دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

طیف ایده‌آل‌های اول مینیمال از حلقه‌ها با شرط پوچ ساز

نگارش

طاهره حقیقی

استاد راهنما

دکتر سید حمید حاجی سید جوادی

استاد مشاور

دکتر محمد اکبری تکابنی

بهمن ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه حلقه‌های با شرط پوچ‌ساز و حلقه‌هایی که فضای ایده‌آل‌های اول مینیمال آن، فشرده هستند را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. با شروع از تعمیم تعریف شرط پوچ‌ساز روی حلقه‌های نشان می‌دهیم که چندین توسیع روی حلقه‌های نیم‌اول قابل تعریف است. به علاوه، شرط پوچ‌ساز را روی شکل‌هایی از حلقه‌های ماتریسی و حلقه‌های خارج‌قسمتی کلاسیک بررسی می‌کنیم. در پایان به بررسی رابطه‌هایی بین خاصیت (A) وشرط پوچ‌ساز روی حلقه‌های خارج‌قسمتی کلاسیک راست می‌پردازیم، به‌طوری‌که چندین نتیجه از حلقه‌های جابه‌جایی با شرط پوچ‌ساز را می‌توان به حلقه‌های ناجابه‌جایی توسیع داد.

کلمات کلیدی: شرط پوچ‌ساز، خاصیت (A)، مقسم صفر، حلقه کاهشی، حلقه نیم‌اول، فون نیومن منظم، حلقه دو منظم، حلقه منظم قوی، فشرده، حلقه‌های خارج‌قسمتی کلاسیک،

فهرست مطالب

مقدمه

هنریکسن[۱] و جریسن[۲] شرط پوچ‌ساز را برای حلقه‌های جابه‌جایی کاهشی تعریف کردند، آن‌ها مثالی از یک حلقه کاهشی ارائه کردند که دارای شرط پوچ‌ساز نبود [؟]. لوکاس[۳] در سال ۱۹۸۷ تعریف دو ریاضیدان بالا را توسیع داد و مثال‌های متعددی را ارائه کرد [؟]. کلاس حلقه‌های جابه‌جایی دارای شرط پوچ‌ساز بسیار بزرگ هستند. برای مثال، این کلاس شامل حلقه‌های چندجمله‌ای روی هر حلقه کاهشی [؟]، حلقه‌های Bezout و هر زیر جمع مستقیم از دامنه کاملاً مرتب.

از طرف دیگر هوکبا[۴] و کلر[۵] خاصیت (A) را برای حلقه‌های جابه‌جایی تعریف کردند [؟]، کوانتل[۶] این خاصیت را خاصیت (C) نامید. کلاس حلقه‌های جابه‌جایی با خاصیت (A) نیز خیلی بزرگ است. این کلاس شامل حلقه‌های نوتری [؟]، حلقه‌هایی با ایده‌آل‌های اول ماکسیمال، حلقه‌های چندجمله‌ای و حلقه‌هایی که حلقه خارج قسمت کلی آنها فون نیومن[۷] منظم است [؟]. چندی از ریاضیدانان حلقه‌های جابه‌جایی دارای خاصیت (A) را مطالعه کرده‌اند و نتایج جالبی از حلقه‌های با مقسم‌های صفر به دست آورده‌اند. برای دیدن این نتایج جالب به [۷،۹،۱۰،۱۱،۲۲] رجوع کنید.

برای هر $a \in R$، تعریف می‌کنیم $\mathrm{Supp}(a) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) | a \notin P\}$.

شین[۸] ثابت کرد برای هر حلقه R، $\{\mathrm{Supp}(a) | a \in R\}$ یک پایه برای مجموعه‌های باز روی $\mathrm{Spec}(R)$ که فضای ایده‌آل‌های اول از R است، تشکیل می‌دهد [؟].

$\mathrm{Min}(R)$ که فضای ایده‌آل‌های اول مینیمال از R است در [؟، ؟، ؟، ؟، ؟]، به عنوان یک

[۱] Henriksen
[۲] Jerison
[۳] lucas
[۴] Huckaba
[۵] Keller
[۶] Quentel
[۷] von Neumann
[۸] Shin

زیر فضا در نظر گرفته شده است. این توپولوژی همان توپولوژی هسته می‌باشد (برای حلقه‌های جابه‌جایی، توپولوژی زاریسکی[۹]). توپولوژی هسته‌ای روی $\mathrm{Spec}(R)$ و $\mathrm{Min}(R)$ در حلقه‌های جابه‌جایی مطالعه شده‌اند. اگر حلقه R یکدار باشد، آن‌گاه $\mathrm{Spec}(R)$ فشرده می‌باشد، اگر چه به طور معمول $\mathrm{Min}(R)$ فشرده نیست حتی اگر R حلقه جابه‌جایی کاهشی یکدار باشد ([؟] ،گزاره ۳.۴). فشردگی فضای ایده‌آل‌های اول مینیمال نقش ویژه‌ای در حلقه‌های تابعی پیوسته دارد [؟].
هنریکسن و جریسن، ثابت کردند حلقه جابه‌جایی کاهشی R، دارای شرط پوچ ساز و $\mathrm{Min}(R)$ فشرده است اگر برای هر $a \in R$، عضوی مانند $b \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $r_R(a) = r_R(r_R(b))$ ([؟] ،گزاره ۳.۴).
کوانتل ثابت کرد R دارای خاصیت (A) و $\mathrm{Min}(R)$ فشرده است اگروفقط‌اگر حلقه خارج قسمتی کلی R، $T(R)$ فون نیومن منظم می‌باشد [؟]. هوکبا و کلر ثابت کردند R دارای خاصیت (A) و $\mathrm{Min}(R)$ فشرده است اگروفقط‌اگر R دارای شرط پوچ‌ساز و $\mathrm{Min}(R)$ فشرده باشد، اگروفقط‌اگر حلقه خارج قسمتی کلی R، $T(R)$ فون نیومن منظم باشد [؟].
شین ثابت کرد نتایج هنریکسن و جریسن در نوعی از حلقه‌های ناجابه‌جایی کاهشی R نیز صدق می‌کند [؟]. نتایج بیشتری روی توپولوژی هسته‌ای برای فضای ایده‌ال‌های اول روی حلقه‌های ناجابه‌جایی را می‌توان با مراجعه به [؟، ؟، ؟] مطالعه کرد. حلقه‌های دارای شرط پوچ‌ساز ارتباط نزدیکی با حلقه‌های دارای خاصیت (A) دارند. برای مثال، یک حلقه کاهشی جابه‌جایی دارای شرط پوچ‌ساز و خاصیت (A) می‌باشد. اگر R حلقه کاهشی و $\mathrm{Min}(R)$ فشرده باشد، یا R حلقه مرتبط کاهشی باشد، خاصیت (A) و شرط پوچ‌ساز معادلند [؟]. لوکاس نشان داد خاصیت (A) و شرط پوچ‌ساز همیشه معادل نیستند [؟].
اخیراً هانگ[۱۰]، خاصیت (A) را برای حلقه‌های ناجابه‌جایی تعریف کرد. چندین توسیع از حلقه‌های با خاصیت (A) از جمله حلقه‌های ماتریسی، حلقه‌های چندجمله‌ای و حلقه‌های خارج قسمتی کلاسیک را بررسی کرد[؟]. بعلاوه، ثابت شده است فضای ایده‌ال‌های اول مینیمال از حلقه‌های با خاصیت (A)، فشرده می‌باشد.

[۹] Zariski
[۱۰] Hong

هدف این پایان نامه تعریف شرط پوچساز روی حلقه‌های ناجابه‌جایی و بررسی حلقه‌هایی که $\mathrm{Min}(R)$ آنها فشرده است، می‌باشد.کلاس حلقه‌های دارای شرط پوچساز بزرگ است که در این پایان‌نامه به تعدادی از آنها اشاره شده است، بنابراین شرط پوچساز مفهوم مناسبی برای مشخص کردن ویژگی این حلقه‌ها می‌باشد.
مرجع اصلی مورد استفاده در این پایان نامه مقاله زیر می‌باشد

The Minimal prime spectrum of rings with annihilator conditions

که توسط هانگ، کیم[۱۱] و لی[۱۲] نوشته شده است.
این پایان نامه از سه فصل تشکیل شده است، در فصل اول مفاهیم و قضایای پایه‌ای مرتبط با فصول آتی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. فصل دوم شامل چهار بخش است که بخش اول با توسیع تعریف شرط پوچساز روی حلقه ناجابه‌جایی آغاز می‌گردد و مثال‌های متنوعی ارائه می‌شود که در شرط پوچساز صدق کرده یا صدق نمی‌نمایند. رابطه این شرط با خاصیت (A) بررسی می‌شود. بخش بعدی به تعمیم قضیه‌های حلقه‌های جابه‌جایی دارای شرط پوچساز، به حلقه‌های ناجابه‌جایی می‌پردازد. از جمله، چندین توسیع روی حلقه‌های نیم اول دارای شرط پوچساز. به‌علاوه، شرط پوچساز را روی شکل‌هایی از حلقه‌های ماتریسی بررسی می‌کند.
در بخش سه به تعریف و قضیه‌ای از حلقه‌های خارج قسمتی کلاسیک راست می‌پردازد و در پایان این فصل یعنی در بخش چهار ثابت می‌شود اگر R حلقه کاهشی باشد، آن‌گاه حلقه خارج قسمتی کلاسیک راست ، $Q(R)$ منظم قوی است اگروفقط‌اگر R دارای خاصیت (A) و $\mathrm{Min}(R)$ فشرده باشد، اگروفقط‌اگر R دارای شرط پوچساز و $\mathrm{Min}(R)$ فشرده باشد. به این ترتیب چندین قضیه از حلقه‌های جابه‌جایی به حلقه‌های ناجابه‌جایی تعمیم داده می‌شود. مطالعه رابطه بین حلقه‌های خارج قسمتی راست کلاسیک منظم قوی، فشردگی $\mathrm{Min}(R)$ و حلقه دارای شرط پوچساز R، مفهوم بهتری از حلقه‌های فون نیومن منظم ، حلقه‌های منظم و حلقه‌های مرتبط کاهشی می‌دهد.
در فصل سه شرط پوچساز روی مدول‌ها تعریف می‌شود و به بررسی چند قضیه و نتیجه از این تعریف

[۱۱] Kim
[۱۲] Lee

می‌پردازد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف، لم ها و قضایای مورد نیاز در این پایان نامه را عنوان می کنیم. در این پایان نامه R، حلقه یکدار و شرکت‌پذیر می‌باشد. برای زیر مجموعه ناتهی $S \subseteq R$، $l_R(S)$ و $r_R(S)$ به ترتیب پوچ‌ساز چپ و پوچ‌ساز راست S در R را نمایش می دهند. نماد $Z_l(R)(Z_r(R))$، مقسم های صفر چپ (راست) را نمایش می دهد. هم‌چنین Spec(R) (Min(R)) را برای فضای ایده‌آل‌های اول (مینیمال) از حلقه استفاده می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. عضو a از حلقه R را پوچ‌توان گوییم هرگاه به ازای عضوی مانند $n \in N$، $a^n = 0$. اگر ایده‌آل I از حلقه R شامل اعضای پوچ‌توان باشد، I را ایده‌آل پوچ‌توان گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. حلقه R را کاهشی گوییم هرگاه عضو پوچ‌توان غیر صفر نداشته باشد. این تعریف معادل با این است که به ازای هر $x \in R$، اگر $x^2 = 0$ نشان دهد $x = 0$.
اگر حلقه R عضو پوچ توان غیر صفر نداشته باشد در این صورت تعریف دوم برقرار است. برای عکس رابطه، فرض کنیم $x \in R$ عضو پوچ توان مخالف صفر باشد، $a^n = 0$ و n کوچکترین عددی باشد که در این رابطه صدق می کند در این صورت $(a^{n-1})^2 = a^n.a^{n-2} = 0$. طبق فرض، $a^{n-1} = 0$، که تناقض است.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم R حلقه باشد، پوچ‌ساز راست عضوی مانند $x \in R$ عبارت است از $r_R(x) = \{y \in R \mid xy = 0\}$. به طور مشابه پوچ‌ساز چپ قابل تعریف است و با نماد $l_R(x)$ نمایش داده می‌شود.

نکته ۴.۱.۱. مفهوم پوچ ساز چپ و راست در حلقه‌های کاهشی و جابه‌جایی بر هم منطبق است و با $ann(x)$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۵.۱.۱. حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ حلقه کاهشی است. هم‌چنین هر میدان و هر حلقه چندجمله‌ای روی میدان، حلقه کاهشی است.

تعریف ۶.۱.۱. حلقه R را اول گوییم هر گاه به ازای هر $a, b \in R$ ، $aRb = 0$ نشان دهد $a = 0$ یا $b = 0$.

تعریف ۷.۱.۱. حلقه R را نیم اول گوییم هرگاه به ازای هر $a \in R$، $aRa = 0$ نشان دهد $a = 0$. به طور معادل حلقه R را نیم اول گوییم هرگاه برای هر ایده آل $I \leq R$، $I^2 = 0$ نشان دهد $I = 0$.

گزاره ۸.۱.۱. برای هر حلقه R شرایط زیر معادلند:

۱. R نیم‌اول است؛

۲. R دارای ایده‌آل پوچ‌توان ناصفر نمی‌باشد؛

۳. R دارای ایده‌آل پوچ‌توان چپ ناصفر نمی‌باشد.

اثبات. رجوع شود به ([**؟**]، گزاره ۱۰.۱۶). □

مثال: هر حلقه کاهشی، نیم‌اول است.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید R حلقه جابه‌جایی و کاهشی باشد، آن‌گاه R دارای شرط پوچ‌ساز است اگر برای هر زوج $(a, b) \in R$، عضوی مانند $c \in R$ موجود باشد چنانکه $ann(a, b) = ann(c)$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید σ یک همریختی از حلقه R باشد. نگاشت $\delta : R \longrightarrow R$ را یک σ- مشتق می‌نامیم اگر δ یک نگاشت جمعی بوده و رابطه $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$ برای هر $a, b \in R$ برقرار باشد. اگر $\sigma = \mathrm{id}_R$، δ را یک مشتق R می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. یک توسیع Ore از حلقه R با $R[x; \sigma, \delta]$ نشان داده می‌شود که σ یک همریختی از R و δ یک σ- مشتق می‌باشد. اعضای $R[x; \sigma, \delta]$ چندجمله‌ای‌هایی با متغیر x و ضرایبی از R هستند که ضرایب آن در طرف چپ نوشته می‌شوند که با جمع معمولی و ضرب به صورت $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ تعریف می‌شود. اگر $\sigma = \mathrm{id}_R$، توسیع Ore حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیل پذیر نامیده شده و با $R[x; \delta]$ نشان داده می‌شود و اگر $\delta = 0$ آن را حلقه چندجمله‌ای‌های کج نامیده و با $R[x; \sigma]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. حلقه سری‌های توانی با متغیر x با $R[[x]]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه سری های توانی کج با $R[[x,\sigma]]$ نمایش داده می‌شود و اعضای حلقه با متغیر x با رابطه $xa = \sigma(a)x$ جا به جا می شوند.

لم ۱۴.۱.۱. سری توانی $a_0 + a_1x + \cdots$ در حلقه $R[[x,\sigma]]$ معکوس پذیر است اگروتنهااگر a_0 در R معکوس پذیر باشد.

اثبات. رجوع شود به **[؟]**. □

تعریف ۱۵.۱.۱. عضو e در حلقه R را خودتوان نامیم هرگاه $e^2 = e$. به وضوح، ۰ و ۱ (اگر R یکدار باشد) عناصری خودتوان هستند.

تعریف ۱۶.۱.۱. حلقه R را آبلی گوییم هرگاه هر خودتوان آن مرکزی باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. حلقه R را فون نیومن منظم گوییم هرگاه برای هر $a \in R$ عنصری مانند $b \in R$ موجود باشد که $aba = b$.

تعریف ۱۸.۱.۱. حلقه R را شبه بئر[۱] گوییم هرگاه پوچ ساز راست (چپ) هر ایده آل غیر صفر آن، به عنوان یک ایده آل راست (چپ)، توسط یک خودتوان تولید شود.

تعریف ۱۹.۱.۱. حلقه R، حلقه $Bezout$ راست می‌باشد اگر هر ایده‌آل به طور متناهی تولید شده از R ایده‌آل اصلی باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱. حلقه R را حلقه تصویری اصلی راست (چپ) گوییم هرگاه پوچ ساز راست (چپ) هر عضو غیر صفر آن، توسط یک خودتوان تولید شود.

نکته ۲۱.۱.۱. اگر A و B ایده‌آل از Rباشند و $A \subseteq B$، آن‌گاه $l_R(B) \subseteq l_R(A)$ و همچنین $r_R(B) \subseteq r_R(A)$. زیرا اگر $x \in l_R(B)$ آن‌گاه $xB = 0$ و از $A \subseteq B$ داریم $xA = 0$ در نتیجه $x \in l_R(A)$. برای پوچ‌ساز راست نیز به همین روش به دست می‌آید.

---
[۱] quasi-Baer

تعریف ۲۲.۱.۱. اگر R یک حلقه بوده و عدد صحیح مثبتی موجود باشد که $nr = 0$ یا به طور معادل $n1 = 0$ در R، کوچکترین آن‌ها را مشخصه R نامیم و با $\text{char } R$ یا $\text{ch}(R)$ نشان می‌دهیم. اگر چنین عدد صحیح مثبتی وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $\text{char } R$=0.

قضیه ۲۳.۱.۱. فرض کنید F یک میدان باشد. در این صورت مشخصه F یا صفر است یا عدد اولی مانند p.

اثبات. رجوع شود به [؟]. □

تعریف ۲۴.۱.۱. یک مجموعه مرتب جزئی مجموعه‌ای است مانند A همراه با رابطه‌ای چون R بر $A \times A$ (به نام ترتیب جزئی از A) که منعکس، متعدی و پادمتقارن است.

تعریف ۲۵.۱.۱. مجموعه مرتب جزئی $(X, \leqslant)$ را یک زنجیر یا یک مجموعه کاملاً مرتب نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$.

تعریف ۲۶.۱.۱. حلقه R را یک حلقه به طور کامل مرتب شده[۲] نامیم هرگاه رابطه $\leqslant$ روی R وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

۱. $(R, \leqslant)$ یک زنجیر باشد؛

۲. اگر $a \leqslant b$ آن‌گاه $a + c \leqslant b + c$ برای هر $a, b, c \in R$؛

۳. اگر $a \leqslant b$ و $c \geqslant 0$ آن‌گاه $ac \leqslant bc$ و $ca \leqslant cb$؛

تعریف ۲۷.۱.۱. حلقه R را مرتب نامیم اگر ترتیب کلی (تعدی) با رابطه "$<$" روی R برای هر $a, b, c \in R$ به صورت زیر عمل کند:

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c$$

$$0 < a, 0 < b \Longrightarrow ab > 0$$

[۲] fully ordered

لم ۲۸.۱.۱. مجموعه N_n از همه اعضای a در یک حلقه مرتب شرکت‌پذیر R که در $a^n = 0$ صدق می‌کند یک ایده‌آل از R می‌باشد که توان $n-$ام آن صفر می‌شود. N_n شامل تمام کلاس‌های ارشمیدسی می‌باشد.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقه به طور کامل مرتب شده باشد. اگر $a \in N_n$، $b \in R$ اعضای مثبت باشند و $ab \geq ba$ آن‌گاه $a^2b^2 \geq abab = (ab)^2$ با ادامه این فرآیند با استقرا داریم $a^nb^n \geq a(a^{n-1}b^{n-1})b \geq a(ab)^{n-1}b \geq a(ba)^{n-1}b = (ab)^n$ بنابراین $ab \in N_n$. به طور مشابه $ba \in N_n$. حال اگر $a_1, a_2 \in N_n$ و $0 \leq a_2 \leq a_1$، آن‌گاه

$$(a_1 \pm a_2)^n \leq (2a_1)^n = 0$$

و این نشان می‌دهد $a_1 \pm a_2 \in N_n$، در نتیجه N_n یک ایده‌آل از R می‌باشد. فرض کنیم $a_1, \cdots, a_n \in N_n$ و اگر قرار دهیم $a = max(a_1, -a_1, \cdots, a_n, -a_n)$، آن‌گاه $a \in N_n$ و $0 = -a^n \leq a_1 \cdots a_n \leq a^n = 0$، بنابراین توان $n-$ام N_n صفر می‌شود.
حلقه R را ترتیبی ارشمیدسی گوییم هرگاه برای هر $a, b \in R$، $n > 1$ وجود داشته باشد چنانکه $na > b$. بنابر این تعریف: اگر $b \sim a \in N_n$، آن‌گاه برای عدد طبیعی m، $b < ma$ و برای $b \in N_n$، رابطه $0 \leq b^n \leq (ma)^n = 0$ برقرار است در نتیجه اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۲۹.۱.۱. اعضای پوچ‌توان یک حلقه مرتب شرکت پذیر R به شکل یک ایده‌آل از R می‌باشد وحلقه خارج قسمتی R/N شامل هیچ مقسمی از صفر نیست.

اثبات. N اجتماع زنجیر صعودی $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_n \subseteq \cdots$ از ایده‌آل‌ها می‌باشد و در نتیجه خودش نیز ایده‌آل است. اگر در حلقه به طور کامل مرتب شده از R، $a, b \in N$ و $0 < a \leqslant b$ آن‌گاه $0 \leqslant a^2 \leqslant ab \in N$. این نشان می‌دهد که $a^2 \in N$ در نتیجه $a \in N$. □

لم ۳۰.۱.۱. فرض می‌کنیم I یک ایده‌آل از حلقه نیم‌اول R و S مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال از R که شامل I نمی‌باشند در نظر گرفته شود، آن‌گاه داریم $ann(I) = \bigcap\{P : P \in S\}$.

اثبات. فرض کنیم $B = \bigcap\{P : P \in S\}$، هر عضو از $I \cap B$ در اشتراک همه مینیمال‌های اول از R می‌باشد. ازآن‌جاکه $IB \subseteq I \cap B$، $I \cap B = 0$ در نتیجه $B \subseteq ann(I)$. و از طرف دیگر برای هر $P \in S$، $I.ann(I) = (0) \subseteq P$، آن‌گاه طبق اول بودن P، $ann(I) \subseteq P$ ازآن‌جاکه $I \nsubseteq P$، بنابراین $ann(I) \subseteq B$. □

قضیه ۳۱.۱.۱. برای هر ایده‌آل I از حلقه نیم‌اول R، شرایط زیر معادلند:

۱. I پوچ‌ساز ماکسیمال می‌باشد؛

۲. I ایده‌آل اول مینیمال و پوچ‌ساز می‌باشد؛

۳. I ایده‌آل اول و پوچ‌ساز می‌باشد؛

۴. $I = ann(u)$ که u ایده‌آل یکنواخت از R است؛

* اگر تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال از R متناهی باشد، آن‌گاه شرط زیر نیز با شرط‌های بالا معادل است:

۵. I ایده‌آل اول مینیمال می‌باشد.

اثبات. رجوع شود به (**[؟]**، لم ۱۱.۴۱). □

تعریف ۳۲.۱.۱. گوییم خانواده $\{C_i\}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه C در شرط زنجیر صعودی (ACC) صدق می‌کند اگر برای هر زنجیر صعودی مانند $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq \cdots$ عدد طبیعی n وجود داشته باشد به‌طوری‌که $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = C_{i_{n+2}} = \cdots$. شرط زنجیر نزولی به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۳۳.۱.۱. R- مدول چپ M را نوتری (آرتینی) گوییم اگر خانواده تمام زیرمدولهایش درشرط زنجیر صعودی (نزولی) صدق کند.

تعریف ۳۴.۱.۱. عضو $a \in R$ یک مقسم صفر چپ نامیده می‌شود اگر عضوی مانند $b \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ab = 0$. مقسم صفر راست به طور مشابه تعریف می‌شود. عضوی که یک مقسم صفر چپ و راست باشد یک مقسم صفر نامیم.

تعریف ۳۵.۱.۱. حلقه D را یک دامنه گوییم اگر مقسم صفر چپ یا راست نابدیهی نداشته باشد. به عبارت دیگر برای هر $a, b \in D$ اگر $ab = 0$ آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$. به طور مثال هر حلقه بخشی یک دامنه است.

تعریف ۳۶.۱.۱. حلقه R را نوتری چپ (آرتینی چپ) گوییم اگر به عنوان R- مدول چپ، نوتری (آرتینی) باشد. حلقه نوتری و آرتینی راست به طور مشابه تعریف می‌شوند. اگر R هم نوتری (آرتینی) چپ و هم نوتری (آرتینی) راست باشد آن‌گاه R را یک حلقه نوتری (آرتینی) گوییم.

تعریف ۳۷.۱.۱. گوییم R- مدول M_R دارای بعد یکنواخت n (که به صورت $U.dimM = n$ نمایش داده می‌شود) است هرگاه زیرمدولی از آن که با هر زیر مدول آن اشتراک نابدیهی دارد (زیر مدول اساسی) موجود باشد به‌طوری‌که V جمع مستقیم از n زیر مدول یکنواخت باشد. ازآن‌جاکه I_R به عنوان یک R- مدول راست در نظر گرفته می‌شود، ایده‌آل یکنواخت قابل تعریف است.

قضیه ۳۸.۱.۱. برای هر حلقه نیم‌اول R، شرایط زیر معادلند:

۱. $n := u.dim_R R_R < \infty$؛

۲. t، تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال R، متناهی است؛

۳. m، تعداد پوچ‌سازهای R، متناهی است؛

۴. R دارای شرط زنجیر صعودی روی ایده‌آل‌های پوچ‌ساز می‌باشد؛

۵. R دارای شرط زنجیر نزولی روی ایده‌آل‌های پوچ‌ساز می‌باشد؛

۶. R دارای شرط زنجیر صعودی روی مقسم‌های صفر می باشد؛

۷. R دارای شرط زنجیر نزولی روی مقسم‌های صفر می باشد.

اگر این شرایط برقرار باشند آن‌گاه $n = t$ و $m = 2^t$. در نتیجه $n = t = 1$ اگروفقطاگر R یک حلقه اول باشد.

اثبات. رجوع شود به ([؟]، لم ۱۱.۴۳). □

تعریف ۳۹.۱.۱. زیر حلقه $S \subseteq R$ را یک حلقه گوشه‌ای R می‌نامیم اگر زیرگروهی جمعی مانند $C \subseteq R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $R = S \oplus C$ و داشته باشیم $S.C \subseteq C$ و $C.S \subseteq C$. زیرگروه C را یک مکمل حلقه گوشه ای S در R می‌نامیم. برای مثال اگر e یک خوتوان مرکزی از R باشد، eRe را حلقه گوشه‌ای از R گوییم.

تعریف ۴۰.۱.۱. عضو $a \in R$ را مرکزی می‌نامیم هرگاه برای هر $r \in R$ داشته باشیم $ar = ra$. مجموعه عناصر مرکزی حلقه R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۴۱.۱.۱. برای خودتوان $e \in R$ شرایط زیر معادلند:

۱. $(1 - e)Re = 0$؛

۲. eR ایده آلی از R است؛

۳. $R(1 - e)$ ایده آلی از R است؛

۴. $eR(1 - e)$ ایده آلی از R است و $eR = eR(1 - e) \oplus Re$.

اثبات. رجوع شود به [؟]. □

تعریف ۴۲.۱.۱. حلقه R را دو منظم گوییم، هرگاه هر ایده‌آل اصلی (RxR) از R توسط خودتوان مرکزی تولید شود.

گزاره ۴۳.۱.۱. اگر R حلقه دو منظم باشد آن‌گاه هر ایده‌آل اول M از R ماکسیمال است.

اثبات. اگر R دو منظم باشد آن گاه برای هر ایده‌آل M ازR ، حلقه R/M دو منظم است [؟]. بنابراین اگر M ایده‌آل اول باشد، R/M حلقه دو منظم اول است. در نتیجه R/M شامل یک ایده‌آل اصلی سره نیست، ازآن‌جاکه اگر R/M شامل یک ایده‌آل اصلی سره باشد باید دو ایده‌آل ناصفر داشته باشد که ضرب آنها صفر شود. بنابراین R/M یک حلقه ساده و M ایده‌آل ماکسیمال از R است. □

تعریف ۴۴.۱.۱. حلقه R را منظم ضعیف راست گوییم اگر برای هر عضو $x \in R$، $x \in xRxR$ باشد. به طور مشابه حلقه منظم ضعیف چپ قابل تعریف است. اگر حلقه R منظم ضعیف راست و چپ باشد منظم ضعیف است.

لم ۴۵.۱.۱. حلقه R کاهشی و منظم ضعیف است اگروفقطاگر برای هر $x \in R$،

$$ann(x) \oplus RxR = R$$

اثبات. فرض کنیم $ann(x) \oplus RxR = R$، ثابت می‌کنیم R کاهشی و منظم ضعیف است. اگر $x \in ann(x)$، آن‌گاه x به RxR متعلق نیست، در نتیجه داریم $x^2 = 0$، نشان می‌دهد $x = 0$. بنابراین R حلقه کاهشی است. به آسانی دیده می‌شود R منظم ضعیف است.
برای اثبات عکس، فرض می‌کنیم که R کاهشی و منظم ضعیف است. برای هر $x \in R$، عضوی مانند $a \in RxR$ موجود می باشد به‌طوری‌که $x = xa$،که نشان می‌دهد $1 - a \in ann(x)$ و در نتیجه $ann(x) + RxR = R$.
حال فرض می‌کنیم $b \in ann(x) \cap RxR$، آن‌گاه داریم $xb = 0$ و ازآن‌جاکه $(bRx)^2 = bRxbRx = 0$ نتیجه می‌شود $bRx = 0$ و $bRxR = 0$. از طرفی $b \in RxR$، در نتیجه $b^2 = 0$ و بنابر کاهشی بودن R، $b = 0$. از طرفی هر خودتوان از R مرکزی می‌باشد، در نتیجه R جمع مستقیم حلقه‌های $ann(x)$ و RxR می‌باشد. □

گزاره ۴۶.۱.۱. در یک حلقه کاهشی منظم ضعیف R، برای هر ایده‌آل اول P از R، R/P یک دامنه ساده است .

اثبات. برای هر ایده‌آل اول P از R، ایده‌آل اول مینیمال Q از R را چنان انتخاب می‌کنیم که

$Q \subseteq P$. ازآن‌جاکه R حلقه کاهشی است، R/Q دامنه است. با توجه به منظم ضعیف بودن R، R/Q دامنه ساده می‌باشد، که نتیجه می‌دهد $P = Q$. بنابراین R/P دامنه ساده است. □

تعریف ۴۷.۱.۱. مجموعه یکه‌های حلقه R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴۸.۱.۱. برای حلقه کاهشی R شرایط زیر معادلند:

۱. R حلقه دو منظم است؛

۲. R منظم ضعیف است؛

۳. برای هر ایده‌آل اول P از R، $P = \bigcup_{x\in R-P} ann(x)$؛

۴. برای هر $x \in U(R)$، R یک حلقه تصویری اصلی راست و $R = RxR$ می‌باشد.

اثبات. (۱)⇐(۲) با توجه به لم (**؟؟**)، اگر R حلقه کاهشی و منظم ضعیف باشد آن‌گاه $ann(x) \oplus RxR = R$. از آن جاکه همه خودتوان‌ها در R مرکزی هستند $R = eR \oplus (1-e)R$، بنابراین RxR توسط خودتوان مرکزی تولید می‌شود و این نتیجه می‌دهد R حلقه دو منظم است.
(۳)⇐(۲) قرار می‌دهیم $Q = \bigcup_{x\in R-P} ann(x)$. با استفاده از گزاره (**؟؟**)، R/P یک دامنه ساده است، بنابراین $Q \subseteq P$. برای عکس شمول، اگر $x \in P$، $a \in RxR \subseteq P$ موجود است به‌طوری‌که $x = xa$ که $x(1-a) = 0 \in P$ و این نشان می‌دهد $1 - a \in R - P$، در نتیجه $P \subseteq Q$.

برای اثبات سایر روابط رجوع کنید به ([**؟**]، قضیه ۶). □

تذکر ۴۹.۱.۱. حلقه کاهشی R منظم ضعیف است اگر وفقط اگر همه ایده‌آل‌های اول از R ماکسیمال باشند. که معادل با عبارت (۳) در قضیه بالا می‌باشد.

تعریف ۵۰.۱.۱. فرض کنیم R حلقه باشد و $I \neq R$ یک ایده‌آل باشد. آن‌گاه I به طور کامل اول است اگر R/I دامنه باشد.

لم ۵۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه کاهشی باشد. برای هر عدد صحیح و مثبت n و هر جایگشت $\sigma \in S_n$، اگر $x_1x_2\cdots x_n = 0$ آن‌گاه $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} = 0$.

اثبات. رجوع کنید به ([**؟**]، لم ۱.۲). $\square$

لم ۵۲.۱.۱. فرض کنیم R حلقه کاهشی، $X \subset R \setminus 0$ زیر مجموعه ناتهی و $I = R \setminus X$. در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱. X زیر نیم گروه ضربی ماکسیمال از $(R \setminus 0)$ می‌باشد؛

۲. X یک زیر نیم گروه ضربی R است و برای هر $b \in I$، عضوی مانند $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $xb = 0$؛

۳. X یک زیر نیم گروه ضربی R است و برای هر $B \subset I$، عضوی مانند $x \in X$ چنان موجود است که $xB = 0$؛

۴. I یک ایده‌آل اول مینیمال از R است.

اثبات. ۱⇐۲ فرض کنیم $b \in I$. اگر $b = 0$ آن‌گاه برای هر $x \in X$، $xb = 0$. در این صورت با فرض $0 \neq b \in I$، $T \subset R$ زیر نیم گروه ضربی تولید شده توسط X و b باشد. از ماکسیمال بودن X داریم $0 \in T$. در نتیجه با لم قبل و فرض $b \neq 0$، عدد طبیعی k و $x \in X$ چنان موجودند که $(xb)^k = 0$ در نتیجه $xb = 0$.

۲⇐۳ فرض کنیم $n \geqslant 1$ و $B = \{b_1, \cdots, b_n\} \subset I$. با توجه به فرض عناصری مانند $x_1, \cdots, x_n \in X$ موجودند به‌طوری‌که برای $i = 1, \cdots, n$، $x_ib_i = 0$. از طرفی X زیر نیم گروه ضربی است، لذا $x = x_1 \cdots x_n \in X$. در نتیجه از لم قبل داریم $xB = 0$.

۳⇐۴ با انتخاب X از $R \setminus 0$ داریم $0 \in I$. بنابراین $I \neq 0$. حال فرض کنیم $r, s \in I$. بنا به فرض عضوی مانند $x \in X$ موجود است به‌طوری‌که $xr = 0$ و $xs = 0$. در نتیجه $x(r-s) = 0$ و با فرض $r - s \in X$، ازآن‌جاکه X یک زیر نیم گروه ضربی است و $x \in X$، $x(r-s) \in X$ و در این صورت $0 \in X$ که با انتخاب X در تناقض است. در نتیجه $r - s \in I$. بنابراین I

یک زیر نیم گروه جمعی از R است. حال اگر $s \in I$ و $r \in R$ باشند، با توجه به فرض $x \in X$ موجود است به‌طوری‌که $xs = 0$. در این صورت $xsr = 0$ و ازاین‌رو $sr \in I$ و I یک ایده‌آل از است. حال باید نشان دهیم I یک ایده‌آل اول است. فرض می‌کنیم $arb \subseteq I$. با توجه به فرض عضوی مانند $x \in X$ موجود است به‌طوری‌که $xab = 0$، با توجه به ضربی بودن X نتیجه می‌شود a یا b باید متعلق به I باشند. در نتیجه I ایده‌آل اول است. حال اگر P ایده‌آل اولی از R باشد که $I \subset P$. اگر $r \in I$، آن‌گاه با فرض $x \in X$ موجود است به‌طوری‌که $xr = 0$ و با توجه به کاهشی بودن R، $rx = 0$. در نتیجه $(xRr)^2 = 0$ و $(xRr) = 0 \subset P$. از طرفی P ایده‌آل اول است و $x \in X$، $r \in P$ و در نتیجه $I = P$. بنابراین Iایده‌آل اول مینیمال از R است.

۱⇐۴ فرض کنیم S زیر نیم گروه ضربی از R تولید شده توسط X باشد. اگر $0 \in I$، آن‌گاه عدد صحیح $n \geqslant 1$ و $x_1, \cdots, x_n \in X$ وجود دارند به‌طوری‌که $0 = x_1 \cdots x_n \in X$. با فرض n به عنوان کوچکترین عدد صحیح مثبتی که $x_1 \cdots x_n \in X = 0$ می‌توان دید $0 \notin X$ و در نتیجه $n \geqslant 2$. از طرفی طبق ایده‌آل اول بودن I، عضوی مانند $r \in R$ موجود است به‌طوری‌که $x_1 r x_2 \notin I$. حال با توجه به لم قبل $0 = r x_1 \cdots x_n = (x_1 r x_2) x_3 \cdots x_n$. با انتخاب $x_1 r x_2$ به عنوان عضوی از X، $x x_3 \cdots x_n = 0$. یعنی حاصل ضرب $n-1$ عضو از X برابر صفر می‌شود که با مینیمال بودن n در تناقض است. بنابراین $S \subset R \setminus 0$. حال فرض کنیم $X \subseteq T$، که T زیر نیم گروه ماکسیمال $R \setminus 0$ و P یک ایده‌آل ماکسیمال از R مجزا از T باشد. به وضوح P ایده‌آل اول از R است و $P \subseteq I$. از طرفی با توجه به مینیمال بودن I داریم $I \subseteq P$ و در نتیجه $P = I$. بنابراین $T \subseteq X$ و X زیر نیم گروه ماکسیمال $R \setminus 0$ است. □

نتیجه ۵۳.۱.۱. فرض کنیم R حلقه کاهشی و I ایده‌آلی از R باشد و $X = R \setminus I$. آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

۱. I یک ایده‌آل اول مینیمال از Rاست؛

۲. I یک ایده‌آل اول مینیمال از R که به طور کامل اول است؛

۳. X زیر نیم گروه ضربی ماکسیمال از $(R \setminus 0)$ می‌باشد؛