دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

رشته‌ی ریاضی کاربردی

عنوان:

مطالعه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی فازی

استاد راهنما:

دکتر مجتبی رنجبر

استاد مشاور:

دکتر جعفر پورمحمود

پژوهشگر:

سمانه عرب صاحبی

شهریور /۱۳۹۲
تبریز/ ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید گشت تا ما روسفید گردیم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجودمان و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

سپاس گزاری

زبان قاصر است از بیان لطافت جاری در روح کسانی که عشق و حکمت و علم و وظیفه و اخلاص را به هم آمیخته اند تا عسل واره ای چنان روح افزا گردد که هوش از سر کودک عقل می پراند. خدای را شاکرم، نازنینانی در مسیر زندگیم قرار داد که همچو نفس ممد حیاتند و مفرح ذات. کسانی که بارها بر خواسته های خود چشم پوشیدند تا خواسته هایم محقق شود، از داشته هایشان گذشتند تا داشته باشم و چنان بی چشم داشت دوستم داشتند که حتی چشم هایم چنین نبوده اند.

سر تعظیم فرود می آورم بر آستان مقدس دو فرشته آسمانی که هرچه هست از آنان عشق دیده ام. پدرم که سپیدی موهایش را با سیاهی قلمم عوض کرد و "روحیه کنجکاوی و حس همیشگی تشنه مطالب علمی بودن" را در من پروراند. مادرم آن چشمه لطف و محبت و مهرورزی که "بردباری و عطوفت" را به من آموخت.

به مصداق "من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق" پاس خواهم داشت زحمات استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای "دکتر مجتبی رنجبر" که بی شک اگر راهنمایی های ارزنده ایشان نبود این پایان نامه به انجام نمی رسید. از جناب آقای "دکتر جعفر پور محمود" که مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفتند سپاسگزاری می کنم. از جناب آقای "دکتر علی خانی" که داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند کمال تشکر و امتنان را دارم.

بارالها، آنان که بیشتر می دانند، نزد تو عزیزترند و هر که عزیزتر است مسئول تر است. مرا در مسیر دانایانت قرار ده که عزت جهان به عزیزی نزد توست و قدرتم ده که آن باشم که تو خواهی.

سمانه عرب صاحبی
شهریور ۱۳۹۲
تبریز / ایران

فهرست مطالب

لیست تصاویر

چکیده

در این پایان‌نامه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی فازی بحث می‌شود. ابتدا تعاریف لازم را بیان می‌کنیم سپس روش‌های عددی برای حل این نوع معادلات که شامل روش تفاضلات متناهی، روش حجم متناهی و روش تجزیه آدومیان است را بررسی می‌کنیم. شرایط لازم برای پایداری و همگرایی در بعضی روش‌ها بیان می‌شود.

واژه های کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی فازی، روش تفاضلات متناهی، مشتق تعمیم‌یافته، مجموعه فازی

پیشگفتار

تئوری مجموعه‌های فازی اصول و مبانی علمی را بیان می‌کند که با قاطعیت معلوم نیست به عبارت دیگر مقادیری از یک ویژگی کیفی را مشخص می‌کند از جمله مقادیری بین سیاه و سفید، زیبا بودن یک تصویر یا حد فاصل بین دانایی و نادانی. شاید عجیب باشد اما حقیقت امر این است که این ناحیه خاکستری از بدو خلقت در پندار و کردار انسان‌ها بکار رفته است ولی تئوری‌سازی آن بی‌جواب مانده بود. هر چند طرح تئوری مجموعه‌های فازی اولین تلاش بشر برای چارچوب دادن به این ناحیه نبوده است، ولی بی‌تردید یکی از منسجم‌ترین و گسترده‌ترین این تلاش‌ها بوده است.

شاید بتوان ادعا کرد شروع تفکر فازی با شروع تفکر انسان همراه بوده است. یعنی بشر همواره کلمات و عباراتی را بکار گرفته است که مرزهای روشنی با هم نداشته‌اند. بر خلاف ابهامات از نوع احتمالی که مرز میان وقایع آن به وضوح مشخص است (مثلاً در پرتاب یک سکه، به هر حال نتیجه پرتاب یا شیر خواهد بود یا خط و بین این دو ابهام وجود ندارد) در ابهام از نوع فازی مرزها به هم آمیخته است.

انتقاد از دنیای تفکر دو حالته صفر و یک یا سیاه و سفید ریاضی‌وار، تاریخی کهن دارد. هر چند علوم دقیق قادر بوده‌اند بسیاری از پدیده‌ها را به‌درستی توصیف کنند و نیز منطق کلاسیک توانسته است استنتاج‌های درستی را به ارمغان بیاورد، اما آنها قادر نیستند همه آن چیزهایی که در اطراف ما هستند را مدل کرده و تشریح و تبیین نمایند. به این دلیل به نظر می‌رسد فازی‌بودن جزو زندگی ماست، بنابراین باید آن را شناخت و به طریقی سنجیده آن را به‌کار گرفت.

تئوری مجموعه‌های فازی، نخستین بار بطور رسمی توسط پروفسور لطفعلی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ مطرح شد. او از اولین گروه فارغ‌التحصیلان دانشکده‌ی فنی دانشگاه تهران در سال ۱۳۲۰ بود، روزی که پروفسور عسگرزاده برای اولین بار مفهوم متغیرهای زبانی را در سال ۱۹۷۲ در جلسه‌ای در فرانسه توصیف کرد، شدیداً مورد انتقاد قرار گرفت و نظریه وی تا مدت‌ها با بی‌اعتنایی دانشمندان مواجه شد. اما بهرحال تئوری فازی در مسیر راه خود علاقمندانی پیدا کرد. در ابتدا به کندی ولی بعدها با سرعتی بی‌نظیر رشد کرده و فراگیر شد.

تئوری فازی به چند بخش عمده تقسیم می‌شود که یکی از آنها ریاضیات فازی است. ریاضیات فازی شامل مجموعه‌های فازی و عملیات ریاضی مرتبط با آنهاست و حد و مرز دقیق و قطعی برای مجموعه امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال برای مجموعه افراد قد بلند نمی‌توان حد و مرز مشخصی را تعریف کرد. زیرا به طور دقیق نمی‌توان در مورد قد بلند بودن و نبودن یک فرد قضاوت کرد. لذا نیاز به مجموعه‌ای داریم

که منعطف و به طور تقریبی (نادقیق) تعریف شود، به این مجموعه، مجموعه فازی گویند.

ازطرفی دیگر یکی از مهمترین زمینه‌های ریاضیات کاربردی که ارتباط بین ریاضیات محض را با علوم فیزیکی و مهندسی برای محققان فراهم می‌کند، معادلات دیفرانسیل است. در بسیاری از شاخه‌های علوم کاربردی مانند رشته‌های مهندسی، فیزیک، اقتصاد و ... گاهی به مسائلی برمی‌خوریم که وقتی آنها را بصورت الگوی ریاضی تبدیل می‌کنیم، معادله‌ای حاصل می‌شود که شامل متغیر وابسته و متغیرهای مستقل و مشتقات نسبی متغیر وابسته نسبت به یک یا چند متغیر مستقل است، این گونه معادلات را معادلات دیفرانسیل جزئی گویند.

معادلات دیفرانسیل جزئی فازی یکی از ابزارهای ریاضی است که در مدل‌ها و فرآیندهای بیولوژیکی و مهندسی بکار رفته است. برای مثال در مرجع [۲۴] در مورد پارامترهای فازی در معادله دیفرانسیل جزئی مدل شده برای پراکندگی جمعیت مورچه‌های برگ‌خوار بحث شده است. دراین مقاله یک مدل برای تجمع مورچه‌ها در منطقه جذب با استفاده از معادله پخش-وزش ارائه می‌شود که پارامترهای پراکندگی‌جمعیت و سرعت به ترتیب در جهت‌های x و y ، از نوع فازی هستند. در [۲۶] کاربرد معادلات دیفرانسیل جزئی فازی تحت عنوان جواب‌های عددی معادلات دیفرانسیل جزئی فازی و کاربرد آن در محاسبات مکانیکی مطرح شده است. در این مقاله حل مسائلی مانند مسئله تنش صفحه‌ای، تغییر مکان سازه پوسته‌ای، تغییر مکان و نوسانات تیر که از جمله مفاهیم علم الاستیسیته است در فضای اعداد فازی بحث و بررسی شده است.

نظریه مجموعه‌های فازی ابزار قدرتمندی برای مدلسازی و فرآیندسازی داده‌های غیرقطعی و مبهم می‌باشد، در واقع کاربرد معادلات دیفرانسیل جزئی فازی، مدل کردن سیستم‌های فازی تحت شرایط مبهم و غیرقطعی است.

محاسبه جواب معادله دیفرانسیل جزئی فازی در حالت کلی بسیار سخت است. جواب دقیق این نوع معادلات فقط دربعضی موارد خاص بدست می‌آید. متأسفانه در بیشتر کاربردها و مسائل مهندسی و فیزیکی ارتباط بین جواب و پارامترهای نامعین، یکنواخت هستند. اگر عدم قطعیت پارامترها به اندازه کافی کوچك باشد، جواب دقیق می‌تواند فقط با استفاده از نقاط آخر بازه‌های تعیین شده بدست آید، که با این کار کارایی محاسبه بهبود می‌یابد. ولی اگرعدم قطعیت موجود در پارامترها به اندازه کافی کوچك نباشد و به صورت اعداد فازی در نظر گرفته شود، نتایج بدست آمده ازمحاسبات فازی مطمئن‌تر خواهد بود.

مفهوم مشتق فازی درسال ۱۹۷۲ توسط چانگ [۱] و زاده [۲] [۱۲] معرفی شده است. معادله دیفرانسیل فازی در ابتدا توسط کندل و بایت [۳] نماد گذاری شد و سپس در پردازش سیستم‌های دینامیکی فازی به کار برده شد. معادلات دیفرانسیل جزئی ابزاری است برای مدل کردن بسیاری از سیستم‌های مکانیکی، معادلات موج، گرما و غیره. روش‌های عددی برای حل معادله دیفرانسیل جزئی توسط کندل [۴] و فریدمن [۵] [۲۱] و

[۱] Chang

[۲] Zadeh

[۳] Bite

[۴] Kandel

[۵] Friedman

عباسبندی [۱] معرفی شد و بسیاری از معادلات و مسائل فیزیک و مهندسی با استفاده از این روش ها حل شدند. بوکلی [۶] [۱۱] در سال ۱۹۹۹ معادله دیفرانسیل جزیی فازی را فرمول بندی کرد. الهویرنلو با استفاده از روش‌های عددی به حل معادلات دیفرانسیل فازی و معادلات دیفرانسیل جزئی فازی به ترتیب در منابع [۷],[۵] پرداخت.

توجه شود که در این پایان نامه از عبارات معادلات دیفرانسیل جزئی به جای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات سهموی و هذلولوی به جای معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی و هذلولوی استفاده شده است.

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه می‌شود. تعریف معادلات دیفرانسیل جزئی فازی و نیز وجود جواب‌های آن در فصل دوم بحث و بررسی می‌شود. فصل سوم شامل دو بخش است که در بخش اول به حل معادلات سهموی فازی و معادلات هذلولوی فازی با روش تفاضلات متناهی پرداخته می‌شود و نیز پایداری آنها با جزئیات بررسی می‌گردد و در بخش بعدی معادله گرمای دوبعدی فازی با روش‌های تفاضلی صریح جهت متناوب و روش موضعاً یک‌بعدی حل می‌شود. در فصل چهارم ابتدا به معرفی روش حجم متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی پرداخته و سپس معادلات سهموی فازی با این روش حل می‌گردد. در فصل آخر استفاده از روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات سهموی فازی شرح داده می‌شود و در نهایت با ارائه چند مثال کارایی این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان تأکید می‌شود که مقالات اصلی این پایان‌نامه عبارتند از: [۴]،[۵]،[۶]،[۸]،[۹]،[۱۰]،[۱۱]،[۱۵],[۲۲].

[۶] Buckly

فصل ۱

قضایا و تعاریف مقدماتی

در این فصل مفاهیم و تعاریف اساسی منطق فازی از [۲۹] یاد آوری می‌شود که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشد. تابع مشخصه هر زیر مجموعه‌ی معمولی A از X، $\chi_A(x) : X \longrightarrow \{۰, ۱\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

با توجه به تعریف فوق برای هر $x \in X$، $\chi_A(x)$ تنها یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار می‌کند. حال اگر برد تابع χ از مجموعه‌ی دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ توسعه داده شود تابعی خواهیم داشت که به هر عضو x از مجموعه X عددی را از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشد. هر زیر مجموعه‌ی فازی A از X توسط تابع عضویت $\chi_A(x) : X \longrightarrow [۰, ۱]$ تعریف می‌شود که در آن برای هر $x \in X$ مقدار $\chi_A(x)$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ میزان عضویت x از A را نشان می‌دهد. نزدیکی مقدار $\chi_A(x)$ به عدد یک نشان‌دهنده‌ی عضویت بیشتر x به مجموعه‌ی A و نزدیکی آن به عدد صفر نشان‌دهنده‌ی عضویت کمتر x به مجموعه‌ی A است.
یکی از شکل‌های نمادین مجموعه‌های فازی به صورت زیر است:

$$A = \sum_{i=۱}^{n} \chi(x_i)/x_i$$

قابل توجه است که در اینجا علائم "/" و"$\sum$" به معنای تقسیم و جمع معمولی نیست بلکه این علائم

رابطه هر عضو مجموعه مرجع و تابع عضویت آن در مجموعه و ارتباط بین عناصر را نشان می‌دهد. روشی که زاده برای نمایش مجموعه‌های فازی توصیف کرده است، مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی به صورت $A = \{(x, \chi_A(x))\}$ است. هرگاه X یک مجموعه متناهی باشد آنگاه زیر مجموعه فازی X به صورت $A = \{(x_۱, \chi_A(x_۱)), (x_۲, \chi_A(x_۲)), \ldots, (x_n, \chi_A(x_n))\}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۱. زیر مجموعه‌ی فازی A از X با تابع عضویت $\chi_A(x) : X \longrightarrow [۰, ۱]$ را نرمال گویند، هرگاه $x \in X$ وجود داشته باشد بطوریکه $\chi_A(x) = ۱$. در غیر اینصورت A زیرنرمال است.

تعریف ۳.۱. فرض کنید که X مجموعه مرجع ، A و B دو زیر مجموعه فازی از X با توابع عضویت $\chi_A(x)$ و $\chi_B(x)$ باشند که با نماد $A(x)$ و $B(x)$ نشان می‌دهیم در این صورت:

۱) مجموعه فازی A را تهی می‌نامند هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $A(x) = ۰$.

۲) مجموعه‌ی فازی A را زیر مجموعه فازی B می‌نامند هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $A(x) \leq B(x)$.

۳) دو مجموعه‌ی فازی A و B را مساوی گویند هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم : $A(x) = B(x)$.

تعریف ۴.۱. برای هر α اسکالر که $\alpha \in (۰, ۱]$، α-برش مجموعه‌ی فازی A مجموعه‌ای قطعی است که شامل همه عناصری از X است که درجه عضویتشان در A ، بزرگتر یا مساوی α باشد. این مجموعه $[A](\alpha)$ نشان داده می‌شود، به عبارت دیگر داریم:

$$[A](\alpha) = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}.$$

نوع دیگر از α-برش، α-برش قوی است که کاربرد محدودتری دارد و شامل همه عناصر مجموعه مرجع است که درجه‌ی عضویتشان در مجموعه فازی بزرگتر (و نه مساوی) مقدار α باشد. برای مجموعه فازی A، α-برش قوی که با نماد $A'(\alpha)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر است:

$$[A'](\alpha) = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\}.$$

تعریف ۵.۱. تابع U نیم‌پیوسته بالایی نامیده می‌شود، اگر برای هر عدد حقیقی $\alpha \in [۰, ۱]$ مجموعه‌ی $\{x : U(x) < \alpha\}$ باز باشد. تابع U نیم‌پیوسته پایینی نامیده می‌شود، اگر برای هر عدد حقیقی $\alpha \in [۰, ۱]$ مجموعه‌ی $\{x : U(x) > -\alpha\}$ باز باشد.

تعریف ۶.۱. مجموعه‌ای از عناصر مجموعه مرجع که تابع عضویت غیر صفر دارند را تکیه‌گاه مجموعه A گویند و با نماد $Supp(A)$ نشان داده می‌شود. تکیه‌گاه مجموعه فازی A با α-برش قوی به ازای $\alpha = ۰$ ، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Supp(A) = [A'](۰) = \{x \in X \mid A(x) > ۰\}.$$

تعریف ۷.۱. فرض کنید A یك زیر مجموعه فازی از X باشد. هسته مجموعه فازی A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Core(A) = \{x \in X \mid A(x) = ۱\}.$$

تعریف ۸.۱. مجموعه معمولی $A \subseteq \mathbb{R}^k$ را محدب گویند هرگاه:

$$\forall\, x, y \in A,\ \forall\, \lambda \in [۰, ۱] \qquad \lambda x + (۱-\lambda) y \in A.$$

تعریف ۹.۱. مجموعه فازی A را محدب گویند هرگاه به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ مجموعه $[A](\alpha)$ مجموعه محدب معمولی باشد.

قضیه ۱۰.۱. *مجموعه‌ی فازی A روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ ، محدب است اگر و تنها اگر*

$$\forall x_۱, x_۲ \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in [۰, ۱] \Longrightarrow A(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \min[A(x_۱), A(x_۲)]. \qquad (۲.۱)$$

برهان. الف) فرض کنید A مجموعه محدب و $\alpha = A(x_۱) \leq A(x_۲)$ باشد بنابراین $x_۱, x_۲ \in [A](\alpha)$ و $\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲ \in [A](\alpha)$. در نتیجه برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ داریم:

$$A\left(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲\right) \geq \alpha = A(x_۱) \leq \min\{A(x_۱), A(x_۲)\}$$

ب) فرض کنید A در رابطه‌ی (۲.۱) صدق کند، حال ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ ، $[A](\alpha)$ محدب است. بنا به فرض به‌ازای هر $x_۱, x_۲ \in [A](\alpha)$ داریم:

$$A(x_۱) \geq \alpha, A(x_۲) \geq \alpha.$$

به‌ازای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ و طبق رابطه (۲.۱) داریم:

$$A(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \min\{A(x_۱), A(x_۲)\} \geq \min(\alpha, \alpha) = \alpha$$

از رابطه بالا نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$A(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \alpha$$

یعنی $\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲ \in [A](\alpha)$. بنابراین به ازای $\alpha \in [۰, ۱]$ ، $[A](\alpha)$ محدب است پس A محدب است.

□

۲.۱ عملیات در مجموعه‌های فازی

در این قسمت بعضی از اعمال روی مجموعه‌های فازی از جمله متمم، اجتماع و اشتراك و غیره یادآوری می‌شود.

- **متمم مجموعه فازی** : مجموعه فازی A' را متمم مجموعه‌ی فازی A نامند هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $A'(x) = ۱ - A(x)$.
- **اجتماع مجموعه فازی:** اجتماع مجموعه فازی شامل تمامی عناصر از x است که در A یا در B باشد و درجه عضویت هر عنصر x در اجتماع دو مجموعه ی فازی A و B به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\forall x \in X \qquad (A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}.$$

- **اشتراك دو مجموعه فازی:** اشتراک دو مجموعه فازی شامل عناصری هستند که در هر دو مجموعه A و B وجو داشته باشد و درجه عضویت هر عنصر x در اشتراك دو مجموعه فازی A و B به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\forall x \in X \qquad (A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}.$$

توجه شود که قانون $(A \cup A^{'} = X)$ و $(A \cap A^{'} = \emptyset)$ که در تئوری مجموعه‌ی معمولی برقرار است، برای مجموعه فازی برقرار نیست.

مثال ۱۱.۱. *فرض کنید* $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ *یك مجموعه باشد و دو مجموعه‌های فازی* A *و* A' *به صورت زیر تعریف شوند:*

$$A = \{(۱, ۰/۲), (۲, ۰/۳), (۳, ۰/۶), (۴,, ۰/۵)\}$$

$$A' = \{(۱, ۰/۸), (۲, ۰/۷), (۳, ۰/۴), (۴,, ۰/۵)\}$$

آنگاه داریم:

$$\chi_{(A\cup A')}(۲) = (A \cup A')(۲) = \max\{۰/۳, ۰/۷\} = ۰/۷ \Longrightarrow \chi_{(A\cup A')}(۲) \neq \chi_X(۲) = ۱$$

$$\chi_{(A\cap A')}(۲) = (A \cap A')(۲) = \min\{۰/۳, ۰/۷\} = ۰/۳ \Longrightarrow \chi_{(A\cup A')}(۲) \neq \chi_{\emptyset}(۲) = ۰$$

تعریف ۱۲.۱. ضرب دکارتی مجموعه‌های فازی:
فرض کنید $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots A_n$ مجموعه‌های فازی بر دامنه‌های $X_۱, X_۲, \ldots X_n$ باشند، آنگاه تابع عضویت ضرب دکارتی مجموعه‌های فوق در فضای $X_۱ \times X_۲ \times \ldots \times X_n$ برابر است با:

$$A_۱ \times A_۲ \times \ldots \times A_n(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = \min\{A_۱(x_۱), A_۲(x_۲), \ldots, A_n(x_n)\}$$

بعضی از عملیات جبری روی اعداد فازی عبارتند از:

۱). توان m -ام مجموعه فازی A دارای تابع عضویت زیر است:

$$\chi_{A^m}(x) = [\chi_A(x)]^m, \ \forall x \in X.$$

۲). جمع جبری دو مجموعه A و B را با $C = A + B$ نمایش می‌دهند و داریم:

$$C = \{(x, \chi_{A+B}(x))|x \in X\}$$

که در آن

$$\chi_{A+B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x).\chi_B(x).$$

۳). جمع کراندار دو مجموعه A و B را با $C = A \oplus B$ نمایش داده و داریم:

$$C = \{(x, \chi_{A\oplus B}(x))|x \in X\}$$

که در آن

$$\chi_{A\oplus B}(x) = \min(۱, \chi_A(x) + \chi_B(x)).$$

۴). تفریق کراندار دو مجموعه B, A را با $C = A \ominus B$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C = \{(x, \chi_{A\ominus B}(x)) | x \in X\}$$

که در آن

$$\chi_{A\ominus B}(x) = \max(0, \chi_A(x) + \chi_B(x) - 1).$$

۵) . ضرب جبری دو مجموعه B, A را با $C = A.B$ نمایش داده و داریم:

$$C = \{(x, \chi_{A.B}(x)) | x \in X\}$$

که در آن

$$\chi_{A.B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)$$

مثال ۱.۱۳. *اگر*

$$A = \{(3, 0/5), (5, 1), (7, 0/6)\}$$

$$B = \{(3, 1), (5, 0/6)\}$$

دو مجموعه فازی باشند آنگاه طبق تعاریف عملیات جبری داریم:

$$A^2 = \{(3, 0/25), (5, 1), (7, 0/36)\}$$

$$A + B = \{(3, 1), (5, 1), (7, 0/6)\}$$

$$A \oplus B = \{(3, 1), (5, 1), (7, 0/6)\}$$

$$A \ominus B = \{(3, 0/5), (5, 0/6)\}$$

$$A.B = \{(3, 0/5), (5, 0/6)\}$$

۱.۳ گسترش مجموعه‌های فازی

فرض کنید X ضرب دکارتی بصورت $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ و $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ به ترتیب مجموعه‌های فازی در $X_1, X_2, \ldots X_n$ باشد و فرض کنید تابع $f : X \longrightarrow Y$ تعریف شده باشد، بنا به اصل گسترش مجموعه‌های فازی می‌توان مجموعه فازی B را در Y به صورت زیر تعریف کرد:

$$B = \{(y, B(y)) \mid y = f(x_1, x_2, \ldots x_n); (x_1, x_2 \ldots x_n) \in X\}$$

بطوریکه

$$B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y)} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2), \ldots A_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq 0 \\ 0 & f^{-1}(y) = 0 \end{cases}$$

که f^{-1} معکوس f است.
برای $n=1$ داریم:

$$B(y)=\begin{cases}\sup_{x\in f^{-1}(y)} A(x) & f^{-1}(y)\neq 0\\ 0 & f^{-1}(y)=0\end{cases}$$

تعریف ۱.۱۴. فرض کنید $d: S\times S\to \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ یک متر باشد و فرض کنید A و B دو مجموعه ناتهی و فشرده روی $\mathbb{R}$ باشند. فاصله هاسدورف بین A و B به صورت زیر تعریف می شود:

$$d_H(A,B)=\max\{d^*_H(A,B), d^*_H(B,A)\}$$

که در آن $d^*_H(A,B)=\sup\{d(a,B): a\in A\}$.

۱.۴ مفهوم اعداد فازی وعملیات روی آن

تعریف ۱.۱۵. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت U را فضای اعداد فازی نامند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) به ازای $U\subseteq E$ ، U مجموعه فازی نرمال باشد.

۲) به ازای $U\subseteq E$ ، U مجموعه فازی محدب باشد.

۳) به ازای $U\subseteq E$ ، U نیم‌پیوسته بالایی در E باشد.

۴) $[U](0)$ در E فشرده باشد.

۱.۴.۱ عملیات روی مجموعه فازی

در این قسمت عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد فازی با تابع عضویتشان تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۱۶. ۱) جمع دو عدد فازی U و V به صورت زیر می‌باشد:

$$U\oplus V=\sup_{z=x+y}\min\{U(x),V(y)\}$$

۲) تفریق دو عدد فازی U و V به صورت زیر می‌باشد:

$$U-V=\sup_{z=x-y}\min\{U(x),V(y)\}$$

۳) ضرب دو عدد فازی U و V به صورت زیر می‌باشد:

$$U\odot V=\sup_{z=x\times y}\min\{U(x),V(y)\}$$

۴) تقسیم دو عدد فازی U و V به صورت زیر می‌باشد:

$$U\oslash V=\sup_{z=x\div y}\min\{U(x),V(y)\}$$

مثال ۱.۱۷. *فرض کنید* $U = \{(۳, ۰/۲), (۶, ۰/۱)\}$ *و* $V = \{(۲, ۰/۴), (۳, ۰/۵)\}$ *دو مجموعه‌ی فازی باشند، جمع و تفریق دو مجموعه‌ی U و V به صورت زیر است.*

$$U \oplus V = \{(۵, ۰/۲), (۸, ۰/۱), (۶, ۰/۲), (۹, ۰/۱)\}$$

$$U - V = \{(۱, ۰/۲), (۰, ۰/۲), (۴, ۰/۱), (۳, ۰/۵)\}$$

۱.۴.۲ عملیات روی α-برش مجموعه فازی

فرض کنید دو مجموعه $[U](\alpha) = [U_۱(\alpha), U_۲(\alpha)]$ و $[V](\alpha) = [V_۱(\alpha), V_۲(\alpha)]$ به ترتیب α-برش دو مجموعه فازی U و V باشند. برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ داریم:

$$[U_۱(\alpha), U_۲(\alpha)] + [V_۱(\alpha), V_۲(\alpha)] = [U_۱(\alpha) + V_۱(\alpha), U_۲(\alpha) + V_۲(\alpha)]$$

و

$$[U_۱(\alpha), U_۲(\alpha)] - [V_۱(\alpha), V_۲(\alpha)] = [U_۱(\alpha) - V_۱(\alpha), U_۲(\alpha) - V_۲(\alpha)]$$

تعریف ۱.۱۸. جمع و ضرب اسکالر مجموعه‌های فازی در فضای اعداد فازی، $\forall k \in E - \{۰\}$ و $\forall U, V \in E$ به فرم زیر می‌باشد:

$$[U \oplus V](\alpha) = [U](\alpha) + [V](\alpha)$$

$$[k \odot U](\alpha) = k[U](\alpha).$$

تعریف ۱.۱۹. عدد فازی U را مثبت (منفی) نامند، اگر برای هر $x < ۰$ ($x > ۰$) داشته باشیم: $U(x) = ۰$.

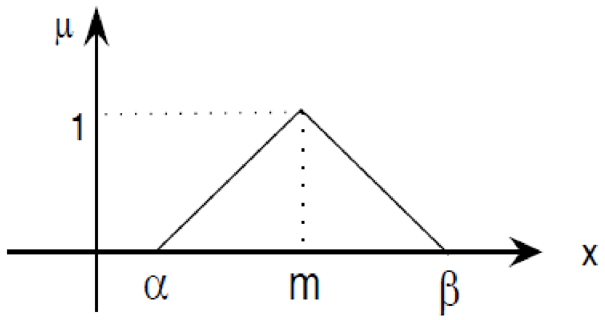
۱.۵ عدد فازی مثلثی

هرگاه تابع عضویت عدد فازی به شکل مثلثی باشد عدد فازی مثلثی[۱] نامیده می‌شود. عدد فازی مثلثی U با سه‌تایی مرتب $U = (x_l, x_c, x_r)$ نشان داده می‌شود که تابع عضویت آن به فرم زیر است:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x - x_l}{x_l - x_c} & x_l \leq x < x_c \\ ۱ & x = x_c \\ \frac{x - x_r}{x_c - x_r} & x_c < x \leq x_r \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

[۱] Triangular Fuzzy Number

اگر $x_l > ۰$ ($x_l \geq ۰$) آنگاه $U > ۰$ ($U \geq ۰$) و اگر $x_r < ۰$ ($x_r \leq ۰$) آنگاه $U < ۰$ ($U \leq ۰$).
نمایش هندسی عدد فازی مثلثی با فرض $x_r = \beta, x_c = m, x_l = \alpha$ در شکل ۱.۱ نشان داده می‌شود.



شکل ۱.۱: عدد فازی مثلثی

تعریف ۲۰.۱. هر زوج مرتب $(\underline{u}, \overline{u})$ که به ترتیب توابعی از α به شکل $(\underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha))$ می‌باشد را فرم پارامتری u گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱ . $\underline{u}(\alpha)$ یک تابع کراندار، ازچپ پیوسته و غیرکاهشی در بازه $(۰, ۱]$ و در نقطه صفر از راست پیوسته باشد.

۲ . $\overline{u}(\alpha)$ یک تابع کراندار، ازچپ پیوسته و غیرافزایشی در بازه $(۰, ۱]$ و در نقطه صفر از راست پیوسته باشد.

۳ . به ازای هر $۰ \leq \alpha \leq ۱$ ، $\underline{u}(\alpha) \leq \overline{u}(\alpha)$

- **فرم پارامتری عدد فازی مثلثی** $u = (a, b, c)$ بطوریکه $a < b < c$ و $a, b, c \in \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{u}(\alpha) = a + (b - a)\alpha, \qquad \overline{u}(\alpha) = c - (c - b)\alpha \qquad \alpha \in [۰, ۱]$$

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید $u = (\underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha))$ و $v = (\underline{v}(\alpha), \overline{v}(\alpha))$ دو عدد فازی به فرم پارامتری باشد آنگاه جمع $u \oplus v$ ، تفاضل $u \ominus v$ و ضرب اسکالر بصورت زیر تعریف می‌گردد:

۱) **جمع**

$$u \oplus v = (\underline{u}(\alpha) + \underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha) + \overline{v}(\alpha))$$

۲) **تفاضل**

$$u \ominus v = (\underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha))$$

۳) **ضرب اسکالر**

$$ku = \begin{cases} (k\underline{u}, k\overline{u}) & k \geq ۰ \\ (k\overline{u}, k\underline{u}) & k < ۰ \end{cases}$$