دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض - آنالیز

قضیه‌ی کملوس در فضاهای تابعی باناخ

استاد راهنما

دکتر قدیر صادقی

استاد مشاور

دکتر علی اکبر عارفی جمال

نگارش

الهه اسفیدانی

تابستان ۱۳۹۱

سپاس بیکران بر همدلی و همراهی پدر و مادر دلسوز و مهربانم

که سجده‌ی ایثارشان گل محبت را در وجودم پروراند و

و دامان گهربارشان لحظه‌های مهربانی را به من آموخت

و همسر عزیزم که گرمای امیدبخش وجودش در این

روزگاران، بهترین پشتیبان من است.

و یزکیهم و یعلمهم الکتاب و الحکمه

معلما مقامت ز عرش برتر باد همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل قرار داد و توفیق دوباره تحصیل علم را به من عطا نمود تا در راه کسب علم و معرفت گامی در رسیدن به کمال بی‌انتهایش بردارم.

به پاس احترام به حرمت دانش، از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم

جناب آقای دکتر صادقی

که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل دوره ارشد از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام و از ایشان درس زندگی آموختم، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر عارفی جمال که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم و از جناب آقای دکتر اسحاقی گرجی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از رئیس محترم دانشکده ریاضی جناب آقای دکتر مقدسی و مدیر گروه محترم سرکار خانم دکتر شاطری، سپاسگزارم و آرزوی موفقیت و سلامتی ایشان را از خدای متعال خواهانم.

الهه اسفیدانی

چکیده

نام خانوادگی : اسفیدانی	**نام :** الهه
عنوان پایان نامه : قضیه‌ی کملوس در فضاهای تابعی باناخ	
استاد راهنما : دکتر قدیر صادقی	
استاد مشاور: دکتر علی اکبر عارفی جمال	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز	
محل تحصیل: دانشگاه حکیم سبزواری	**دانشکده:** ریاضی و علوم کامپیوتر
تاریخ فارغ التحصیلی: تیر ماه ۱۳۹۱	**تعداد صفحه: ۸۰**
واژه‌های کلیدی: قضیه‌ی کملوس، فضای تابعی باناخ، اندازه‌ی برداری.	

چکیده: کملوس در سال ۱۹۶۷ برای دنباله‌ی $\{f_n\}_n$ در $L^1(\mu)$، ثابت کرد که اگر μ یک اندازه‌ی احتمال و $\|f_n\| \leq M < \infty$، آن‌گاه زیر دنباله‌ی $\{g_n\}_n$ از دنباله‌ی $\{f_n\}_n$ و تابعی مانند $g \in L^1(\mu)$ وجود دارد، به طوری که برای هر زیر دنباله‌ی دیگری مانند $\{h_n\}_n$ از دنباله‌ی $\{g_n\}_n$، داریم

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i \longrightarrow g \qquad \mu - a.e.$$

زمانی که μ یک اندازه‌ی σ- متناهی است، این قضیه را می‌توان به رده‌ی گسترده‌ای از فضاهای تابعی باناخ (آنهایی که در ویژگی فاتو صدق می‌کنند و به طور متناهی انتگرال‌پذیرند)، تعمیم داد.

فرض کنید $\mathcal{R}$ یک δ- حلقه و $\nu : \mathcal{R} \to X$ یک اندازه‌ی برداری باشد که در آن X فضای باناخ است. همچنین فرض کنید E ایده‌آلی از $L^1(\nu)$ باشد. در این صورت E ویژگی σ- فاتوی ضعیف دارد اگر و تنها اگر E ویژگی کملوس داشته باشد.

پیشگفتار

قضیه‌ی کملوس در سال ۱۹۶۷ برای فضاهای $L^1(\mu)$ توسط کملوس [۱] مطرح گردید و کاترجی [۲] درسال ۱۹۷۰ این قضیه را به فضاهای L^p که $(1 \leq p < 2)$ تعمیم داد .

لینارد [۳] در سال ۱۹۹۳ عکس قضیه‌ی کملوس را برای زیر مجموعه‌های محدب از $L^1(\mu)$ مورد بررسی قرار داد.

در سال ۱۹۹۶ بالدر [۴] و هس [۵] دو تعمیم از قضیه‌ی کملوس را بیان کردند و در سال ۲۰۱۰ دی [۶] و لینارد این قضیه را برای فضاهای تابعی باناخ نیز ثابت کردند. سرانجام قضیه‌ی کملوس در سال ۲۰۱۱ روی فضاهای $L^1(\nu)$ تعمیم داده شد که در آن ν یک اندازه‌ی برداری است.

در این پایان نامه قصد داریم با معرفی فضاهای تابعی باناخ و $L^1(\nu)$، قضیه‌ی کملوس را در این فضاها مورد بررسی قرار دهیم.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول مقدمات و پیش نیازها مطرح می‌گردد، بخش اول را با تعاریف فضاهای ارلیخ [۷] و لورنتز [۸] آغاز می‌کنیم، در دو بخش بعدی فضاهای تابعی باناخ و شبکه‌های باناخ را بیان می‌کنیم که تعاریف اصلی این پایان نامه هستند.

---

[۱] Komlós
[۲] Chatterji
[۳] Lennard
[۴] Balder
[۵] Hess
[۶] Day
[۷] Orlicz
[۸] Lorentz

در بخش اول از فصل دوم، قضیه‌ی کملوس و عکس آن را برای زیر مجموعه‌های محدب $L^1(\mu)$، مورد بازبینی قرار می‌دهیم و در بخش انتهایی این فصل به بیان تعمیم قضیه‌ی کملوس و عکس آن در فضاهای تابعی باناخ می‌پردازیم.

در بخش اول از فصل سوم، علاوه بر تعریف اندازه‌ی برداری روی یک δ- حلقه، به برخی دیگر از ویژگی‌های آن پرداخته و در بخش دوم ارتباط قضیه‌ی کملوس و فضاهای $L^1(\nu)$ را بررسی می‌کنیم. در بخش انتهایی از این فصل، به بیان برخی از ویژگی‌های $L_w^1(\nu)$ می‌پردازیم.

در بخش اول از فصل چهارم، به بیان برخی از تعاریف مقدماتی از جمله چندتابعی‌ها می‌پردازیم و سرانجام در بخش انتهایی، دو تعمیم از قضیه‌ی کملوس را بیان می‌کنیم.

این پایان نامه برگرفته از مقالات زیر است:

1) *E.J. Balder and C. Hess, Two generalization of Komlós theorem with lower closure type application, J. Convex. Anal.* 3(1) (1996) 25 − 44.

2) *J.B. Day and C. Lennard, Convex Komlós sets in Banach function spaces, J. Math. Anal. Appl.* 367 (2010) 129−136.

3) *E. Jiménez Fernández, M.A. Juan and E.A. Sánchez Pérez, A Komlós theorem for abstract Banach lattices of measurable functions, J. Math. Anal. Appl.* 383 (2011) 130 − 136.

4) *C. Lennard, A converse to a theorem of Komlós for convex subsets of* $L^1(\mu)$, *Pacific J. Math.* 159 (1) (1993) 217−229.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این پایان نامه فرض می‌کنیم خواننده با مفاهیم σ- جبر و فضای اندازه [۱] آشنایی دارد. در این فصل به معرفی فضاهای ارلیخ و لورنتز می‌پردازیم. همچنین فضاهای تابعی باناخ که تعمیمی از فضاهای L^p هستند را معرفی و ویژگی‌های مهم آن‌ها را بیان و سپس مجموعه‌ی کملوس را معرفی می‌کنیم. در بخش آخر شبکه‌های باناخ و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را ذکر می‌کنیم که در فصل سوم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.۱ فضاهای ارلیخ و لورنتز

در این بخش، ضمن معرفی فضاهای L^p، به بیان دو تعمیم از این فضاها می‌پردازیم. اولین تعمیم فضاهای ارلیخ و دومی فضاهای لورنتز می‌باشد.

فرض کنید (Ω, Σ, μ) یک فضای اندازه‌ی دلخواه باشد.

تعریف ۱.۱. اگر $0 < p < \infty$ و f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر Ω باشد، تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

و $L^p(\mu)$ از تمام f هایی تشکیل شده است که

$$\|f\|_p < \infty.$$

[۱] Measure space

سوپریمم اساسی تابع اندازه‌پذیر $f:\Omega \to [0,\infty]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$essupf = inf\{\alpha \in [0,\infty]: \quad f \le \alpha \quad a.e.\}.$$

تعریف ۲.۱. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر Ω باشد، تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_\infty = essup|f|,$$

و $L^\infty(\mu)$ از تمام f هایی تشکیل شده است که

$$\|f\|_\infty < \infty.$$

تعریف ۳.۱. (تابع یانگ) فرض کنید $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ یک تابع نانزولی و محدب باشد و $\varphi(0)=0$. در این صورت تابع Φ به صورت

$$\Phi(s) = \int_0^s \varphi(u)du \quad (s \ge 0),$$

تابع یانگ [۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱. (فضاهای ارلیخ) فرض کنید $L^0(\mu)$ مجموعه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر مختلط روی Ω باشد. نرم لوکزامبورگ $L^0(\mu)$ که در آن Φ یک تابع یانگ است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_\Phi = inf\left\{k>0; \int \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right)d\mu \le 1\right\}.$$

اکنون مجموعه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر مانند f به طوری که $\|f\|_\Phi < \infty$، را با $L^\Phi(\mu)$ نمایش می‌دهیم و آن را فضای ارلیخ می‌نامیم.

ملاحظه ۵.۱. فضاهای L^Φ در واقع تعمیمی از فضاهای L^P هستند، زیرا برای هر $1<p<\infty$، اگر قرار دهیم $\Phi(t)=t^p$، آن‌گاه فضاهای L^Φ همان فضاهای L^P خواهند بود.

[۲] Young function

تعریف ۶.۱. (فضاهای لورنتز) فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر Ω باشد، در این صورت تابع توزیع [۳] f را با m نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m(\lambda) = \mu\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \lambda\}, \qquad (\lambda \geq 0).$$

همچنین تجدید آرایش ناصعودی تابع f را روی $[0, \infty)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*(t) = inf\{\lambda : m(\lambda) \geq t\}, \qquad (t \geq 0).$$

گزاره ۷.۱. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر Ω باشد، اگر $0 < p < \infty$، آن‌گاه

$$\int_\Omega |f|^p d\mu = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p dt.$$

برهان. گزاره‌ی ۱.۸. مرجع [۳] را ببینید. □

اگر $1 \leq p < \infty$ و $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ یک تابع ناصعودی باشد، آن‌گاه نرم لورنتز [۴] تابع اندازه‌پذیر f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_{g,p} = \left(\int_0^\infty g(t) f^*(t)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

مجموعه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر مانند f به طوری که $\|f\|_{g,p} < \infty$، را با $\Lambda_{g,p}$ نمایش می‌دهیم و آن را فضای لورنتز می‌نامیم.

ملاحظه ۸.۱. فضاهای $\Lambda_{g,p}$ در واقع تعمیمی از فضاهای L^p هستند، زیرا برای هر $0 \leq t < \infty$، اگر قرار دهیم $g(t) = 1$، آن‌گاه بنا به گزاره‌ی ۷.۱، داریم

$$\Lambda_{g,p} = L^p.$$

[۳] Distribution function
[۴] Lorentz norm

۲.۱ فضاهای تابعی باناخ

در این بخش ضمن معرفی فضاهای تابعی باناخ [۵]، برخی از ویژگی‌های مهم آن‌ها را ذکر می‌کنیم.

به طور معمول، $\mathbb{N}$ را مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح مثبت و $\mathbb{R}$ را مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. فرض کنید (Ω, Σ, μ) یک فضای اندازه باشد، به عبارت دیگر، Ω یک مجموعه‌ی غیر تهی، Σ، σ- جبری از زیر مجموعه‌های Ω و μ یک فضای اندازه‌ی کامل باشد.

فضای تمام توابع Σ- اندازه‌پذیر روی Ω در برگیرنده‌ی مقادیری در $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{M}$، و فضای تمام توابع Σ- اندازه‌پذیر روی Ω در برگیرنده‌ی مقادیری در $[0,\infty]$ را با $\mathcal{M}^+$ نمایش می‌دهیم. همچنین به ازای هر $E \in \Sigma$، فرض کنید χ_E تابع مشخصه‌ی E باشد.

تعریف ۹.۱. نگاشت $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0,\infty]$ یک تابع نرم [۶] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر f و g در $\mathcal{M}^+$، و هر $\alpha \geq 0$ و $E \in \Sigma$، ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

۱. $\rho(f) = 0$ اگر و تنها اگر $f = 0$،

۲. $\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$،

۳. $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$،

۴. اگر $0 \leq g \leq f$ آن‌گاه $\rho(g) \leq \rho(f)$،

۵. اگر $\mu(E) < \infty$ آن‌گاه $\rho(\chi_E) < \infty$.

تعریف ۱۰.۱. فضای نرم‌دار خطی $X(\mu)$ از تمام توابع $f \in \mathcal{M}$ به طوری که $\rho(|f|) < \infty$، فضای کیس

[۵] Banach function space
[۶] Function norm

[۷] نامیده می‌شود و برای هر $f \in X(\mu)$ تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{X(\mu)} := \rho(|f|).$$

تعریف ۱۱.۱. **(فضای تابعی باناخ)** فضای کیس کامل، فضای تابعی باناخ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱. فضای تابعی باناخ $X(\mu)$ در خاصیت فاتو صدق می‌کند [۸]، هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{f_n\}_n$ و تابع f در $\mathcal{M}$، داشته باشیم

$$0 \leq f_n \uparrow_n f \quad \mu - a.e. \quad \Longrightarrow \quad \rho(f_n) \uparrow_n \rho(f).$$

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید $X(\mu)$ یک فضای تابعی باناخ باشد، در این صورت $X(\mu)$ به طور متناهی انتگرال‌پذیر [۹] (FI) است، هرگاه برای هر $E \in \Sigma$ که $\mu(E) < \infty$، ثابتی مانند $c_E \in (0, \infty)$ موجود باشد به طوری که برای هر $f \in X(\mu)$ داشته باشیم

$$\int_E |f| d\mu \leq c_E \rho(|f|).$$

مثال ۱۴.۱. فضای $L^p(\mu)$، یک فضای تابعی باناخ با خاصیت σ- فاتو و انتگرال‌پذیر متناهی است.

مثال‌های دیگری از این قبیل فضاها، فضاهای ارلیخ و لورنتز می‌باشند.

تعریف ۱۵.۱. **(مجموعه‌ی کملوس)** زیر مجموعه‌ی S از $X(\mu)$ کملوس است هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در S، زیر دنباله‌ای مانند $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ و تابعی مانند $g \in S$ موجود باشند به طوری که برای هر زیر دنباله‌ی دیگری مانند $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$، داشته باشیم

$$\frac{1}{N} \Sigma_{m=1}^{N} h_m \longrightarrow g \quad \mu - a.e.$$

[۷] Köthe space
[۸] Fatou property
[۹] Finitely integrable

۳.۱ شبکه‌های باناخ

در این بخش شبکه‌های باناخ [۱۰] را تعریف نموده و برخی از ویژگی‌های مهم آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۱. (شبکه‌ی باناخ) فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی با نرم $\|.\|$ و رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ باشد به طوری که

۱. اگر $x, y, z \in E$ با $x \leq y$، آن‌گاه $x + z \leq y + z$،

۲. اگر $x, y \in E$ با $x \leq y$، آن‌گاه برای هر $a \geq 0$ داشته باشیم $ax \leq ay$،

۳. سوپریمم x و y با رابطه‌ی ترتیب فوق برای هر $x, y \in E$ موجود باشد،

۴. اگر $x, y \in E$ با $|y| \leq |x|$، آن‌گاه $\|y\| \leq \|x\|$، که $|x| = sup\{x, -x\}$.

در این صورت Eیک شبکه‌ی باناخ است.

شرط (۳) نتیجه می‌دهد که اینفیمم هر $x, y \in E$ نیز وجود دارد.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید E یک شبکه‌ی باناخ باشد، عنصر $0 \leq e \in E$ را واحد ضعیف [۱۱] نامیم، هرگاه

$$inf\{x, e\} = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

مثال ۱۸.۱. در فضای تابعی باناخ $X(\mu)$، تابع g واحد ضعیف است هرگاه

$$g \geq 0 \quad \mu - a.e.$$

تعریف ۱۹.۱. ایده‌آلی [۱۲] از شبکه‌ی باناخ E، زیر فضای بسته‌ای مانند F است به طوری که اگر $x \in F$ و $y \in E$ با $|y| \leq |x|$، آن‌گاه $y \in F$.

---
[۱۰] Banach lattic
[۱۱] Weak unit
[۱۲] Ideal

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید E یک شبکه‌ی باناخ باشد، در این صورت E را پیوسته‌ی ترتیبی [۱۳] گوییم، اگر برای هر $\{x_n\} \subset E$ که $x_n \downarrow 0$، آن‌گاه $\|x_n\| \downarrow 0$.

تعریف ۲۱.۱. بزرگترین ایده‌آل پیوسته‌ی ترتیبی در E را قسمت پیوسته‌ی ترتیبی [۱۴] E می‌نامیم و آن را با E_a نمایش می‌دهیم، که می‌توان آن را به صورت زیر تشریح کرد:

$$E_a = \{x \in E : |x| \geq x_n \downarrow 0 \Longrightarrow \|x_n\| \downarrow 0\}.$$

[۱۳] Order continuous

[۱۴] Order continuous part

فصل ۲

قضیه‌ی کملوس روی فضاهای توابع

۱.۲ قضیه‌ی کملوس و عکس آن نسبت به زیر مجموعه‌های محدب $L^1(\mu)$

در این بخش به بیان قضیه‌ی کملوس و عکس آن نسبت به زیر مجموعه‌های محدب $L^1(\mu)$ می‌پردازیم و در بخش بعدی عکس قضیه‌ی کملوس را در فضاهای تابعی باناخ بیان می‌کنیم.

در سال ۱۹۶۷ کملوس نشان داد که اگر μ یک اندازه‌ی احتمال [۱] باشد، آن‌گاه برای هر دنباله‌ی $\{f_n\}_n \in L^1(\mu)$ با $sup_n\|f_n\| < \infty$، زیر دنباله‌ی $\{g_n\}_n$ از $\{f_n\}_n$ و تابع $g \in L^1(\mu)$ موجود است، به طوری که برای هر زیر دنباله‌ی دیگری مانند $\{h_n\}_n$ از $\{g_n\}_n$، داریم

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i \longrightarrow g \quad \mu - a.e.$$

تعریف ۱.۲. دنباله‌ی $\{f_n\}_n$ در $L^1(\mu)$، کملوس است اگر زیر دنباله‌ی $\{g_n\}_n$ از $\{f_n\}_n$ و تابع $g \in L^1(\mu)$ موجود باشد، به طوری که برای هر زیر دنباله‌ی دیگری مانند $\{h_n\}_n$ از $\{g_n\}_n$، داشته باشیم

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i \longrightarrow g \quad \mu - a.e.$$

ملاحظه ۲.۲. قضیه‌ی کملوس را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد: اگر μ یک اندازه‌ی احتمال باشد،

[۱] Probability measure

هر دنباله‌ی با نرم کراندار در $L^1(\mu)$، کملوس است.

قضیه ۳.۲. (قضیه‌ی اگوروف)[۲] فرض کنید $\mu(\Omega) < \infty$، f و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر مختلط-مقدار روی Ω باشند به طوری که $f_n \longrightarrow f \quad a.e.$، در این صورت برای هر $\epsilon > 0$، زیر مجموعه‌ی E از Ω موجود است به طوری که $\mu(E) < \epsilon$ و $\{f_n\}$ به طور یکنواخت روی E^c همگرا می‌باشد.

برهان. صفحه ۶۲ مرجع [۱۰] را ببینید. □

قضیه ۴.۲. فرض کنید (Ω, Σ, μ) یک فضای اندازه‌ی متناهی باشد. همچنین فرض کنید $C \subseteq L^1(\mu)$ مجموعه‌ای محدب و کملوس باشد. در این صورت C با نرم کراندار است.

برهان. فرض می‌کنیم C با نرم کراندار نباشد، در این صورت دنباله‌ی $\{g_n\}_n \in C$ موجود است به طوری که $\|g_n\|_1 \longrightarrow \infty$.

بنا به فرض C مجموعه‌ای کملوس است، بنابراین برای دنباله‌ی $\{g_n\}_n$ فوق، فرض می‌کنیم تابع $g \in C$ موجود است به طوری که برای هر زیر دنباله‌ی $\{h_m\}_m$ از $\{g_n\}_n$، داریم

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} h_m \longrightarrow g \quad \mu - a.e.$$

با توجه به این که $C - \{g\}$ نیز مجموعه‌ای محدب و کملوس در $L^1(\mu)$ است، بنابراین فرض می‌کنیم تابع صفر $\theta \in C - \{g\}$ وجود دارد به طوری که برای هر زیر دنباله‌ی $\{h_m\}_m$ از $\{g_n\}_n$، داریم

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} (h_m - g) \longrightarrow \theta \quad \mu - a.e.$$

واضح است که اگر هر $g_n - g$ را به عنوان g_n و $C - \{g\}$ را به عنوان C در نظر بگیریم، آن‌گاه C یک مجموعه‌ی محدب و کملوس در $L^1(\mu)$ است. همچنین $\{g_n\}_n$ دنباله‌ای در C با $\|g_n\|_1 \longrightarrow \infty$ و $\theta \in C$ می‌باشد و برای هر زیر دنباله‌ی $\{h_m\}_m$ از $\{g_n\}_n$، داریم

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} h_m \longrightarrow \theta \quad \mu - a.e.$$

[۲] Egoroff theorem

اکنون با استفاده از دنباله‌ی $\{g_n\}_n$، دنباله‌ی دیگری مانند $\{f_n\}_n \in C$ می‌سازیم به گونه‌ای که

$\mu - a.e.\quad f_n \longrightarrow \theta$ و $\|f_n\|_1 \longrightarrow \infty$.

فرض کنید $u_1 := 1$ و $f_1 := g_{u_1}$. چون $\|g_n\|_1 \longrightarrow \infty$، لذا $u_2 \in \mathbb{N}$ موجود است که $u_2 > u_1$ و

$\|g_{u_2}\|_1 > \|g_{u_1}\|_1 + 2(2^2)$. f_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_2 = \frac{1}{2}(g_{u_1} + g_{u_2}),$$

به دلیل این که C مجموعه‌ای محدب است، بنابراین $f_2 \in C$ و همچنین

$$\|f_2\|_1 \geq \frac{1}{2}\big(\|g_{u_2}\|_1 - \|g_{u_1}\|_1\big) > 2^2.$$

در مرحله‌ی بعد، $u_3 \in \mathbb{N}$ با $u_3 > u_2$ و $\|g_{u_3}\|_1 > \|g_{u_1}\|_1 + \|g_{u_2}\|_1 + 3(2^3)$ را انتخاب می‌کنیم.

همچنین تعریف می‌کنیم

$$f_3 = \frac{1}{3}(g_{u_1} + g_{u_2} + g_{u_3}),$$

بنابراین $f_3 \in C$ و $\|f_3\|_1 > 2^3$.

به روش استقراء، زیر دنباله‌ی $\{g_{u_n}\}_n$ از $\{g_n\}_n$ و دنباله‌ی $\{f_n\}_n \in C$ موجود است به طوری که

$\|f_n\|_1 \longrightarrow \infty$ و

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g_{u_j}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

با توجه به مطالب بالا داریم

$$f_n \longrightarrow \theta \qquad \mu - a.e.$$

حال با روش استقراء به ساختن دنباله‌ی اکیداً صعودی $\{n_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{N}$، دنباله‌ی ناصعودی $\{E_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Sigma$ و

دنباله‌ی $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty} \in (0,\infty)$ می‌پردازیم که برای هر $k \in \mathbb{N}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند.

۱. $\delta_k < \frac{\delta_{k-1}}{2}$.

۲. برای هر $E \in \Sigma$ با $\mu(E) < \delta_k$، داریم $\int_E |f_{n_k}| d\mu < 1$.

۳. $\left\|f_{n_k}\chi_{E_k}\right\|_1 > 2^k(2+\mu(\Omega))$.

۴. برای هر $n \geq n_k$، $\left\|f_n\chi_{E_{k-1}\setminus E_k}\right\|_\infty < 1$.

۵. $\mu(E_k) < \delta_{k-1}$.

تعریف می‌کنیم $E_0 = \Omega$، $\delta_0 = 2\mu(\Omega)$ و $n_0 = 1$. همچنین در نظر بگیرید $E_1 = \Omega$. چون $\|f_n\|_1 \longrightarrow \infty$، لذا می‌توان $n_1 \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که برای $n_1 > n_0$ داشته باشیم

$$\left\|f_{n_1}\chi_{E_1}\right\|_1 > 2^1(2+\mu(\Omega)),$$

و برای هر $n \geq n_1$،

$$\left\|f_n\chi_{E_0\setminus E_1}\right\|_\infty < 1.$$

بنا به پیوستگی مطلق اندازه‌ی $|f_{n_1}|d\mu$ نسبت به μ، $\delta_1 \in (0, \mu(\Omega))$ موجود است به طوری که برای هر $E \in \Sigma$ با $\mu(E) < \delta_1$، داریم

$$\int_E |f_{n_1}| d\mu < 1.$$

با توجه به این که $E_1 = \Omega$ و $\delta_0 = 2\mu(\Omega)$، واضح است که $\mu(E_1) < \delta_0$. $m \in \mathbb{N}$ با $m > 1$ را ثابت در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دنباله‌ی اکیداً صعودی $\{n_k\}_{k=0}^{m-1} \in \mathbb{N}$، دنباله‌ی ناصعودی $\{E_k\}_{k=0}^{m-1} \in \Sigma$ و دنباله‌ی $\{\delta_k\}_{k=0}^{m-1} \in (0,\infty)$ را به گونه‌ای ساخته‌ایم که برای آن‌ها شرایط (۱) تا (۵) برای هر $k \in \{1,\ldots,m-1\}$ برقرار است. با توجه به این که روی E_{m-1} داریم

$$f_n \longrightarrow \theta \quad \mu - a.e.$$

لذا بنا به قضیه‌ی اگوروف، $E_m \in \Sigma$ با $E_m \subseteq E_{m-1}$ موجود است به طوری که $\mu(E_m) < \delta_{m-1}$ و

$$\left\|f_n\chi_{E_{m-1}\setminus E_m}\right\|_\infty \longrightarrow 0.$$

چون گزاره‌ی (۴) برای هر $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ برقرار است، لذا داریم

$$\left\|f_n \chi_{\Omega \setminus E_{m-1}}\right\|_\infty < 1, \qquad (n \geq n_{m-1}).$$

به این دلیل که $\|f_n\|_1 \longrightarrow \infty$، نتیجه می‌گیریم

$$\sup_n \|f_n \chi_{E_m}\|_1 = \infty.$$

$n_m \in \mathbb{N}$ با $n_m > n_{m-1}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\left\|f_{n_m} \chi_{E_m}\right\|_1 > 2^m(2 + \mu(\Omega))$ و

$$\left\|f_n \chi_{E_{m-1} \setminus E_m}\right\|_\infty < 1, \qquad (n \geq n_m).$$

اکنون چون اندازه‌ی $|f_{n_m}| d\mu$ نسبت به μ مطلقاً پیوسته است، بنابراین $\delta_m > 0$ با $\delta_m < \frac{\delta_{m-1}}{2}$ موجود است و برای هر $E \in \Sigma$ با $\mu(E) < \delta_m$، داریم

$$\int_E |f_{n_m}| d\mu < 1.$$

بدین صورت روش استقراء کامل می‌شود.

برای سادگی کار، در ادامه هر f_{n_k} را به صورت f_k نشان داده و در شرایط (۲)، (۳) و (۴)، اگر n_k را با k تعویض کنیم، آن‌گاه این شرایط را به ترتیب با (۲ *)، (۳ *) و (۴ *) نشان می‌دهیم. برای هر $k \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} f_j.$$

چون $\theta \in C$، هر $\psi(k) \in C$. همچنین برای هر $m \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم

$$\varphi_m = \left(\frac{1}{2^m} |f_m| - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{2^j} |f_j| - 1 \right) \chi_{E_m \setminus E_{m+1}}.$$

به دلیل این که $\{\psi_k\}_k \in C$ و $C \subseteq L^1(\mu)$ کملوس است، لذا زیر دنباله‌ی $\{\psi_{k_l}\}_l$ از $\{\psi_k\}_k$ و $q \in C$ موجود است به طوری که

$$q_N = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \psi_{k_l} \longrightarrow q \quad \mu - a.e. \tag{۱.۲}$$