دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته:

ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

یک روش تابع جریمه بر اساس برنامه‌ریزی دوسطحی برای حل مسائل مقدار بهین معکوس

نگارنده :

زهرا لوافیان

استاد راهنما:

دکتر حبیبه صادقی

استاد مشاور:

دکتر منصور سراج

چکیده

نام خانوادگی: لوافیان **نام:** زهرا

عنوان پایان نامه: یک روش تابع جریمه بر اساس برنامه‌ریزی دوسطحی برای حل مسائل مقدار بهین معکوس

استاد راهنما: دکتر حبیبه صادقی **استاد مشاور:** دکتر منصور سراج

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** تحقیق در عملیات

محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۸۹/۱۱/۱۰ **تعداد صفحات:** ۹۳

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی معکوس، برنامه‌ریزی دو سطحی، روش تابع جریمه، مسائل مقدار بهین معکوس، شرایط کاهن تاکر، دوگان

چکیده: این رساله به بررسی مسائل بهینه‌سازی معکوس می‌پردازد. یک مسأله بهینه‌سازی معکوس شامل تعیین پارامترهای مدل از قبیل ضرایب تابع هدف و محدودیت‌ها می‌باشد به طوری که نقطه معلومی جواب بهین مسأله برنامه‌ریزی خطی باشد. در این رساله دو نوع مسأله معکوس مورد بحث قرار گرفته و الگوریتم‌هایی برای حل آن‌ها ارائه شده است. مسأله معکوس نوع اول اختلال بردار هزینه است به طوری که یک نقطه داده شده جواب بهین مسأله نسبت به بردار هزینه‌های اختلال یافته شود. در مسأله معکوس نوع دوم مقدار بهین یک برنامه‌ریزی خطی داده شده است و هدف یافتن ضرایب تابع هدف می‌باشد به طوری که مقدار بهین تابع هدف برابر مقدار داده شده باشد. برای حل این نوع مسأله دو الگوریتم مختلف ارائه شده است، در هر دو الگوریتم مسأله برنامه‌ریزی خطی معکوس را به یک مسأله دوسطحی غیرخطی تبدیل کرده و با استفاده از روش تابع جریمه، یک تابع جریمه دقیق برای آن تعریف می‌کنیم سپس آن را به یک مسأله یک سطحی غیر خطی تبدیل می‌کنیم و با استفاده از الگوریتم ارائه شده ضرایب تابع هدف را به دست می‌آوریم. مثال‌های عددی نیز مطرح می‌شوند و عملکرد این روش‌ها در تعیین ضرایب بهین مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

تشکر و قدردانی....

ستایش او را که به من توان آموختن عطا نمود و پرتو الطاف بی کرانش را بر من تاباند. باشد که بنده شکرگزاری باشم.

بر خود واجب می دانم که مراتب سپاس و تشکر قلبی خود را به استاد راهنمای ارجمندم سرکار خانم دکتر صادقی ابراز دارم. اگر گامی برای پیمودن دانش برداشته ام مرهون راهنمایی ارزنده و ایده های سازنده این استاد گرانقدر می باشد، ایشان با وجود اندوخته علمی فراوان همواره الگوی فروتنی و خضوع برای اینجانب بوده اند.

از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر منصور سراج که با حسن خلق از هیچ گونه همکاری دریغ ننموده اند و با راهنمایی های بی چشمداشت خود در تصحیح و تدوین این رساله مرا یاری نمودند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

با تشکر از همسر عزیزم او که گرمی عشق بی پایان و آرامش همراهی بی دریغش را پاسخ نتوان گفت و خواهر و برادر عزیزم که همیشه همراه و مایه دلگرمی من بوده و هستند.

در پایان به عنوان شاگردی کوچک از همه اساتید گروه علوم ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز که در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد از وجودشان فیض بردم، سپاسگزاری می کنم.

این مجموعه هر چند کوچک از دریای بی کران علم و دانش را تقدیم می دارم و به خاطر کاستی‌هایی که به سبب ناتوانی من در آن است پوزش می طلبم.

زهرا لوافیان

فهرست مطالب

پیشگفتار

مسأله بهینه‌سازی معکوس عبارت است از تعیین مقادیر پارامترهای مدل برنامه‌ریزی خطی از قبیل ضرایب تابع هدف و قیود که در آن یک جواب بهین $x^* \in X$ داده شده و ما باید ضرایب تابع هدف، c^*، را به دست آوریم به طوری که $x^* \in X$ جواب بهین برنامه‌ریزی خطی:

$$P: \quad \{\min_x c^T x : x \in X\}$$

باشد و هم زمان بردار هزینه c^* در تعدادی شرط اضافی نیز صدق کند به عنوان مثال، به ازای هزینه مشخص و معلوم c'، انحراف $\| c^* - c' \|_p$ تحت نرم L_p مینیمم شود.
اولین بار دانشمندان ژئوفیزیک مسائل معکوس را مورد مطالعه قرار دادند. تارانتولا[۱] در سال ۱۹۸۷ در کتاب تئوری مسائل معکوس [۴۰] بحث جامعی از قضیه مسائل معکوس در علوم ژئوفیزیک ارائه داد و از آن پس توجه بسیاری از محققان به این موضوع چالش انگیز جلب شد. برای بیان جزئیات بیشتر می‌توانید به منابع [۲]، [۹]، [۱۷]، [۱۸]، [۳۸] و [۴۴] مراجعه کنید.
پالئولگو و تاکریتی [۲] [۳۷]، احمد و گوآن[۳] [۳]، تحقیقاتی در زمینه مسأله بهینه‌سازی معکوس انجام دادند، آن‌ها مسائل معکوس را به صورت زیر تعریف می‌کنند:
گیریم مسأله بهینه‌سازی خطی P و مجموعه C شامل ضرایب شدنی تابع هدف برنامه‌ریزی LP داده شده است، برای یک جواب بهین دلخواه z^* (مقدار بهین تابع هدف) باید ضرایب تابع هدف یعنی $c^* \in C$ را به گونه‌ای به دست آوریم که مقدار بهین تابع هدف P به z^* نزدیک باشد.

[۱] Trantola
[۲] Paleolgo and Takriti
[۳] Ahmed and Guan

در [۳] احمد و گوآن ثابت کردند که مسأله مقدار بهین معکوس $NP-hard$ است (مسائل $NP-hard$ مسائلی هستند که با افزایش اندک بُعد مسأله، زمان حل به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد) و بر پایه بعضی فرض‌ها جواب بهین مسأله مقدار بهین معکوس را با حل یک سری از مسائل برنامه‌ریزی‌خطی و دوسطحی به دست آوردند، هر چند بعضی فرض‌ها از قبیل اینکه مجموعه ضرایب تابع هدف C باید محدب باشد تا حدودی محدود کننده است.
این رساله شرحی بر مقاله:

" A penalty function method based on bilevel programming for solving inverse optimal value problems "

نوشته ییبینگ ال وی، ژانگ چن و ژونگ پینگ وان[۴] می باشد که در فصل اول آن به معرفی مسأله معکوس یک برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم و سپس روشی برای حل آن ارائه می‌دهیم، همچنین روشی جهت حل مسأله معکوس برنامه‌ریزی خطی کراندار، نیز ارائه می‌دهیم.
در فصل دوم به معرفی روش تابع جریمه و خواص آن برای حل مسائل برنامه‌ریزی مقید با یک مسأله نامقید می‌پردازیم، سپس به تعریف مسأله دو سطحی، خواص و کاربردهای آن پرداخته و با ارائه چند مثال به تشریح مسأله می‌پردازیم و در پایان روش‌های حل مسأله دوسطحی را به اختصار بیان می‌کنیم.
در فصل سوم دو روش برای حل مسائل مقدار بهین معکوس بر اساس برنامه‌ریزی دو سطحی ارائه می‌دهیم و در پایان با ذکر چند مثال، به شرح الگوریتم‌ها می‌پردازیم.

---
[۴] Yibin Lv, Zhong Chen And Zhongping Wan

فصل ۱

بهینه‌سازی معکوس

در این فصل مسأله بهینه‌سازی معکوس تحت نرم L_1 را در نظر گرفته، نشان می‌دهیم اگر یک مسأله برنامه‌ریزی خطی LP داشته باشیم آن‌گاه مسأله معکوسش تحت نرم L_1، یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است، سپس دوگان مسأله معکوس LP را به دست می‌آوریم و با استفاده از جواب مسأله معکوس دوگان مقدار بردار هزینه بهین مسأله را به دست می‌آوریم.

۱.۱ تعریف مسأله

در این فصل مسائل بهینه‌سازی معکوسی را که به صورت زیر تعریف می‌شوند مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} LP: \quad & \min \quad cx \\ & \text{S.t.} \quad x \in S \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که در آن S مجموعه جواب‌های شدنی مسأله و c یک بردار هزینه مشخص می‌باشد. فرض کنید بردار x^* داده شده باشد. نقطه شدنی x^* ممکن است یک جواب بهین مسأله (۱.۱) به ازای بردار

هزینه c، باشد یا نباشد.
به ازای بردار هزینه d، $LP(d)$ را حالتی از مسأله (۱.۱) تعریف می‌کنیم که در آن بردار هزینه c با d جایگزین شده است یعنی:

$$LP(d): \quad \min \quad dx \qquad (۲.۱)$$
$$\text{S.t.} \quad x \in S$$

یک مسأله بهینه‌سازی معکوس با نرم L_p بردار هزینه‌ای مانند d را تعیین می‌کند به طوری که x^* جواب بهین $LP(d)$ است و عبارت زیر مینیمم شود:

$$\| d - c \|_p = [\sum_{j \in J} |d_j - c_j|^p]^{\frac{1}{p}}$$

که در آن J مجموعه اندیس‌های متغیرهای x_j را نشان می‌دهد.
به عبارت دیگر مسأله بهینه‌سازی معکوس، اختلال بردار هزینه c به d است به طوری که x^* یک جواب بهین نسبت به بردار اختلال داده شده است ومجموع اختلال‌ها باید مینیمم شود.

۲.۱ دوگان و قضایای مربوط به آن

در این بخش به معرفی مسائل دوگان و خواص آن و همچنین شرایط کروش-کاهن-تاکر می‌پردازیم که از آن‌ها در اثبات قضایا و رسیدن به الگوریتم‌های حل مسأله استفاده شده است. اثبات تمام نتایج و قضایا و لم‌های این بخش در منبع [۱۲] موجود می‌باشد.

۱.۲.۱ فرمول بندی مسأله دوگان

متناظر با هر مسأله برنامه خطی مسأله دیگری وجود دارد که مسأله دوگان نامیده می‌شود. برنامه‌خطی دوگان تعدادی ویژگی مهم مرتبط با برنامه‌ریزی خطی اولیه دارد. دو شکل مهم از مسأله دوگان وجود دارد: شکل متعارفی و شکل استاندارد که در اینجا به شرح شکل متعارف آن می‌پردازیم.
شکل متعارفی دوگان

فرض کنید که برنامه‌ریزی خطی اولیه به شکل متعارف زیر داده شده باشد:

$$\begin{aligned} P: \quad \min \quad & c^T x \\ \text{S.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq \text{۰} \end{aligned}$$

طبق تعریف برنامه خطی دوگان متناظر با LP فوق برابر است با:

$$\begin{aligned} D: \quad \max \quad & wb \\ \text{S.t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq \text{۰} \end{aligned}$$

توجه داریم که دقیقاً یک متغیر دوگان برای هر محدودیت اولیه و دقیقاً یک محدودیت دوگان نظیر هر متغیر اولیه وجود دارد.
در شکل ۱.۱ روابط بین مسائل اولیه و دوگان در شکل‌های مختلف به طور خلاصه در جدولی بیان شده است که با استفاده از آن به راحتی می‌توان دوگان اشکال مختلف برنامه‌های خطی با هر نوع محدودیتی را به دست آورد.

لم ۱.۲.۱. *دوگانِ دوگان یک برنامه خطی، مسأله اولیه است.*

لم ۲.۲.۱. *مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مسأله مینیمم سازی همواره بزرگ‌تر یا مساوی مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مسأله ماکزیمم سازی است.*

مسأله ماکزیمم سازی			مسأله مینیمم سازی	
محدودیت ها	$\leqslant$	$\longleftrightarrow$	$\geqslant 0$	متغیرها
	$\geqslant$	$\longleftrightarrow$	$\leqslant 0$	
	$=$	$\longleftrightarrow$	نا مقید	
متغیرها	$\geqslant 0$	$\longleftrightarrow$	$\geqslant$	محدودیت ها
	$\leqslant 0$	$\longleftrightarrow$	$\leqslant$	
	نا مقید	$\longleftrightarrow$	$=$	

شکل ۱.۱: روابط بین مسائل اولیه و دوگان

۳.۱ شرایط بهینگی کروش-کاهن - تاکر (KKT)

شرایط کروش-کاهن - تاکر (KKT) استخوان بندی برنامه‌های غیرخطی را تشکیل می‌دهد. این شرایط برای بهینگی مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی مشتق پذیر که در شرایط معینی صدق کنند شرط لازم هستند و برای بهینگی بعضی مسائل برنامه‌ریزی مشتق پذیر که در خاصیت‌های محدب پذیری تعمیم‌یافته صادق باشند، شرایط کافی نیز هستند. در مسائل برنامه‌ریزی خطی این شرایط هم لازم و هم کافی هستند و لذا مشخصه مهمی از بهینگی را فراهم آورده و کاربردهای گسترده‌ای دارند.

۱.۳.۱ شرایط (KKT) در مسائل خطی با محدودیت‌های نامساوی

مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{S.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

که در آن c یک بردار n مؤلفه‌ای، b یک بردار m مؤلفه‌ای و A یک ماتریس $m \times n$ است. حال دوگان آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T b \\ \text{S.t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

شرایط KKT را می‌توان به طور معادل به صورت شرط بهینگی جواب (x, w, v) برای سیستم زیر بیان کرد.

$$Ax \geq b, \quad x \geq 0 \tag{۳.۱}$$

$$wA + v = c, \quad w \geq 0, \quad v \geq 0 \tag{۴.۱}$$

$$w(Ax - b) = 0, \quad vx = 0 \tag{۵.۱}$$

که در آن w و v ضرایب لاگرانژ (یا متغیرهای دوگان) به ترتیب متناظر با محدودیت‌های $Ax \geq b$ و $x \geq 0$ می‌باشند. شرط (۳.۱) صرفاً می‌گوید که نقطه مورد نظر باید شدنی باشد. یعنی در محدودیت‌های مسأله اولیه صدق کند. این شرط معمولاً شرط شدنی بودن مسأله اولیه گفته می‌شود. شرط (۴.۱) معمولاً به شرط شدنی بودن مسأله دوگان اطلاق می‌شود. سرانجام شرط (۵.۱) را شرط مکمل زائد می‌نامند.

نتیجه ۱.۳.۱. *اگر x_0 و w_0 جواب‌های شدنی اولیه و دوگان باشند به نحوی که $cx_0 = w_0 b$، آن‌گاه x_0 و w_0 جواب‌های بهین مسائل اولیه و دوگان هستند.*

نتیجه ۲.۳.۱. *اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان مقدار تابع هدف نامتناهی داشته باشد، آن‌گاه دیگری جواب شدنی ندارد.*

خاصیت همزادی قوی:

اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهین متناهی داشته باشد، آن‌گاه هر دو مسأله جواب بهین دارند و مقادیر تابع هدف بهین آن‌ها مساوی است.

قضیه مکمل زائد:

فرض کنید x^* و w^* جواب‌های شدنی دلخواه مسائل اولیه و دوگان در شکل متعارفی باشند، پس آن‌ها به ترتیب بهینه هستند اگر و فقط اگر:

$$(c_j - w^* a_j)x_j^* = ۰, \quad j = ۱, \ldots, n$$
$$w_i^*(a^i x^* - b_i) = ۰, \quad i = ۱, \ldots, m$$

این قضیه مهم مسائل اولیه و دوگان را به هم ارتباط می‌دهد. واضح است که حداقل یکی از دو جمله در هر بسط باید صفر باشد.

۴.۱ فرمول‌بندی مسأله برنامه‌ریزی خطی معکوس

در این بخش قصد داریم مدل بندی معکوس یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تحت نرم $L_۱$ را شرح دهیم. مسأله LP زیر رادر نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j\in J} c_j x_j \\ \text{S.t.} \quad & \sum_{j\in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i \in I \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

که در آن J مجموعه اندیس‌های بردار تصمیم گیری x و I مجموعه اندیس‌های محدودیت‌ها را نشان می‌دهد، توجه کنید که شرط نامنفی بودن روی متغیرهای x اعمال نشده است، در صورت وجود قیود نامنفی بودن روی متغیرها، می‌توان آن‌ها را در مجموعه محدودیت‌های مسأله (۶.۱) گنجاند. حال π_i را متغیر دوگان متناظر با iامین محدودیت مسأله (۶.۱) در نظر می‌گیریم و دوگان آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i\in I} b_i \pi_i \\ \text{S.t.} \quad & \sum_{i\in I} a_{ij} \pi_i = c_j \qquad \forall j \in J \\ & \pi_i \geq ۰ \quad \forall i \in I \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

اگر x جواب بهین (۶.۱) و π جواب بهین (۷.۱) باشد، طبق خاصیت همزادی قوی هردوی آنها در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{j\in J} c_j x_j = \sum_{i\in I} b_i \pi_i \qquad (۸.۱)$$

سپس با استفاده از قضیه مکمل زائد برای جواب‌های x و π، داریم:

$$\forall i \in I \quad \text{اگر} \quad \sum_{j\in J} a_{ij} x_j > b_i \quad \text{آن‌گاه} \quad \pi_i = ۰ \qquad (۹.۱)$$

فرض کنیم x^* جواب شدنی (۶.۱) باشد، می‌خواهیم ببینیم به ازای چه اختلال‌هایی در بردار هزینه c، x^* جواب بهین مسأله (۶.۱) خواهد شد؟ یادآوری می‌کنیم برنامه‌ریزی خطی (۶.۱)، که در آن c_jها با d_jها جایگزین شده اند با $LP(d)$ نمایش داده می‌شود. بردار d را جواب شدنی معکوس نسبت به x^* گوییم اگر x^* یک جواب بهین $LP(d)$ باشد. معکوس LP نسبت به جواب x^* تحت نرم L_P را با $INV(LP, x^*, p)$ نشان می‌دهیم. حال توجه کنید که x^* یک جواب بهین $LP(d)$ است اگر و تنها اگر یک جواب دوگان π وجود داشته باشد که در قیود مسأله (۷.۱) با جایگزینی c_j با d_j صدق کند و زوج مرتب (x^*, π) نیز در شرایط مکمل زائد صدق کند.

نتیجه ۱.۴.۱. *بردار هزینه d را یک جواب شدنی معکوس برای مسأله (۶.۱) نسبت به جواب x^* گویند اگر و فقط اگر یک جواب دوگان π وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند.*

۱ . *جواب دوگان π در مسأله دوگان با جایگزینی c_j با d_j صدق کند.*

۲ . *زوج مرتب (x^*, π) در شرایط بهینگی (۸.۱) و (۹.۱) صدق کند.*

فرض کنیم $D(LP, x^*)$ مجموعه بردارهای هزینه شدنی معکوس برنامه‌ریزی خطی LP را نشان دهد. ادغام نتیجه ۱.۴.۱ با (۸.۱) نتیجه می‌دهد $D(LP, x^*)$ شامل همه بردارهای هزینه d است

که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{i\in I} a_{ij}\pi_i = d_j, \qquad \forall j \in J \tag{۱۰.۱}$$

$$\sum_{j\in J} c_j x_j^* = \sum_{i\in I} b_i \pi_i \tag{۱۱.۱}$$

$$\pi_i \geq ۰ \quad \forall i \in I \tag{۱۲.۱}$$

متناوباً ادغام نتیجه ۱.۴.۱ با (۹.۱) نتیجه می‌دهد که $D(LP, x^*)$ شامل همه dهایی است که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I} a_{ij}\pi_i = d_j && \forall j \in J \\ &\pi_i \geq ۰, && \forall i \in I \\ &\pi_i = ۰ \quad \text{آن‌گاه} \quad \sum_{j\in J} a_{ij}x_j^* > b_i \quad \text{اگر} && \forall i \in I \end{aligned} \tag{۱۳.۱}$$

فرض کنیم مجموعه B اندیس‌های محدودیت‌های فعال نسبت به جواب x^* را نشان دهد(مجموعه همه $i \in I$ که در رابطه $\sum_{j\in J} a_{ij}x_j^* = b_i$ صدق می‌کنند) با استفاده از این موضوع می‌توانیم شرط آخر (۱۳.۱) را به صورت زیر خلاصه کنیم:

$$\pi_i = ۰ \quad \forall i \notin B$$

با جایگذاری $\pi_i = ۰$ برای هر $i \notin B$ در (۱۳.۱) نتیجه زیر برای $D(LP, x^*)$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i = d_j && \forall j \in J \\ &\pi_i \geq ۰ && \forall i \in B \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

رابطه (۱۴.۱) در مقایسه با (۱۳.۱) مختصرتر است بنابراین در ادامه بحث (۱۴.۱) را به کار می‌بریم.

نتیجه ۲.۴.۱. *مجموعه بردارهای هزینه شدنی معکوس $D(LP, x^*)$، شامل همه dهایی است که در محدودیت‌های زیر صدق می‌کنند:*

$$\sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i = d_j \quad \forall j\in J$$
$$\pi_i \geq \cdot \quad \forall i\in B$$

که B مجموعه اندیس‌های محدودیت‌های فعال نسبت به جواب x^* است.

مسأله معکوس $INV(LP, x^*, p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\min \parallel d - c \parallel_p \\ &\text{S.t.} \quad d \in D(LP, x^*) \end{aligned} \qquad (۱۵.۱)$$

چون $\min[\sum_{j\in J} |d_j - c_j|^p]^{\frac{1}{p}}$ با $\min \sum_{j\in J} |d_j - c_j|^p$ معادل است، مسأله معکوس را می‌توان به صورت معادل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j\in J} |d_j - c_j| \\ &\text{S.t.} \quad \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i = d_j \quad \forall j\in J \\ &\qquad \pi_i \geq \cdot \qquad\qquad \forall i\in B \end{aligned} \qquad (۱۶.۱)$$

توجه کنید که محدودیت‌های مسأله معکوس $INV(LP, x^*, p)$ رابطه نزدیکی با محدودیت‌های دوگان مسأله LP دارند(مشابه محدودیت‌های به دست آمده به وسیله تغییر بردارهای سمت راست از c به d و قرار دادن $\pi_i = \cdot$ به ازای هر $i \notin B$، هستند).
واضح است که تابع $\sum_{j\in J} |d_j - c_j|^p$ بر حسب بردار هزینه d محدب است، بنابراین نشان دادیم که معکوس مسأله برنامه‌ریزی خطی یک برنامه‌ریزی ریاضی است که در آن تابع هدف محدب و محدودیت‌ها خطی هستند.

۵.۱ حل مسأله برنامه‌ریزی خطی معکوس تحت نرم L_1

فرض کنید مسأله برنامه‌ریزی خطی (۶.۱) داده شده و می‌خواهیم $INV(LP, x^*, p)$ را تحت نرم L_1 حل کنیم. در بخش قبل نشان دادیم که حل مسأله $INV(LP, x^*, p)$ به حل مسأله (۱۶.۱) منجر می‌شود که این مسأله یک برنامه‌ریزی خطی نیست اما به راحتی با استفاده از تبدیل استاندارد می‌توان آن را به فرم خطی تبدیل کرد.

با توجه به اینکه قدرمطلق هر مقدار نامنفی را می‌توان به صورت مجموع دو مقدار نامنفی نوشت به راحتی می‌توان فهمید که $\min |d_j - c_j|$ معادل است با:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_j + \beta_j \\ \text{S.t.} \quad & d_j - c_j = \alpha_j - \beta_j \\ & \alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $d_j = \alpha_j - \beta_j + c_j$. این تغییرات را در مسأله برنامه‌ریزی خطی معکوس (۱۶.۱) به ازای $p = 1$ اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j\in J} \alpha_j + \sum_{j\in J} \beta_j \\ \text{S.t.} \quad & \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i - \alpha_j + \beta j = c_j \quad \forall j \in J \\ & \pi_i \geq 0 \qquad \forall i \in B \\ & \alpha_j, \beta_j \geq 0 \quad \forall j \in J \end{aligned} \tag{۱۷.۱}$$

یا به طور معادل:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_{j\in J}\alpha_j - \sum_{j\in J}\beta_j \\ \text{S.t.} \quad & \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i - \alpha_j + \beta j = c_j \quad \forall j\in J \\ & \pi_i \geq ۰ \quad \forall i\in B \\ & \alpha_j,\beta_j \geq ۰ \quad \forall j\in J \end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

توجه کنید که در جواب بهین مسائل معادل (۱۷.۱) و (۱۸.۱)، α_j,β_j هر دو به طور هم زمان نمی‌توانند مقادیر مثبت بگیرند، چون دراین صورت می‌توانیم از هر دوی آن‌ها یک مقدار کوچک δ بدون نقض کردن هیچ کدام از محدودیت‌ها، در جهت بهتر شدن اکید مقدار تابع هدف، کم کنیم. محدودیت اول مسأله (۱۸.۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-\alpha_j + \beta_j = c_j^\pi \quad \forall j\in J$$

که در آن $c_j^\pi = c_j - \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i$ و برای آن سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: $c_j^\pi > ۰$

نامنفی بودن α_j,β_j و این حقیقت که تنها یکی از آن‌ها می‌تواند مثبت باشد، نتیجه می‌دهد که $\alpha_j = ۰$ و $\beta_j = c_j^\pi = |c_j^\pi|$، علاوه بر این $d_j = c_j + \alpha_j - \beta_j = c_j - |c_j^\pi|$.

حالت ۲: $c_j^\pi < ۰$

نامنفی بودن α_j,β_j و این حقیقت که تنها یکی از آن‌ها می‌تواند مثبت باشد، نتیجه می‌دهد که $\beta_j = ۰$ و $\alpha_j = -c_j^\pi = |c_j^\pi|$، علاوه بر این $d_j = c_j + \alpha_j - \beta_j = c_j + |c_j^\pi|$.

حالت ۳: $c_j^\pi = ۰$

دراین حالت، $\alpha_j = \beta_j = ۰$ و $d_j = c_j$.

آنالیز این حالت‌ها به ما اجازه می‌دهد (۱۸.۱) را به صورت زیر فرمول بندی کنیم:

$$\max \quad -\sum_{j\in J}|c_j^\pi| \tag{19.1}$$
$$\text{S.t.} \quad \pi_i \geq 0 \quad \forall i \in B$$

که در آن $c_j^\pi = c_j - \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i$.

به عبارت دیگر مسأله معکوس محاسبه $\pi_i \geq 0$ به ازای هر $i \in B$، است به طوری که مجموع مقادیر اختلال بردارهای هزینه مینیمم شود.

به فرمول بندی‌های (۱۸.۱) یا (۱۹.۱) عبارت معکوس اولیه [1] را نسبت می‌دهیم. آنالیز حالت‌های قبل نتیجه می‌دهد که اگر π جواب بهین (۱۸.۱) یا (۱۹.۱) باشد آن‌گاه بردار هزینه بهین d^* با استفاده از روابط زیر:

$$d_j^* = \begin{cases} c_j - |c_j^\pi| & \text{if } c_j^\pi > 0 \\ c_j + |c_j^\pi| & \text{if } c_j^\pi < 0 \\ c_j & \text{if } c_j^\pi = 0 \end{cases} \tag{20.1}$$

به دست می‌آید. توجه کنید اگر $c_j^\pi > 0$ باشد آن‌گاه می‌توانیم هزینه متغیر x_j را $|c_j^\pi|$ واحد کاهش دهیم تا هزینه اصلاح شده اش به صفر برسد. به طور مشابه اگر $c_j^\pi < 0$ باشد آن‌گاه می‌توانیم هزینه متغیر x_j را $|c_j^\pi|$ واحد افزایش دهیم تا هزینه اصلاح شده اش به صفر برسد و در پایان اگر $c_j^\pi = 0$ باشد هزینه متغیر x_j را تغییری نمی‌دهیم، زیرا هزینه اصلاح شده‌اش صفر است. بنابراین وقتی هزینه متغیرها طبق روابط (۲۰.۱) اصلاح شدند، هزینه اصلاح شده همه متغیرها صفر می‌شود.

توضیحات قبل به ما اجازه می‌دهد مسأله معکوس را تعیین بردار $\pi \geq 0$ تعبیر کنیم به طوری که هزینه‌های اصلاح شده همه متغیرها صفر شود و مجموع تغییرات هزینه‌های اصلاح شده مینیمم شود. بحث قبل را می‌توان در قالب قضیه زیر خلاصه کرد:

[1] primal inverse

قضیه ۱.۵.۱. *فرض کنیم LP زیر را داریم:*

$$\begin{aligned} LP: \quad & \min \quad \sum_{j\in J} c_j x_j, \\ & S.t. \quad \sum_{j\in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

اگر x^* یک جواب شدنی LP باشد و $B \subseteq I$ مجموعه اندیس‌های محدودیت‌های فعال نسبت به x^* را نشان دهد. آن‌گاه مسأله معکوس اولیه تحت نرم L_1 پیدا کردن $\pi_i \geq 0$ از برنامه‌ریزی زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \quad -\sum_{j\in J} |c_j^\pi| \\ & S.t. \quad \pi_i \geq 0 \quad \forall i \in B \end{aligned}$$

که در آن $c_j^\pi = c_j - \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i$ و بردار هزینه بهین d^* به وسیله (۲۰.۱) بدست می‌آید.

در فرمول بندی (۱۹.۱) فرض کردیم همه محدودیت‌ها در (۶.۱) به صورت "$\geq$ " هستند و این منجر به ایجاد محدودیت نامنفی بودن روی متغیرهای π شد، حال اگر در (۶.۱) محدودیت iام به شکل "$\leq$ " باشد آن‌گاه متغیر π_i متناظر با آن نامثبت و اگر قیود مسأله (۶.۱) محدودیت‌هایی به شکل "$=$ " داشت، متغیرهای متناظرش نامقید خواهند شد.

ما نشان دادیم که می‌توانیم مسأله معکوس را با حل (۱۸.۱) یا (۱۹.۱) حل کنیم و مقدار بهین π می‌تواند برای به دست آوردن بردار هزینه بهین (۲۰.۱) استفاده شود. به جای حل مسأله (۱۸.۱) می‌توانیم دوگان آن را حل کنیم. متغیرهای دوگانِ دوگان مسأله (۶.۱) همان متغیرهای اولیه π می‌باشند و می‌توانند برای تعیین بردار هزینه بهین d^* استفاده شوند.

y_j را متغیر دوگان متناظر با jامین محدودیت در (۱۸.۱) معرفی می‌کنیم و سپس دوگان (۱۸.۱)