[ﷺ] [ﷺ] [ﷺ]

[ﷺ]

[ﷺ]

دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

مطالعه‌ای روی جبرهای گروهی

دکتر مسعود طوسی

دکتر کامران دیوانی آذر

مرضیه حاتم خانی

تیر ماه ۱۳۸۷

قدردانی و تشکر

خدای منان را سپاسگزارم به خاطر لطف و رحمت بی‌منتهایش که در این راه بر بنده‌ی حقیر خود ارزانی داشت.

در تهیه و تدوین این رساله افراد بسیاری به طور مستقیم یا غیر مستقیم نقش داشته‌اند:
پیش از همه از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر طوسی سپاسگزارم که با تذکرات و تشویقات و رهنمون‌های سازنده‌ی خود در مراحل مختلف تدوین این رساله یاریگر اینجانب بوده‌اند.

همچنین از جناب آقای دکتر دیوانی آذر مراتب تقدیر و تشکر را دارم که با صبوری و اخلاق نیکشان مرا در قدم گذاشتن در این عرصه یاری فرموده‌اند.

زحمات و فداکاری‌های خانواده‌ام به‌ویژه همسر گرامی‌ام را که همواره با شکیبایی، راهنما و تکیه‌گاهم در این مسیر بوده‌اند، ارج می‌نهم.

از دیگر اساتید و دوستانم که مرا در تایپ و نگارش این رساله یاریگر بوده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

در این رساله ابتدا جبرها و سپس جبرهای گروهی معرفی شده‌اند و برخی ویژگی‌های آن‌ها بیان و اثبات شده است. سپس به بررسی مدول‌ها روی جبرهای گروهی و برخی مفاهیم مهم جبری شبیه تانسور و همریختی مدول‌ها روی جبرهای گروهی پرداخته شده است.
خاصیت کرول — اشمیت بیان و اثبات شده است و برقراری آن برای جبرهای گروهی نیز بررسی شده و با کمک آن مدول‌ها روی برخی جبرهای گروهی رده‌بندی شده‌اند.
همچنین جبرهای گروهی نیم ساده معرفی شده و سپس با توجه به این مطالب مدول‌های پروژکتیو روی جبرهای گروهی بررسی شده‌اند.
در پایان نیز با استفاده از مفاهیمی چون روکش پروژکتیو برای یک مدول و... مدول‌های پروژکتیو را روی چند جبر گروهی خاص رده‌بندی کرده‌ایم.

فهرست مندرجات

مقدمه

در این رساله ابتدا با مفهوم جبر و تعدادی جبرهای خاص و ویژگی‌های آن‌ها آشنا می‌شویم. سپس یک جبر گروهی را معرفی می‌کنیم.سعی می‌کنیم خواص جبری مانند آرتینی، نوتری، موضعی و غیره را روی یک جبر گروهی بررسی کنیم و همچنین مفاهیمی شبیه حاصل ضرب تانسوری، همریختی‌ها، مدول‌ها و مدول‌های پروژکتیو و ... را روی آن مطالعه می‌کنیم .
تا کنون تحقیقات زیادی روی جبرهای گروهی روی یک میدان انجام شده است. جبرهای گروهی از این منظر دارای اهمیت می‌باشند که به کمک آن‌ها می‌توان از تکنیک‌های نظریه‌ی حلقه‌ها در بررسی گروه‌ها استفاده کرد. برای مثال مفاهیم همولوژی و کوهمولوژی یک گروه با استفاده از جبر گروهی قابل تعریف‌اند. بدین صورت که
فرض کنیم G یک گروه (ضربی) و ZG حلقه‌ی گروهی G روی Z (حلقه‌ی اعداد صحیح) باشد. M را نیز یک گروه آبلی جمعی در نظر می‌گیریم. $Z-$مدول M را می‌توان با تعریف ضرب اسکالر

$$ZG \times M \longrightarrow M$$

$$(g, x) \longmapsto x$$

به عنوان یک $ZG-$مدول در نظر گرفت. در این صورت M یک $ZG-$مدول بدیهی نامیده می‌شود.
هر $ZG-$مدول چپ (راست) M به طور مختصر یک $G-$مدول چپ (راست) نامیده می‌شود.
$n-$امین کوهمولوژی گروه G با ضرایب در M با $H^n(ZG, M) = H^n(G, M)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^n(ZG, M) = H^n(G, M) = Ext^n{}_{ZG}(Z, M)$$

که در آن Z به عنوان ZG–مدول بدیهی در نظر گرفته می‌شود.
به همین ترتیب n–امین همولوژی گروه G با ضرایب در M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_n(ZG, M) = H_n(G, M) = {Tor^{ZG}}_n(Z, M)$$

از دیگر کاربردهای مهم جبرهای گروهی می‌توان به کاربرد آن‌ها در زمینه‌ی نظریه‌ی نمایش گروه‌ها اشاره کرد:
فرض کنیم G یک گروه و V یک R–مدول دلخواه باشد. با در نظر گرفتن همریختی گروهی $f : G \longrightarrow Aut_R(V)$ که در آن $Aut_R(V)$ ، مجموعه‌ی تمام R–خودریختی‌های V می‌باشد، می‌توان V را با تعریف ضرب اسکالر زیر به عنوان یک RG–مدول در نظر گرفت:

$$(\sum_{g\in G} x_g g)v = \sum_{g\in G} x_g f(g)v \ \ (v \in V)$$

جبردانان با استفاده از خواص ساختار RG–مدولی فوق روی یک A–مدول، در پیشبرد تحقیقات خود در زمینه‌های بسیاری بهره می گیرند. این رساله بر اساس مقاله‌ی « مدول‌ها و کوهمولوژی روی جبرهای گروهی » نوشته‌ی « اسریکانت آینگار»[1] چاپ سال ۲۰۰۴ میلادی تهیه شده و اصلی‌ترین منبع مورد استفاده کتاب « نمایش‌های گروه، بخش اول » اثر « گریگوری کارپیلوسکی »[2] می‌باشد.

در سرتاسر این رساله حلقه‌ها یکدار هستند. هر زیر حلقه‌ی یک حلقه دارای یک است و اگر $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ها باشد، آن گاه $f(1_R) = 1_S$. همچنین مدول‌ها همگی یکانی هستند و منظور از R–مدول، یک R–مدول چپ است. وقتی حلقه‌ی R را به عنوان R–مدول در نظر می‌گیریم، منظور R–مدول چپ است.
در این رساله حلقه‌های دلخواه (نه لزوماً جابجایی) را با حرف A نشان می‌دهیم و برای حلقه‌های جابجایی نماد R را به کار می‌بریم. جبر گروهی را با حلقه‌ی جابجایی تشکیل می‌دهیم.

---

[1] Srikanth Iyengar

[2] Gregory Karpilovski

این رساله شامل پنج فصل می‌باشد:

فصل اول، با عنوان پیش‌نیاز شامل مطالب و مفاهیمی مقدماتی است که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در این فصل ابتدا به معرفی مفهوم جبر پرداخته و سپس مطالبی در مورد مدول‌های ساده و نیم ساده، ژاکبسون رادیکال حلقه و مدول و همچنین حلقه‌های موضعی و نیمه‌موضعی بیان شده است. در انتها نیز جبرهای فروبنیوس معرفی شده و برخی ویژگی‌های مورد نیاز آن‌ها بیان و اثبات شده است.

در فصل دوم مطالبی جهت آشنایی با جبرهای گروهی و جبرهای گروهی آرتینی و نوتری و موضعی و... و برخی ویژگی‌های آن‌ها گنجانده شده است. بخش آخر این فصل نیز شامل مثال‌هایی از تعدادی جبر گروهی خاص می‌باشد.

در فصل سوم مفهوم مدول روی جبر گروهی معرفی شده و همچنین قضیه‌ی مهم کرول — اشمیت و کاربردهایی از آن در قالب چند مثال بیان شده است . همچنین در این فصل برخی مفاهیم مهم جبری مانند حاصل ضرب تانسوری و همریختی مدول‌ها روی جبر گروهی بررسی شده است.

در فصل چهارم مطالبی راجع به جبرهای گروهی نیم‌ساده و مدول‌های پروژکتیو روی جبر گروهی و خلاصه‌ای از مفاهیم بعدهای پروژکتیو، انژکتیو و یکدست ذکر شده و با استفاده از آن‌ها نتایجی مهم در رابطه با جبرهای متناهی بعد بیان شده است.

در فصل پنجم به معرفی پوشش پروژکتیو و رده‌ی خاصی از حلقه‌ها بنام حلقه‌های نیمه کامل پرداخته و از این مفاهیم در بررسی ساختار مدول‌های پروژکتیو و رده بندی آن‌ها روی چند جبر گروهی خاص استفاده شده است. در بخش پایانی این فصل و در واقع این رساله به بررسی یک مسأله‌ی جالب در مورد وجود RG—مدول‌های یکدست غیر پروژکتیو که به عنوان R—مدول پروژکتیواند پرداخته شده است.قضایای این بخش به طور فشرده و بدون اثبات بیان شده است. هدف، آشنایی بیشتر با جبرهای گروهی می‌باشد. دانشجویان علاقمند می‌توانند برای کسب اطلاعات دقیقتر در این زمینه به منابع معرفی شده در انتهای رساله مراجعه کنند.

در پایان از تمام عزیزانی که مرا در این مسیر یاری فرمودند، به ویژه جناب آقای دکتر طوسی و همچنین خانواده‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فصل ۱

پیش نیاز

در بخش اول جبرها را معرفی کرده و برخی ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش دوم مدول‌های ساده و نیم‌ساده تعریف شده و برخی خواص این مدول‌ها را ذکر می‌کنیم. بخش سوم شامل مطالبی درباره‌ی ژاکبسون رادیکال مدول و حلقه می باشد.
در بخش چهارم حلقه‌های موضعی و نیمه‌موضعی و آرتینی و... را معرفی کرده و قضایایی در مورد آن‌ها بیان و ثابت می‌کنیم. در بخش آخر نیز به بررسی مفهوم جبرهای فروبنیوس و ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۱ معرفی جبرها

تعریف۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد. $R-$جبر(یا جبر روی R) A حلقه‌ای است که

- $(A,+)$ یک $R-$مدول چپ یکانی است.
- به ازای هر $a,b \in A$, $r \in R$، $r(ab) = (ra)b = a(rb)$.
- $R-$جبر A که به عنوان حلقه، یک حلقه‌ی تقسیم [1] است، یک جبر تقسیم نام دارد.

[1] Division ring

نظریه‌ی کلاسیک جبرها به جبرها روی یک میدان K می‌پردازد. یک چنین جبری، فضایی برداری روی K است. در نتیجه، نتایج مختلف جبر خطی قابل اعمالند.
یک جبر روی میدان K که به عنوان فضایی برداری روی K با بعد متناهی باشد، یک جبر با بعد متناهی روی K نام دارد.

تذکر۱.۱.۲ چون R جابجایی است، هر R−مدول چپ (و در نتیجه، هر R−جبر) A نیز یک R−مدول راست است که در آن به ازای هر $a \in A\ ,\ r \in R$، $ra = ar$.

تعریف۱.۱.۳ فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار بوده و $A\ ,\ B$، R−جبر باشند.

- هر زیر جبر A یک زیر حلقه‌ی A است که یک R−زیر مدول A نیز است.
- هر ایده‌ال جبر (چپ، راست، دوطرفه) A یک ایده‌ال (چپ، راست، دوطرفه) حلقه‌ی A است که یک R−زیر مدول A نیز است.
- هر همریختی (یکریختی) R−جبرهای $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی (یکریختی) حلقه‌ها است که یک همریختی (یکریختی) R−مدول‌ها نیز است.

تذکر۱.۱.۴ اگر A یک R−جبر باشد، یک ایده‌ال حلقه‌ی A لزوماً یک ایده‌ال جبر A نیست. اما هر گاه A یکدار باشد، آن گاه به ازای هر $a \in A\ ,\ r \in R$،

$$ra = r(1_A a) = (r1_A)a\ ,\ ra = (ra)1_A = a(r1_A)$$

که در آن‌ها $r1_A \in A$. در نتیجه برای یک ایده‌ال چپ (راست) J از حلقه‌ی A داریم:

$$rJ = (r1_A)J \subset J$$

بنابراین اگر A یکدار باشد، هر ایده‌ال چپ (راست، دوطرفه) یک ایده‌ال جبر چپ (راست، دوطرفه) می‌باشد.

R−جبر آرتینی چپ، R−جبری است که در شرط زنجیر کاهشی روی ایده‌ال‌های چپ جبر صدق می کند.
یک R−جبر آرتینی چپ، ممکن است یک حلقه‌ی آرتینی چپ نباشد.

۲.۱ مدول‌های ساده و نیم‌ساده

در این بخش با مدول‌های ساده و نیم‌ساده آشنا شده و برخی از خواص آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ A—مدول ناصفر M را ساده [2] نامیم اگر $0, M$ تنها زیر مدول‌های M باشند.

A—مدول M نیم‌ساده[3] گفته می‌شود هر گاه هر زیر مدول آن جمعوند مستقیمی از M باشد.
بنابراین 0 یک A—مدول نیم‌ساده است.

در قسمت‌های بعد ثابت خواهیم کرد که یک A—مدول ناصفر نیم‌ساده است اگر و تنها اگر جمع مستقیمی از A—مدول‌های ساده باشد. به همین علت است که چنین مدولی نیم‌ساده نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنیم V یک A—مدول نیم‌ساده باشد. در این صورت

الف) هر زیر مدول V با تصویر همریختی از V و هر تصویر همریخت V با یک زیر مدول از V یکریخت است.

ب) هر زیر مدول و هر تصویر همریخت از V نیم‌ساده است.

ج) اگر $V \neq 0$، آن گاه V شامل یک زیر مدول ساده است.

اثبات: الف) اگر W زیر مدولی از V باشد، آن گاه چون V مدولی نیم‌ساده است، زیر مدول W' از V وجود دارد که $V = W \oplus W'$. بنابراین $\frac{V}{W} \cong W'$, $W \cong \frac{V}{W'}$ همان طور که ادعا شده بود.

ب) فرض کنیم W زیر مدولی از V باشد و $U = \frac{V}{W}$. با استفاده از قسمت (الف) کافیست نشان دهیم U نیم‌ساده است.

فرض کنیم $U_1 = \frac{V_1}{W}$ زیر مدولی از U باشد و V_2 را چنان در نظر می‌گیریم که $V = V_1 \oplus V_2$.
در این صورت داریم،

$$U = \frac{V}{W} = \frac{V_1 \oplus V_2}{W} = U_1 \oplus \frac{V_2 + W}{W}$$

[2] simple

[3] semisimple

وبنابراین U نیم‌ساده است.

ج) عضو ناصفر $v \in V$ رادر نظر می‌گیریم. با استفاده از لم زرن زیر مدول ماکسیمال W از V نسبت به خاصیت $v \notin W$ وجود دارد.

چون V نیم‌ساده است، لذا زیر مدول W' از V وجود دارد به طوری که $V = W \oplus W'$. فرض کنیم W' مدول ساده نباشد، با توجه به این که W' زیر مدولی نیم‌ساده است، لذا دارای زیر مدول‌های ناصفر W_1 , W_2 می‌باشد که $W' = W_1 \oplus W_2$. حال چون

$$W = (W \oplus W_1) \cap (W \oplus W_2)$$

لذا $i = 1$ یا $i = 2$ وجود دارد که $v \notin W \oplus W_i$. اما این با فرض ماکسیمال بودن W نسبت به خاصیت ذکر شده تناقض دارد. بنابراین W' ساده است و حکم به دست می‌آید. $\triangle$

در دو قضیه‌ی بعد عباراتی معادل با ساده و نیم‌ساده بودن مدول‌ها بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳ فرض کنیم V یک A−مدول ناصفر باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

الف) V یک A−مدول ساده است.

ب) V دوری است و هر عضو ناصفرش مولدی برای آن است.

ج) ایده‌ال ماکسیمال m از A وجود دارد به طوری که $V \overset{A}{\cong} \frac{A}{m}$.

اثبات: (الف) $\leftarrow$ (ب): فرض کنیم $x \neq 0$ عضوی دلخواه از V باشد.بنابراین Ax زیر مدول ناصفری از V است. چون V ساده است، پس $V = Ax$. یعنی V دوری است و هر عضو ناصفرش مولدی برای آن می‌باشد.

(ب) $\leftarrow$ (ج): فرض کنیم $x \neq 0$ عضوی از V باشد، طبق فرض $V = Ax$. به راحتی می‌توان دید $Ax \cong \frac{A}{Ann(x)}$ و لذا $V \cong \frac{A}{Ann(x)}$.

قرار می‌دهیم $m := Ann(x)$ و نشان می‌دهیم m ایده‌ال ماکسیمالی از A است. ایده‌ال بودن m واضح است. فرض کنیم $m \subsetneq I \subseteq A$ که I ایده‌الی از A است. طبق فرض $r \in I$ وجود دارد که $r \notin m$ پس $rx \neq 0$.

لذا بنا به فرض rx مولدی برای V خواهد بود یعنی $V = A(rx)$ وچون $x \in V$ پس $s \in A$

وجود دارد که $x = srx$ و لذا $(1-sr)x = 0$. پس $1 - sr \in m \subsetneq I$.
از طرفی $sr \in I$ نتیجه می‌دهد که $1 \in I$ و لذا $I = A$. بنابراین m ایده‌ال ماکسیمالی از A می‌باشد.

(ج) $\leftarrow$ (الف): حلقه‌ی $\frac{A}{m}$ ایده‌ال غیر بدیهی ندارد، لذا A—مدول $\frac{A}{m}$ زیر مدول غیر بدیهی نخواهد داشت. چون بنا به فرض $V \cong \frac{A}{m}$، V زیر مدول غیر بدیهی ندارد، پس ساده است. $\triangle$

قضیه ۴.۲.۱ برای A—مدول ناصفر V، گزاره‌های زیر معادلند:

الف) V، A—مدولی نیم‌ساده است.

ب) V جمع مستقیمی از زیر مدول‌های ساده است.

ج) V مجموعی از زیر مدول‌های ساده است.

اثبات: (الف) $\leftarrow$ (ب): گردایه‌ی «مجموعه‌هایی از زیر مدول‌های ساده‌ی V که مجموع آن‌ها مستقیم است» را در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه‌ی ۲.۲.۱ (ج) این گردایه ناتهی است. لذا طبق لم زرن دارای عضو ماکسیمالی مانند $\{V_i\}$ است.
قرار می‌دهیم $W = \oplus V_i$. نیم‌ساده بودن V نتیجه می‌دهد که زیر مدول W' از V وجود دارد به طوری که $V = W \oplus W'$.
اگر $W' \neq 0$ آن گاه طبق قضیه‌ی ۲.۲.۱، W' شامل زیر مدول ساده ای مانند V' می‌باشد.
از این رو $W + V' = V' \oplus (\oplus V_i)$ که با ماکسیمال بودن $\{V_i\}$ تناقض دارد.
بنابراین $V = W, W' = 0$.

(ب) $\leftarrow$ (ج): واضح است.

(ج) $\leftarrow$ (الف): فرض کنیم W زیر مدولی از V باشد. طبق لم زرن زیر مدول W' از V، ماکسیمال نسبت به این خاصیت که $W \cap W' = 0$ وجود دارد. در این صورت $W + W' = W \oplus W'$. کافیست نشان دهیم $V = W \oplus W'$.

فرض کنیم چنین نباشد یعنی $W \oplus W' \neq V$. $v \in V$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $v \notin W \oplus W'$. طبق فرض $v = v_1 + \dots + v_n$ که $v_i \in V_i$ وهر V_i زیر مدولی ساده از V است برای $1 \leq i \leq n$. لذا $j \in \{1, \dots, n\}$ وجود دارد که $v_j \notin W \oplus W'$ و بنابراین $V_j \cap (W \oplus W') \neq V_j$.
حال ساده بودن V_j ایجاب می‌کند که $V_j \cap (W \oplus W') = 0$ و بنابراین $(W \oplus W') + V_j = W \oplus W' \oplus V_j$ که نشان می‌دهد $W \cap (W' \oplus V_j) = 0$ واین با ماکسیمال بودن W' تناقض دارد. پس حکم برقرار است. $\triangle$

حال نتیجه‌ای از قضیه‌ی فوق را بیان می‌کنیم که با استفاده از قضایای قبل به راحتی اثبات می‌شود.

نتیجه۱.۲.۵ فرض کنیم $V \neq 0$، A—مدولی نیم‌ساده باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

الف) V متناهی مولد است.

ب) V یک جمع مستقیم متناهی از زیر مدول‌های ساده است.

ج) V آرتینی است.

د) V نوتری است.

تعریف۱.۲.٦ حلقه‌ی دلخواه A را نیم‌ساده گوییم هر گاه A—مدول $_AA$ (A به عنوان A—مدول) نیم‌ساده باشد.

نکته ۱.۲.۷ طبق تعریف و نتیجه‌ی فوق حلقه‌های نیم‌ساده هم آرتینی و هم نوتری می‌باشند.

تعریف۱.۲.۸ حلقه‌ی A منظم [4] گفته می‌شود، هر گاه برای هر $x \in A$ عضو $y \in A$ وجود داشته باشد که $xyx = x$.

قضیه۱.۲.۹ برای هر حلقه‌ی A گزاره‌های زیر معادلند:

الف) A حلقه‌ای نیم‌ساده است.

ب) A نوتری منظم است.

ج) $_AA$ مجموع مستقیم متناهی از زیر مدول‌های ساده است.

اثبات:

مرجع [۹]، فصل اول را ببینید. $\triangle$

[4] regular

لم ۱۰.۲.۱ حلقه‌ی جابجایی R نیم‌ساده است اگر و تنها اگر حاصل ضربی از میدان‌ها باشد.

اثبات: فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌ساده باشد، لذا طبق تعریف R به عنوان R—مدول نیم‌ساده است پس طبق ۴.۲.۱ به صورت حاصل ضربی از R—مدول‌های ساده است.
طبق قضیه‌ی ۳.۲.۱ (ج) هر R—مدول ساده به صورت $\frac{R}{m}$ است که m ایده‌الی ماکسیمال از R می‌باشد. چون R جابجایی است پس $\frac{R}{m}$ میدان است. لذا R به صورت حاصل ضربی از میدان‌هاست.
به عکس، فرض کنیم R به صورت حاصل ضربی از میدان‌ها باشد. چون این میدان‌ها، R—مدول‌هایی ساده می‌باشند، پس R به عنوان R—مدول حاصل ضربی از R—مدول‌های ساده است و لذا طبق ۴.۲.۱ نیم‌ساده است. $\triangle$

نتیجه ۱۱.۲.۱ حلقه‌ی A نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر A—مدول نیم‌ساده باشد.

اثبات: اگر هر A—مدول نیم‌ساده باشد آن گاه A—مدول A نیز نیم‌ساده است. پس حلقه‌ی A نیم‌ساده است.
حال فرض کنیم حلقه‌ی A نیم‌ساده و V یک A—مدول و $v \in V$ باشد. در این صورت نگاشت

$$_AA \longrightarrow Av$$

$$r \longmapsto rv$$

همریختی پوشا از A—مدول‌هاست. از این رو با استفاده از قضیه‌ی ۲.۲.۱ (ب)، Av نیم‌ساده است. چون $V = \sum_{v\in V} Av$ قضیه‌ی ۴.۲.۱ (ج)، حکم را نتیجه می‌دهد. $\triangle$

قضیه ۱۲.۲.۱ فرض کنیم A, B دو حلقه و $F : A - mod \longrightarrow B - mod$ فانکتوری جمعی از رسته‌ی A—مدول‌ها به رسته‌ی B—مدول‌ها باشد. در این صورت اثر F روی هر دنباله‌ی دقیق شکافنده، یک دنباله‌ی دقیق شکافنده می‌باشد.

اثبات: به مرجع [۸] مراجعه کنید. $\triangle$

قضیه ۱۳.۲.۱ فرض کنیم M, M_1, M_2 ، A—مدول‌هایی باشند. در این صورت دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0$$

شکافته می‌شود، اگر و تنها اگر زیر مدول N از M وجود داشته باشد که $M = \phi(M_1) \oplus N$.

قضیه۱۴.۲.۱ فرض کنیم A یک حلقه باشد. در این صورت A حلقه‌ای نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی دقیق کوتاه از A—مدول‌ها و A—همریختی‌ها شکافته شود.

اثبات: فرض کنیم A حلقه‌ای نیم‌ساده باشد. در این صورت هر A—مدول نیم‌ساده است. دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 0$$

از A—مدول‌ها و A—همریختی‌ها را در نظر می‌گیریم. چون $\phi(M)$ زیر مدولی از N و N هم A—مدولی نیم‌ساده است، پس زیر مدول $\hat{N}$ از N موجود است که $N = \phi(M) \oplus \hat{N}$. حال قضیه‌ی فوق ایجاب می‌کند که دنباله‌ی مفروض شکافته شود.
به عکس، فرض کنیم I زیر مدولی از A—مدول A باشد.(I در واقع ایده‌ال چپی از A است). پس دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow I \overset{J}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \frac{A}{I} \longrightarrow 0$$

بنا به فرض شکافته می‌شود. لذا قضیه‌ی فوق ایجاب می‌کند که زیر مدول $\hat{I}$ از A—مدول A وجود دارد که $A = J(I) \oplus \hat{I}$ ، اما $J(I) = I$ لذا $A = I \oplus \hat{I}$. $\triangle$ بنابراین A—مدول A نیم‌ساده است. یعنی A حلقه‌ای نیم‌ساده است.

قضیه۱۵.۲.۱ فرض کنیم A یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:
الف) A حلقه‌ای نیم‌ساده است.
ب) هر A—مدول پروژکتیو است.
ج) هر A—مدول انژکتیو است.

اثبات: (الف) $\leftarrow$ (ب): فرض کنیم P یک A—مدول دلخواه باشد. برای اینکه ثابت کنیم P پروژکتیو است، طبق قضیه‌ای از جبر پیشرفته کافی است ثابت کنیم هر دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$$

شکافته می‌شود و این نیز با توجه به قضیه‌ی ۱۴.۲.۱ برقرار است.
(الف) $\leftarrow$ (ج): فرض کنیم E یک A—مدول دلخواه باشد. برای اینکه ثابت کنیم E انژکتیو است، کافی است نشان دهیم، هر دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$$

شکافته می‌شود و این نیز طبق ۱۴.۲.۱ برقرار است.
(ب) ← (الف) و (ج) ← (الف) نیز با توجه به قضیه‌ی ۱۴.۲.۱ برقرار می‌باشند.
△

۳.۱ ژاکبسون رادیکال مدول و حلقه

در این بخش به برخی تعاریف و قضایای مقدماتی، که در بخش‌های بعد استفاده می‌کنیم، می‌پردازیم.
ممکن است با بعضی از این تعاریف و قضایا در حلقه‌های جابجایی آشنا باشیم، اما چون در این رساله ما به طور کلی با حلقه‌های غیر جابجایی سر و کار داریم، باید برقراری این قضایا را در مورد این حلقه‌ها بررسی کنیم و آن‌ها را در حالت حلقه‌ی غیر جابجایی بیان کنیم.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم A یک حلقه‌ی دلخواه و V یک $A-$مدول باشد .
رادیکال V که با $J(V)$ نشان داده می‌شود، اشتراک تمام زیر مدول‌های ماکسیمال V تعریف می‌شود. اگر V شامل هیچ زیر مدول ماکسیمالی نباشد، تعریف می‌کنیم $J(V) = V$.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم V یک $A-$مدول باشد. زیر مدول W از V ، زائد[5] گفته می‌شود اگر برای هر زیر مدول U از V ، $W + U = V$ نتیجه دهد $U = V$.

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنیم V یک $A-$مدول باشد. در این صورت $J(V)$ مجموع تمام زیر مدول‌های زائد از V است.

اثبات: فرض کنیم W یک زیر مدول زائد از V باشد. می‌توان فرض کرد که V دارای یک زیر مدول ماکسیمال مانند M است. اگر $W \not\subseteq M$ آن گاه $M + W = V$. زائد بودن W ایجاب می‌کند $M = V$ که تناقض است. بنابراین هر زیر مدول زائد از V مشمول در $J(V)$ است.
حال ثابت می‌کنیم برای هر $x \in J(V)$ زیر مدول Ax زیر مدولی زائد از V است و در نتیجه حکم با توجه به $J(V) = \sum_{x\in J(V)} Ax$ برقرار است.

[5] superfluous

فرض کنیم $x \in J(V)$ و فرض کنیم W زیر مدولی از V باشد که $Ax + W = V$. اگر $W \neq V$، در این صورت با استفاده از لم زرن می‌توان ثابت کرد زیر مدول ماکسیمال M از V وجود دارد که $W \subseteq M$. چون $x \in J(V)$ پس $x \in M$ و در نتیجه داریم: $V = Ax + W \subseteq M$. لذا $M = V$ که این مطلب با تعریف M تناقض دارد. بنابراین $W = V$. △

قضیه ۴.۳.۱ فرض کنیم V یک A—مدول متناهی مولد باشد. در این صورت $J(V)$ زیر مدولی زائد از V است.

اثبات: فرض کنیم W زیر مدولی از V باشد که $J(V) + W = V$. فرض کنیم $W \neq V$. چون V یک A—مدول متناهی مولد است پس زیر مدول ماکسیمال M از V وجود دارد که $W \subseteq M$. بنابراین داریم، $V = J(V) + W \subseteq J(V) + M = M$. این مطلب با تعریف M تناقض دارد. پس داریم، $W = V$. △

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنیم A حلقه‌ای دلخواه باشد. رادیکال ژاکبسون، $J(A)$، از A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(A) = J({}_A A)$$

به عبارت دیگر $J(A)$ اشتراک تمام ایده‌ال‌های چپ ماکسیمال A می‌باشد.

قضیه ٦.۳.۱ فرض کنیم V یک A—مدول باشد. در این صورت

$$J(A)V \subseteq J(V)$$

اثبات: اگر V دارای زیر مدول ماکسیمال نباشد، آن گاه حکم برقرار است. پس فرض کنیم V دارای زیر مدول ماکسیمال باشد.
فرض کنیم M زیر مدول ماکسیمالی از V باشد. در این صورت $\frac{V}{M}$ یک A—مدول ساده است. لذا ایده‌ال چپ ماکسیمال m از A وجود دارد به طوری که $\frac{V}{M} \cong \frac{A}{m}$ (به عنوان A—مدول‌ها). پس داریم: $J(A)\frac{V}{M} = 0$. بنابراین $J(A)V \subseteq M$. △