریتم زنجیره ای(پیوسته)[۲] است که ما مجبوریم برای حل این مشکل، الگوریتم را به‌طور دائمی استفاده کنیم .

[۱] Jacobi
[۲] iterative

با استفاده از الگوریتم بالا می‌توانیم از PSVD به‌عنوان یک تکنیک مهم بـرای کـاهش CSI [۱] در سیســتم‌هـای MIMO اشاره کنیم که منجر به تجزیه‌ی سیستم‌های MIMO به SISO سیستم‌های OFDM[۲] خواهد شد.[۲]

با فرض داشتن ماتریس ۲×۲، ماتریس پارایونیتاری $Q_n \ \Lambda^{\tau_n}(z)$ به صورت زیر بیان خواهد شد :

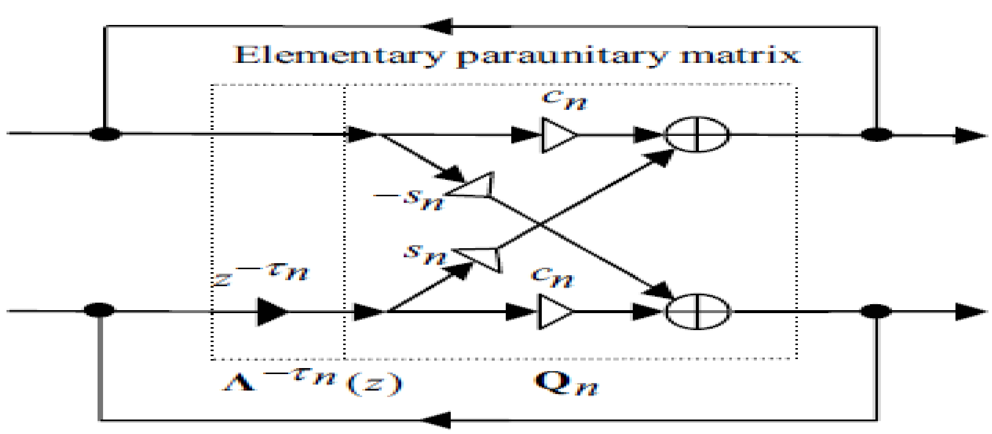
$$W(z)=Q_L\Lambda^{\tau_L}(z)+\ldots+Q_0\Lambda^{\tau_0}(z) \qquad (۱۱\text{-}۳)$$

$$\Lambda^{\tau_n}(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{\tau_n} \end{bmatrix} \qquad (۱۲\text{-}۳)$$

وقتی‌که پارامترهای عددصـحیح τ مـی‌تواننـد مثبـت یـا منفـی باشـند و ضـمناً مـاتریس Q_n مـاتریس واحـد ۲×۲ و $Q_n \ \Lambda^{\tau_n}(z)$ نیز ماتریس پارایونیتاری است.

SBR۲ ، الگوریتمی تکراری است که در هر گام ازاین الگوریتم، سیگنال‌ها به‌وسیله‌ی گام قبلی تولید می‌شوند و ضـمناً برای یافتن زمان تاخیر بهینه و ماتریس چرخش به‌کار رفته در سیگنال‌هـا، مـورد اسـتفاده قـرار مـی‌گیـرد کـه نمـایش گرافیکی این تجزیه در شکل ۳-۱ موجود است .

ماتریس چند جمله‌ای تولید شده که پارایونیتاری است، به‌وسیله‌ی معادلـه‌ی ۳-۱۱، بسـط داده خواهـد شـد کـه نشـان دهنده‌ی این است که هرگام نیز پارایونیتاری خواهد بود. شکل زیر بیانگر دیاگرامی از الگوریتم SBR۲ می‌باشد.



where $c_n=\cos\theta_n$, $s_n=\sin\theta_n$, $\theta_n \in \mathbf{R}$

Figure 2 Flow diagram of SBR2

شکل ۳-۱ – دیاگرامی از SBR۲

[۱] co-symbol interference
[۲] Orthogonal frequency-division multiplexing

۳-۳-۱- SVD ماتریس‌های چند جمله‌ای براساس الگوریتم SBR۲ [٦]

اگر ما W(k) را به عنوان تابع ضربه‌ی ماتریس چند جمله‌ای فرکانسی کانال MIMO (با N آنتن فرستنده و M آنتن گیرنده با L_c تپ) فرض کنیم، تابع انتقال Z از W(k) به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$W(z)=\sum_{k=۰}^{L-۱} W(k)\, Z^{-k} \qquad (۱۳-۳)$$

W(z) یک ماتریس چند جمله‌ای با ماکزیمم مقدار L_c است که می‌تواند به‌صورت زیر تجزیه شود:

$$W(z)=U(z)\, S(z)\, V^{H}(z) \qquad (١٤-۳)$$

که با توجه به معادلات بالا متوجه خواهیم شد که ماتریس‌های U(z) و V(z) پارایونیتاری هستند که با انجام یک سری محاسبات به معادله‌ی زیر خواهیم رسید:

$$S^{H}(z^{-۱})\, S(z)=D(z) \qquad (۱٥-۳)$$

حال برای محاسبه‌ی ماتریس‌های U و V از تجزیه جدیدی (الگوریتم تکراری) به نام الگوریتم SBR۲ استفاده می‌کنیم [این الگوریتم برای EVD ماتریس‌های چند جمله‌ای پاراهرمیتین توسعه یافته است] که در ادامه با تعریف ماتریس‌های چند جمله‌ای پاراهرمیتین زیر، الگوریتم SBR۲ اجرا خواهد شد :

$$J_۱(z)= W(z)W^{H}(z^{-۱}) \quad , U(z)=G_۱ (z) \qquad (١٦-۳)$$

$$J_۲(z)= W^{H}(z^{-۱})W(z) \quad , V(z)=G_۲ (z) \qquad (۱۷-۳)$$

۳-٤- محاسبه PSVD براساس تکنیک KOGBETLIANTZ

دربخش قبلی [۲]، ابتدا روش EVD که روشی برای تبدیل ماتریس‌های هرمیتین به ماتریس‌های چند جمله‌ای پاراهرمیتین بود را توصیف نمودیم که برای این منظور، لازم بود تعدادی از گام‌های زنجیره‌ای را به حداقل برسانیم.
در ادامه راجع به الگوریتم SBR۲ صحبت کردیم که این الگوریتم، درحقیقت کلیتی از الگوریتم ژاکوبی کلاسیک سه بُعدی متناظر با ماتریس‌های چند جمله‌ای بود که شباهت خیلی خیلی نزدیکی با تجزیه‌ی QR ماتریس‌های چند جمله-ای (PQRD) داشت[۳].
الگوریتمی که در این بخش برای محاسبه‌ی PSVD ارائه می‌شود، شکل متفاوتی ازالگوریتم SBR۲ است که تحت عنوان تکنیک KOGBETLIANTZ برای محاسبه‌ی SVD ماتریس‌های اسکالر استفاده می‌گردد. در این روش فقط از خواص یونیتاری و پارایونیتاری بودن برای محاسبه‌ی PSVD استفاده خواهیم کرد و ضمناً می‌توان از این روش به- عنوان کلیتی از الگوریتم ژاکوبی کلاسیک نیز نام برد که برای ماتریس‌های نامتقارن مربعی استفاده می‌شود [۲۲] .
برای شروع کار ابتدا ماتریس $W \epsilon\mathbb{C}^{m\times n}$ را به شرط این‌که (m>n) باشد، فرض می‌کنیم و با کمک این فرض، محاسبه‌ی SVD با استفاده از تجزیه‌ی QR(QRD) راحت تر خواهد شد (چون فقط به مقدار ثابتی از گام‌های ساختاری دقیق نیاز دارد) که در نهایت باعث تولید و محاسبه‌ی ماتریس $Q \epsilon\mathbb{C}^{m\times m}$ می‌شود و خواهیم داشت:

$$QW=\begin{bmatrix} R \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad (۱۸-۳)$$

با توجه به معادله‌ی بالا، $R \epsilon\mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس بالامثلثی با عناصر قطری حقیقی خواهد بود.
روند محاسباتی SVD با بسط دادن ماتریس R که یک ماتریس مربعی معمولی است، ادامه خواهد یافت که در ادامه ، اجراکردن یک دنباله زنجیره‌ای از تبدیلات KOGBETLIANTZ ، باعث همگرایی این ماتریس و در نهایت کاهش آن به شکل قطری خواهد شد و خواهیم داشت:

$$Q_۱RV = S \qquad (۱۹-۳)$$

با توجه به معادله‌ی بالا، $Q_۱ \epsilon\mathbb{C}^{n\times n}$ و $V \epsilon\mathbb{C}^{n\times n}$ (ماتریس یونیتاری) و $S \epsilon\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی قطری است که در نهایت معادله‌ی زیر را خواهیم داشت :

$$\widetilde{U}WV=\begin{bmatrix} S \\ \cdot \end{bmatrix} \quad , \quad U \epsilon\mathbb{C}^{m\times m} \qquad (۲۰-۳)$$

که در نتیجه ماتریس U به‌صورت زیر به دست خواهد آمد :

$$U=\begin{bmatrix} Q_۱ & \cdot \\ \cdot & I \end{bmatrix} Q \qquad (۲۱-۳)$$

ودر نهایت منجر به محاسبه‌ی SVD ماتریس W خواهد شد [۲۰].

۳-٤-۱- اصلاح الگوریتم KOGBETLIANTZ برای ماتریس‌های غیرمربعی مختلط

بافرض $m>n$ ، محاسبه‌ی SVD ماتریس $W\in\mathbb{C}^{m\times m}$ مطابق معادله‌ی (۳-۲۰) انجام می‌گیرد، با این تفاوت که برای ماتریس‌های مربعی نیاز نیست که تجزیه‌ی QR طبق معادله‌ی ۳-۱۸ انجام شود.

۳-٤-۲- تنظیم فاز ابتدایی

الگوریتم مورد نظر با تبدیل کردن ماتریس به فرمی با عناصرحقیقی در قطری اصلی ماتریس شروع می‌شود که این تبدیل به صورت حاصل‌ضرب ستون‌های j ام با $\exp(ia_j)$ (a_j فازی از W_{jj}) به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود :

$$W_{jj}=|W_{jj}|\exp(ia_j) \qquad (۳-۲۲)$$

که این شیوه به صورت یکسان برای هر ستون به کار خواهد رفت که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W\leftarrow WT \qquad (۳-۲۳)$$

با توجه به معادله‌ی بالا، $T\in\mathbb{C}^{n\times n}$ (ماتریسی قطری شامل دوران‌های فازی و واحد است).

توجه داشته باشید که $\|W\|$ ، بااین تنظیم فاز ابتدایی غیرقابل ساخت است. ($\|\ \|$ مشخص کننده شکل فروبینیوس یک ماتریس چند جمله ای [۲] است.) و ضمناً با اجرای هر تبدیل زیر دنباله، خاصیت حقیقی عناصر قطری ماتریس همچنان حفظ خواهد شد .

الگوریتم SBR جدید با تعیین محل عناصر غیر قطری غالب از W (با مقدار بزرگتر و مهمتر از بقیه) شروع می‌شود [یعنی گام نهایی در همه حال به شرط $j>n$ بستگی خواهد داشت] و با نماد w_{jk} مشخص می‌شود .

۳-٤-۳- چرخش Givens

اگر $j>n$ (درصورتی که عناصرغیر قطری غالب در قسمت بالای زیرماتریس n×n قرارگیرند) چرخش Givens مختلط ، با پارامترهای چرخش تعریف شده در زیر، اجرا خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} c & se^{i\varphi} \\ -se^{-i\varphi} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{kk} \\ w_{jk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_{kk}' \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad (۳-۲٤)$$

وقتی‌که $c=\cos\theta$ و $s=\sin\theta$ و $w_{kk}, w_{kk}'\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و خواهیم داشت:

$$-se^{-i\varphi}w_{kk}+cw_{jk}=۰ \qquad (۳-۲٥)$$

$$se^{i\varphi}w_{jk}+cw_{kk}=w_{kk}' \qquad (۳-۲٦)$$