بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه الزهرا (س)

دانشکدهٔ علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

رشتهٔ ریاضی کاربردی

۱۳۸۲/۴/۲۰

عنوان :

مسئلهٔ مقدار ویژهٔ مقید

استاد راهنما :

آقای دکتر اسماعیل بابلیان

استاد مشاور :

آقای دکتر منوچهر رهنما

دانشجو :

مهناز آشتیانی عراقی

اسفندماه ۱۳۸۱

۴۵۸۷۰

شماره ....

تاریخ ۸۱/۱۲/۲۱

پیوست ندارد ......

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه الزهرا

بسمه تعالی

موجب نامه شماره ۳۵۹۹/ت مورخ ۸۱/۱۲/۴ جلسه دفاع از پایان نامه

خانم فرزانه آشتیانی عراقی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم پایه

شماره دانشجویی .... درروز چهارشنبه مورخ ۸۱/۱۲/۲۱ تحت عنوان ....

حل مسئله مقدار ویژه معکوس ....

در اتاق سمعی و بصری دانشکده علوم پایه برگزار گردید.

نتا خانم .... درمورد موضوع ونتایج پایان نامه صحبت نمودند وسپس به

سئوالات اعضاء حاضر در جلسه پاسخ دادند. هیئت داوران طی جلسه ای که همزمان تشکیل گردید پس از

مشورت نمره دانشجو را ......۱۹...... وبا امتیاز عالی.......... تعیین ومورد قبول قرارگرفت.

<u>هیات داوران:</u>

۱. استاد راهنما آقای دکتر اسماعیل بابلیان

۲. استاد مشاور آقای دکتر منوچهر رهنما ساوجی

۳. داور (خارجی) آقای دکتر سعید عباسبندی

۴. داور (داخلی) آقای دکتر داریوش بهمردی

نام ونام خانوادگی مدیر گروه امضاء

کاوان ایران آذر

نام ونام خانوادگی رئیس دانشکده امضاء

یا نماینده دانشکده در شورای تحصیلات تکمیلی دانشکده

تقدیم به پدر و مادر گرامی و همسر صبورم

که همواره مشوق من بوده‌اند.

تقدیر و تشکر

اکنون که به فضل الهی، دورهٔ کارشناسی ارشد خود را به پایان رسانده‌ام بر خود واجب می‌دانم از استاد گرامی جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان که در تهیهٔ این پایان نامه مرا یاری نمودند تشکر نمایم. همچنین از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر داریوش بهمردی، جناب آقای دکتر منوچهر رهنما وجناب آقای دکتر سعید عباس بندی که با مطالعهٔ پایان نامه و اختصاص اوقات گرانبهای خویش برای پیشبرد مطالعات اینجانب و ارائهٔ رهنمودهای ارزندهٔ خویش کمک شایانی به من نمودند تشکر نمایم. امیدوارم بتوانم روزی زحمات این عزیزان را جبران نمایم.

چکیـــده

فرض کنید A یک ماتریس متقارن و حقیقی باشد. به منظور یافتن بردار ویژهٔ نظیر کوچکترین مقدار ویژهٔ A مینیمم کنندهٔ $x^TA\,x$ را مشروط به $x^Tx=1$ می‌یابیم. در بسیاری از کاربردها لازم است که قیود خطی به شکل $N^Tx = t$ وارد شود. در این پایان نامه ابتدا نشان می‌دهیم که چطور می‌توان این قیود خطی را حذف کرد. سپس حل مسئلهٔ مینیمم سازی را با بکار گرفتن معادلات لاگرانژ دنبال می‌کنیم. در ادامه نشان خواهیم داد که چطور مسئلهٔ مورد نظر می‌تواند به یک معادله که معادلهٔ سکولار نامیده می‌شود تقلیل یابد. این معادله را از طریق صفریابی معمولی توابع حل می‌کنیم. ثانیاً روشی را که معادلات لاگرانژ را به یک مسئلهٔ مقدار ویژهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌کند، شرح می‌دهیم. روشهای مورد بحث را به روی مسائل مختلف مورد آزمون قرار می‌دهیم. نتایج بدست آمده کارائی روش‌ها را تأیید می‌کند.

فهرست مطالب صفحه

پیشگفتـــار

مسئلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\min = x^T A x \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \qquad N^T x = t \qquad (2)$$

$$x^T x = 1 \qquad (3)$$

که در آن A یک ماتریس متقارن و حقیقی و N یک ماتریس رتبه تمام است. در فصل اول پایان نامه به تعاریف و مفاهیمی از جبر خطی عددی، آنالیز عددی و بهینه سازی مقدماتی مورد نیاز در فصل های دوم و سوم خواهیم پرداخت.

در فصل دوم با بکارگیری تجزیهٔ QR با استفاده از روش هاوسهولدر که برنامهٔ کامپیوتری آن در فصل [3] موجود است، قیود خطی (2) را ساده می‌کنیم. سپس با استفاده از روش ضرائب نامعین لاگرانژ تابع هدف را از فرم غیر خطی به خطی تبدیل می‌کنیم. در ادامهٔ همین فصل برای حل مسئلهٔ بدست آمده از روش لاگرانژ، به معادلات سکولار صریح و ضمنی دست می‌یابیم و شرایط وجود و یگانگی جواب این معادلات را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم شیوهٔ حل معادلات سکولار صریح و ضمنی را با کمک یک روش تکراری، چنانچه در مرجع [5] آمده، ارائه می‌کنیم و در ادامه با تبدیل مسئله، به مسئلهٔ مقدار ویژهٔ درجهٔ دوم، شیوهٔ جدیدی را برای یافتن جواب امتحان می‌کنیم. در پایان این فصل سه روش ارائه شده برای حل مسئله را در قالب یک برنامهٔ کامپیوتری پیاده سازی و اجرا می‌کنیم. نتایج حاصل، در جدولهای ۱و۲و۳ موجود است.

فصـــل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

مقدمه

در این فصل ابتدا به مقدمات جبر خطی مورد نیاز و بررسی چند نوع تجزیهٔ ماتریسی و شبه وارون یک ماتریس می‌پردازیم و سپس با بررسی دستگاههای فرا معین و ارائهٔ الگوریتم حل این نوع دستگاهها و مروری بر نظریهٔ بهینه سازی مورد نیاز در فصل های دوم و سوم، این فصل را به پایان خواهیم برد.

۱.۱مقدمات جبرخطی عددی

تعریف: یک نرم برداری روی R^n ، تابعی است با نمایش $\|.\|$ از R^n به $R^{>0}$ که در خواص زیر صدق می‌کند:

۱- به ازای هر $x \in R^n$، $\|x\| \geq 0$؛

۲- $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x=0$؛

۳- به ازای هر $\beta \in R$ و $x \in R^n$، $\|\beta x\| = |\beta| \cdot \|x\|$؛

۴- به ازای هر $x, y \in R^n$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف: نُرم p در R^n به صورت

$$\| x \|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود.

با کمک تعریف فوق نرم بینهایت یک بردار به این صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| x \|_{\infty} = \max_{i} |x_i|$$

تعریف: ماتریس A، m×n را یک ماتریس حقیقی نامند اگر تمامی درایه‌های آن اعداد حقیقی باشند. اگر درایهٔ موجود در سطر i و ستون j را با a_{ij} نمایش دهیم آنگاه A را به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف: یک نرم ماتریسی بر مجموعهٔ تمام ماتریسهای m×n حقیقی، یک تابع حقیقی با نمایش $\|.\|$ است که بر این مجموعه تعریف می‌شود و به ازای تمام ماتریسهای m×n ، A و B و تمام اعداد حقیقی α در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\|A\| \geq 0$؛ ۳) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$؛

۲) $\|A\| = 0$ اگر و فقط اگر A صفر باشد؛ ۴) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

تعریف: فرض کنید x یک بردار و A یک ماتریس باشد (به طوری که ضرب بین آنها تعریف شده باشد) گوییم که نرم برداری و نرم ماتریسی سازگارند اگر:

$$\| A x \| \leq \| A \| \| x \|$$

تعریف: هرگاه $\|.\|$ یک نرم برداری روی R^n باشد آنگاه

$$\| A \| = \max_{\|x\|=1} \| A x \|$$

یک نرم ماتریسی بر مجموعه تمام ماتریسهای n×n حقیقی تعریف می‌کند که این نرم را نرم تبعی[1] می‌گویند.

با توجه به تعریف فوق تساویهای زیر ثابت می‌شوند:

$$\| A \|_{\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\| A \|_{1} = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

1.Subordinate Norm

$$\| A \|_2^2 = \rho(A^T A)$$

$\rho(A^T A)$ شعاع طیفی ماتریس $A^T A$ می‌باشد.

تعریف: نرم فربنیوس یک ماتریس مانند A که با $\| A \|_E$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| A \|_E = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف: برای هر ماتریس مربعی A، جفت اسکالر λ و بردار $x \neq 0$ را به‌ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژهٔ ماتریس A نامند، اگر $A x = \lambda x$.

تعریف: به مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس، طیف آن ماتریس گفته می‌شود.

تعریف: $\rho(A)$ را شعاع طیفی ماتریس A گویند اگر

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \text{است A مقدار ویژهٔ } \lambda \}$$

توجه: اگر $\| . \|$ بیانگر نُرم ماتریسی باشد داریم:

$$\rho(A) \leq \| A \|$$

تعریف: فرض کنید که x بردار ویژهٔ نظیر مقدار ویژهٔ λ از ماتریس A باشد در این صورت:

$$A_\lambda = \{ x : A x = \lambda x \}$$

یک زیر فضای غیر بدیهی C^n می‌باشد. بعد A_λ را **مرتبهٔ هندسی** λ می‌نامیم و مرتبهٔ λ به عنوان صفری از $P(\lambda)$ (چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A) را **مرتبهٔ جبری** λ می‌نامیم.

مثال: ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ مشخصهٔ آن به صورت زیر می‌باشد

$$(x-2)^2\,(x^2+4) = 0$$

بنابراین مقادیر ویژهٔ ماتریس B عبارتند از: $2i\ ,\ -2i\ ,\ 2$.

طبق تعریف، فضای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ فوق به ترتیب به صورت زیر است:

$$\mathrm{Sp}\{(i,-i,1,1)\}\ ,\ \mathrm{sp}\{(-i,i,1,1)\}\ ,\ \mathrm{sp}\{(1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}.$$

طبق این مثال مرتبهٔ جبری و مرتبهٔ هندسی هر کدام از مقادیر ویژه با هم برابرند. سئوالی که مطرح می‌شود این است که آیا این دو مرتبه همواره با هم برابرند؟ مثال زیر به این سئوال پاسخ می‌دهد.

مثال: ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ مشخصهٔ آن به صورت زیر مقابل است: $(x-1)^2 = 0$.

بنابر این ماتریس فوق یک مقدار ویژه برابر یک دارد که مرتبهٔ جبری آن دو است و فضای ویژهٔ آن طبق تعریف $\mathrm{sp}\{(1,0)\}$ می‌باشد، لذا مرتبهٔ هندسی آن برابر یک است. پس پاسخ سئوال فوق منفی است.

نتیجه: لزوماً مرتبهٔ جبری و مرتبهٔ هندسی با هم برابر نیستند، اما مرتبهٔ هندسی هر مقدار ویژه کمتر یا مساوی مرتبهٔ جبری آن است. برای توضیحات بیشتر می‌توانید به مرجع [7] رجوع کنید.

تعریف: مزدوج مختلط یک ماتریس مختلط مانند A که با $\overline{A}$ نشان داده می‌شود ماتریسی است که هر درایه‌اش مزدوج مختلط درایهٔ متناظرش از ماتریس A باشد.

تعریف: ماتریس مختلط مربعی A را هرمیتی گویند اگر $A^*=A$ باشد که $A^* = (\overline{A})^T$.

تعریف: ماتریس حقیقی A، n n، را متقارن گویند هر گاه $A^T=A$ (A^T را ترانهادهٔ ماتریس A گویند).

تعریف: ماتریس مختلط مربعی A را یکانی گوئیم هرگاه $A^*A = AA^* = I$.

تعریف: ماتریس مربعی P را متعامد گوئیم هرگاه $P^TP=I$. در این صورت $P^{-1} = P^T$.

توجه: ماتریسهای متعامد حافظ طول هستند یعنی اگر x یک بردار و P یک ماتریس متعامد باشد:

$$\|Px\|_2 = \|x\|_2$$

با توجه به تعاریف فوق می‌خواهیم $\|A\|_2$ را بدست آوریم.

تعریف: ماتریس متقارن A را معین مثبت گویند هرگاه تمام مقادیر ویژه‌اش مثبت باشد یا به عبارت دیگر

$$\forall x \neq 0 \qquad x^t A x > 0$$

قضیه ۱- ۱: فرض کنید A یک ماتریس متقارن و معین مثبت (نامنفی) باشد در این صورت

$$\rho(A) = \max_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

به عبارت بهتر اگر $0 < \lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_1$ مقادیر ویژهٔ A باشند ثابت می‌کنیم

$$\rho(A)=\lambda_1.$$

اثبات: فرض کنید $x \neq 0$ یک بردار دلخواه باشد در این صورت

$$\lambda_1 - \frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{x^*(\lambda_1 I - A)x}{x^* x} \geq 0$$

زیرا $(\lambda_1 I - A)$ متقارن و معین نامنفی است.

پس:

$$\lambda_1 \geq \frac{x^* A x}{x^* x}$$

اکنون باید به ازای xی تساوی را ثابت کنیم. فرض کنید x_1 بردار ویژهٔ نظیر λ_1 باشد آنگاه

$$\frac{x_1^* A x_1}{x_1^* x_1} = \frac{x_1^* \lambda_1 x_1}{x_1^* x_1} = \lambda_1$$

از طرفی چون λ_1 بزرگترین مقدار ویژه است $\rho(A) = \lambda_1$.

حالا فرض کنید A یک ماتریس دلخواه باشد در این صورت A^TA متقارن و معین نامنفی است زیرا:

$$\forall x \qquad x^* A^T A x = (Ax)^* Ax = y^* y \geq 0 \qquad , \quad (y = Ax)$$

لذا بنا به قضیهٔ قبل

$$\rho(A^TA) = \max_{x \neq 0} \frac{x^* A^T A x}{x^* x} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax)^* Ax}{x^* x}$$

$$= \max_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|_2^2}{\| x \|_2^2}$$

بنا بر این:

$$\rho(A^TA) = \| A \|_2^2$$

اگر A متقارن باشد

$$A^TA = A^2,$$
$$\rho(A^TA) = \rho(A^2) = [\rho(A)]^2,$$
$$\| A \|_2 = \rho(A).$$

نتیجه ۱-۱: اگر A متقارن باشد و $\rho(A) = |\lambda_1|$، یعنی λ_1 بزرگترین مقدار ویژهٔ از نظر قدر مطلق باشد، $\| A \|_2 = |\lambda_1|$. همچنین فرض کنید x یک بردار ویژهٔ نظیر λ_1 باشد، یعنی $A x = \lambda_1 x$، در این صورت

$$\| Ax \|_2 = \| \lambda_1 x \|_2 = |\lambda_1| \| x \|_2 = \| A \|_2 \| x \|_2$$

بنا براین

$$\| Ax \|_2 = \| A \|_2 \| x \|_2.$$

تعریف: هر گاه ماتریس نامنفرد P موجود باشد به طوری که $P^{-1}AP = D$ که در آن D قطری و A مربعی باشد، A را قطری شدنی گویند. در این صورت، ستونهای P بردارهای ویژهٔ A و عناصر قطر D مقادیر ویژهٔ A هستند.