بسم الله الرحمن الرحیم

مجتمع علوم پایه

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

# یک روش تکراری سریع برای حل معادلات انتگرالی ولترا – فردهلم

استاد راهنما: دکتر فرید (محمد) مالک قائینی

استاد مشاور: دکتر قاسم برید لقمانی

پژوهش و نگارش: سهیلا امین صدرآبادی

شهریورماه ۱۳۸۵

تقدیم به سرمایه‌های زندگیم :

# پدر و مادرم،

# قدردانی

حمد و سپاس بی کران پروردگار قادر و متعال را سزاست و درود فراوان بر تمامی پیامبران که فرستادهٔ اویند برای نمود راه راست به ما و رسیدن به رستگاری. تعلیم و تعلم چراغی است روشنگر این طریق و با آرزوی اینکه بتوانیم با استعانت از همه این بزرگان به سمت و سویی برویم که رستگار شویم.

دل به دانش اندوزی بستم و من امروز می توانم دستانم را بر فراز آورم به شکرانه این که حضرت حق مرا در مسیر این تعالی قرار داد و به سمتی هدایت نمود که بیاموزم و... باز بیاموزم. در مسیری که تمامی ناصرانش در نصرت من کوشیدند و محبت آنان بی دریغ بود که من طالبی بودم با بضاعت اندک و بی حمایت و رهنمود اساتید محترم و دیگر دوستانم این امکان وجود نداشت. با تمامی وجود از مقام شامخ استاد گرانمایه‌ام ، جناب آقای دکترفرید(محمد)مالک که در نهایت لطف و بزرگواری تمامی سعی و تلاش خود را در جهت اعتلای واقعی و بی شائبه در زمینه علمی نسبت به این جانب مبذول فرمودند، کمال قدردانی را می نمایم. همچنین از جناب آقای دکترقاسم برید لقمانی که در سمت استاد مشاور بر بنده منت گذارده و مساعدت های بی دریغ شان نقطهٔ عطفی در مسیر موفقیت این پایان نامه بوده کمال تشکر را دارم. از جناب آقای دکتر دهقان که با قبول داوری این پایان نامه از سوی ایشان، توفیقی بزرگ نصیب اینجانب شد، قدردانی می کنم. همچنین از کلیه اساتید دلسوز و بزرگوار گروه ریاضی به خصوص جناب آقای دکتر سید مهدی کرباسی و دکتر حمید مظاهری به خاطر زحماتی که در طول دوره تحصیل متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم. از سایر عزیزان بالاخص جناب آقای دکتر سید محمود هادیزاده یزدی که در مسیر این پایان نامه مرا یاری کرده‌اند، سپاس گزارم .

دانشگاه یزد

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورت‌جلسه دفاعیه پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی خانم **سهیلا امین صدرآبادی** دانشجوی کارشناسی ارشد مجتمع علوم دانشگاه یزد، در رشته/ گرایش ریاضی کاربردی

تحت عنوان: **یک روش تکراری سریع برای حل معادلات انتگرالی ولترا- فردهلم**

و تعداد واحد **۶** در تاریخ **۸۵/۶/۲۹**

| با حضور اعضای هیات داوران متشکل از | نام و نام خانوادگی | امضاء |
|---|---|---|
| ۱- استاد راهنما | دکتر فرید(محمد) مالک قائینی | |
| ۲- استاد مشاور | دکتر قاسم برید لقمانی | |
| ۳- داور خارج از گروه | دکتر مهدی دهقان | |
| ۴- داور داخل گروه | دکتر سیدمهدی کرباسی | |

تشکیل گردید و پس از ارزیابی پایان‌نامه توسط هیات داوران با درجهٔ **عالی** و نمره به عدد **۱۹/۲۵** و حروف **نوزده و بیست و پنج صدم** مورد تصویب قرار گرفت.

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام و نام خانوادگی: دکتر توسلی

امضاء

# فهرست مندرجات

ه

## چکیده

برای حل دستگاه‌های معادلاتی که ناشی از گسسته سازی زمانی — مکانی معادلات انتگرا لی ولترا — فردهلم می‌باشند، از روش نیوتن استفاده می‌کنیم. تعداد معادلات این دستگاه به تعداد گره‌های مکانی وابسته است. از طرفی بدست آوردن جواب این معادلات از این طریق می‌تواند بسیار پر هزینه باشد.

تلاش ما کاهش دادن این هزینه‌ها با حل هر تکرار نیوتن با استفاده از یک فرآیند تکرار درونی غیر ساکن می‌باشد. هر تکرار درونی دوباره نیازمند جواب یک دستگاه خطی معادلات می‌باشد. اجرای این روش تکراری با مثال‌هایی گویا توضیح داده شده است.

# فصل ۱

# مقدمه

در بیشتر کارهای عددی انجام گرفته برای حل معادلات انتگرالی ولترا — فردهلم که در مقالات مختلف ارائه شده‌اند، از روش‌های تصویری [۱] [۱۷]، روش‌های هم محلی [۲] [۳] و روش نیستروم ذوزنقه‌ای [۳] [۱۸] استفاده شده است. در مرجع [۲۱] حل مسائل خطی و در مرجع [۳] حل مسائل غیر خطی معادلات انتگرالی ولترا — فردهلم

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{\circ}^{t} \int_{\Omega} G(t,s,x,\xi,u(s,\xi)) d\xi ds \qquad (۱.۱.۱)$$

با روش‌های هم محلی اسپلاین [۴] به صورت گسسته—زمانی و پیوسته—زمانی ارائه شده است. در حالی که در مرجع [۵] روش گام — زمانی [۵] با بکارگیری روش‌های مستقیم مربع سازی $(DQ)$ خاصی اجرا شده است. در مرجع [۱۹] روش نیستروم ذوزنقه‌ای در طول زمان و مکان به کار رفته و از برونیابی ریچاردسون [۶] برای افزایش دقت جواب عددی استفاده شده است. در فاصلهٔ

---

[۱] projection methods

[۲] collocation methods

[۳] trapezoidal Nystrom method

[۴] spline collocation methods

[۵] time-stepping method

[۶] Richardson extrapolation

سال‌های ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ حل عددی این نوع معادلات توسط افرادی چون هاشیا[۷] [۱۷](۱۹۹۶)، کوتن [۸][۲۱] (۱۹۸۹) و برونر[۹][۳](۱۹۹۰) مورد بحث قرارگرفت، وبه علت کاربرد زیاد این نوع معادلات درشیمی، زیست شناسی، مهندسی و فیزیک حل آنها هنوز به عنوان یک مسأله مهم مورد توجه محققین می‌باشد.

در این پایان نامه به بررسی تقریب‌های عددی برای حل معادلات (۱.۱.۱) می‌پردازیم. شایان ذکر است که هدف اصلی ما در حل عددی معادلات (۱.۱.۱) ترکیب مناسب گسسته سازی زمانی —مکانی برای تولید تقریبات مراتب بالاتر می‌باشد به قسمی که هزینهٔ تحمیل شده برای محاسبات منطقی باشد[۷].

اما آنچه در این پایان نامه ارائه کرده‌ایم:

فصل دوم ) آشنایی با مفاهیم اولیهٔ معادلات انتگرال—دیفرانسیل که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌شود.

فصل سوم ) مدل‌سازی معادلات از نوع (۱.۱.۱) را انجام می‌دهیم تا کاربرد آنها را در مهندسی و علوم طبیعی در عمل نشان دهیم.

فصل چهارم ) تجزیه و تحلیل عددی مسأله ، که به صورت پلی برای برقراری ارتباط بین معادلات انتگرالی و آنالیز عددی عمل می‌کند.

فصل پنجم ) از روش‌های عددی برای رسیدن به جواب‌های تقریبی معادلات از نوع (۱.۱.۱) استفاده شده است. همچنین روشی جدید، برای تلاش در جهت کاهش هزینه‌های محاسباتی به کار گرفته می‌شود.

فصل ششم ) برخی مثال‌ها و نتایج عددی حاصل از آنها را به تفصیل بررسی خواهیم کرد.

---

[۷] Hacia

[۸] Kauthen

[۹] Brunner

# فصل ۲

# تعاریف و پیش نیازها

## ۱.۲ معادلات دیفرانسیل

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و علوم اجتماعی را اگر به صورت ریاضی بیان کنیم منجر به معادله دیفرانسیل، یعنی معادله‌ای که شامل یک تابع (مجهول ) و مشتقات آن است، می‌شود.
نمایش معمول یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$L[y] = g$$

که در این جا $L$ یک عملگر دیفرانسیلی است و $g$ یک تابع معمولی می‌باشد.

**مثال ۱.۱.۲** معادلهٔ

$$f''(x) + f'(x) + xsinx = 0$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ ۲ خطی می‌باشد.

در صورتی که مشتق تابع مجهول تنها نسبت به یک متغیر در معادله ظاهر شده باشد، معادله رایک معادله دیفرانسیل عادی و در غیر این صورت آن را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامیم[۲۷].

**مثال ۲.۱.۲** معادلهٔ

$$\frac{\partial^2(u)}{\partial^2(x)} + \frac{\partial^2(u)}{\partial^2(y)} = 0 \qquad ; \qquad u = u(x, y)$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد.

مرتبهٔ یک معادله دیفرانسیل بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در معادله می‌باشد. یک معادله دیفرانسیل از مرتبه $n$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$L[y] = \sum_{j=0}^{n} f_j(t) y^{(j)}(t) = g(t)$$

که در آن $f_j(t)$ هاو $g(t)$ توابع معمولی هستند.

## ۲.۲ معادلات انتگرال

معادلات انتگرال به صورت کلی

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,u(t))dt \qquad (۱.۲.۲)$$

و

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t,u(t))dt \qquad (۲.۲.۲)$$

را به ترتیب معادلات انتگرال فردهلم[۱] و معادلات انتگرال ولترا[۲] گویند، که در آن $\lambda$ یک پارامتر است. اگر تابع $K$ نسبت به $u$ خطی باشد آنگاه معادلهٔ انتگرالی مربوطه را خطی می‌نامیم.

## ۳.۲ معادلات انتگرال خطی

صورت کلی یک معادله‌انتگرال خطی عبارت است از:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt$$

یعنی در واقع معادلات (۱.۲.۲) و (۲.۲.۲) خطی هستند هرگاه عملگر $K$ نسبت به $u$ خطی باشد. در این صورت تابع معلوم $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. اگر $f(x) = ۰$ باشد معادله انتگرال خطی همگن و در غیر این صورت ناهمگن نامیده می‌شود.

[۱] Fredholm
[۲] Volterra

## ۱.۳.۲ معادلات انتگرال خطی فردهلم

صورت استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد بالا و پایین انتگرال گیری اعداد ثابت هستند به صورت زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (a \leq x, t \leq b) \qquad (۳.۳.۲)$$

که در آن هسته معادله انتگرال $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ داده شده‌اند و $\lambda$ یک پارامتر معلوم می‌باشد. بر حسب آنکه $\phi(x)$ چه مقداری را انتخاب کند، معادلات انتگرالی خطی فردهلم به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

۱ــ اگر $\phi(x) = 0$، معادله (۳.۳.۲) به صورت :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = 0$$

در می‌آید که آن را یک معادله خطی فردهلم نوع اول گویند.

۲ــ اگرتابع $\phi(x)$، روی $[a,b]$ هرگز صفر نشود آنگاه با تقسیم طرفین بر $\phi(x)$ و نامگذاریهای جدید داریم:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

که آن را یک معادله خطی فردهلم نوع دوم گویند.

## ۲.۳.۲ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، که در آنها حد بالا و پایین انتگرال گیری بجای آنکه عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از $x$ می باشد به صورت زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \qquad (a \leq x, t \leq b) \qquad (۴.۳.۲)$$

که این نوع معادلات با توجه به مقدار $\phi(x)$ و با فرض $\beta(x) = x$ و $\alpha(x) = a$ به دو گروه تقسیم بندی می‌شوند.

۱— اگر $\phi(x) = 0$، معادله (۴.۳.۲) به صورت:

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = 0$$

در می‌آید که آن را یک معادله ولترای خطی نوع اول گویند.

۲— اگر $\phi(x) \neq 0$، معادله (۴.۳.۲) به صورت ساده‌تر

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = 0$$

در می‌آید که آن را یک معادله ولترای خطی نوع دوم گویند.

## ۴.۲ معادلات انتگرال — دیفرانسیل غیر خطی

ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ در حال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرال — دیفرانسیل مواجه شد. در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف معادله، در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر با مشتقات معمولی ظاهر می‌شود. در واقع شکل کلی این معادله عبارتست از:

$$\sum_{j=0}^{n} p_j(x)u^{(j)}(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,\mu)F(u(\mu))d\mu$$

که در آن $n$، بزرگترین مرتبه مشتق $u(x)$ ظاهر شده در معادله بوده و تابع $F(u(\mu))$ یک تابع بر حسب $u(\mu)$ می باشد. واضح است که در حالت $F(u(\mu)) = u(\mu)$، معادله فوق یک معادله انتگرال — دیفرانسیل خطی می‌باشد.

تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک و زیست شناسی در قالب این نوع معادلات انتگرال — دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. البته این گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک

معادله انتگرال هم نمایان می‌گردند. این معادلات را بر اساس حدود انتگرال گیری معادله انتگرال — دیفرانسیل ولترا یا معادله انتگرال — دیفرانسیل فردهلم نام گذاری می‌کنند.

## ۱.۴.۲ تبدیل معادلات انتگرال ولترا به معادلات دیفرانسیل

در اینجا روشی که معادله انتگرال ولترای نوع دوم را به یک مسالهٔ مقدار اولیه معادل تبدیل می کند، ارائه می‌شود. این کار به سادگی با اعمال قاعده لایب نیتز[۳] در زمینه مشتق یک انتگرال انجام می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که قاعده لایب نیتز برای مشتق گرفتن از انتگرال $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(t,x)dt$ نسبت به $x$، به صورت زیر به کار می‌رود:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt = G(x,\beta(x))\frac{d\beta}{dx} - G(x,\alpha(x))\frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G}{\partial x}dt$$

که در آن $G(x,t)$ و $\frac{\partial G}{\partial x}$ توابعی پیوسته روی دامنه $D$ می‌باشند و $D$ ناحیه‌ای در صفحه است که شامل مستطیل $R = \{(x,t); a \leq x \leq b, t_۰ \leq t \leq t_۱\}$ می‌باشد. در ضمن حدود انتگرال گیری یعنی $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابعی هستند که روی فاصله $(a,b)$ مشتق‌های پیوسته دارند[۲۸].

**مثال ۱.۴.۲** حاصل

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^۲} e^{xt}dt$$

را بیابید.

حل : در این مثال $G(x,t) = e^{xt}$ و $\alpha(x) = x$ و $\beta(x) = x^۲$، بنابراین خواهیم داشت: $\alpha'(x) = ۱$ و $\beta'(x) = ۲x$ و $\frac{\partial G}{\partial x} = te^{xt}$ و با استفاده از قاعده لایب نیتز داریم:

$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^۲} e^{xt}dt = (e^{x^۳} \times ۲x) - (e^{x^۲} \times ۱) + \int_{x}^{x^۲} te^{xt}dt$

---

[۳] Liebnitz's rule

**مثال ۲.۴.۲** معادله انتگرال زیر را به یک مساله مقدار اولیه تبدیل کنید:

$$u(x) = x^{۳} + \int_{\circ}^{x} (x-t)^{۲} u(t)dt \qquad (۵.۴.۲)$$

حل : با سه دفعه مشتق گرفتن از دو طرف معادله (۵.۴.۲) بدست می‌آوریم :

$$u'(x) = ۳x^{۲} + ۲\int_{\circ}^{x}(x-t)u(t)dt$$

$$u''(x) = ٦x + ۲\int_{\circ}^{x} u(t)dt$$

$$u'''(x) = ٦ + ۲u(x)$$

شرایط اولیه مربوطه را نیز می‌توان به سادگی با جایگذاری $x = \circ$ در $u(x)$، $u'(x)$ و $u''(x)$ بدست آورد. در نتیجه مسأله مقدار اولیه غیر همگن از مرتبه سوم به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u'''(x) - ۲u(x) = ٦,\ u(\circ) = u'(\circ) = u''(\circ) = \circ$$

## ۲.۴.۲ تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا

قبل از بیان روش، لازم است قضیه زیر را که انتگرال‌های چند گانه را به انتگرال ساده تبدیل می‌کند، مطرح کنیم[۲۸]:

$$\int_{\circ}^{x}\int_{\circ}^{x_۱}\int_{\circ}^{x_۲}...\int_{\circ}^{x_{n-۱}} f(x_n)dx_n...dx_۱ = \frac{۱}{(n-۱)!}\int_{\circ}^{x}(x-t)^{n-۱}f(t)dt \qquad (٦.۴.۲)$$

این یک فرمول اساسی و مهم است و در روشی که برای انجام این نوع تبدیلات ارائه می شود مورد استفاده قرار می‌گیرد. روند تبدیل به این صورت است که بزرگترین مرتبه مشتق را مساوی با $u(t)$ در نظر گرفته و از طرفین با استفاده از شرایط اولیه از ∘ تا $x$ انتگرال می‌گیریم.

**مثال ۳.۴.۲** مسأله مقدار اولیه

$$y''' - ۳y'' - ٦y' + ۵y = \circ, \quad y(\circ) = y'(\circ) = y''(\circ) = ۱ \qquad (۷.۴.۲)$$