به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (جبر)

عنوان :

زیرگروه های ساکن و گروه‌های تماماً ساکن

استاد راهنما :

دکتراحمد عرفانیان

استاد مشاور :

دکتر کاظم چیتی

نگارنده :

علیرضا دوست آبادی

تیر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

ساحت مقدّس آقا علی بن موسی الرضا

و

پدر و مادر مهربانم

قدردانی

ای خدا، من افتتاح ستایش به حمد تو می کنم و به نعمت واحسانت، راه حق و صواب را می جویم و یقین دارم که تو مهربانترین مهربانان در موضع عفو وبخششی.

ای خدا تو به ما اجازه دادی که به درگاهت دعا کنیم و حاجت طلبیم. پس ای خدای شنوا، سپاس مرا بپذیر.

بدین وسیله مراتب قدردانی و تشکر خود را نسبت به استاد راهنمای بزرگوارم دکتر احمد عرفانیان ابراز می‌دارم و برای ایشان توفیق روزافزون آرزومندم که بدون راهنمایی‌های ایشان در مراحل تحقیق رساله، به انجام رساندن این پژوهش میسّر نبود.

همچنین سپاس و قدردانی خود را به اساتید محترم دکتر رجب زاده مقدم و دکتر خشیارمنش که قبول زحمت نموده و پایان نامه‌ام را مورد مطالعه و داوری قرار داده‌اند تقدیم می‌نمایم و از دکتر کاظم چیتی که به عنوان استاد مشاور همکاری نموده اند کمال سپاس و تشکر را دارم.

از کارمندان دانشکده، واحد انتشارات، اداره آموزش و بخش کتابخانه، دوستان خوبم آقایان محمد امین رستم یاری، جواد دانشمند و همه کسانی که به نوعی بر گردن بنده حقی دارند سپاسگزارم.

در نهایت از پدر و مادرم عزیزم بسیار متشکرم که آنچه در توان داشتند برای کسب تحصیل من دریغ نکرده‌اند.

این مجموعه را به همهٔ این بزرگواران تقدیم می‌کنم.

علیرضادوست آبادی – تیر ماه ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

پیشگفتار

زیر گروه های A و B از گروه G را **هم مقیاس** [۱] گویند هرگاه زیرگروه $A \cap B$، اندیس متناهی در A و B داشته باشند.

اگر یک زیر گروه با تمام زیرگروه های مزدوج خودش در G هم مقیاس باشد، آن را زیرگروه ساکن نامند. معادلاً به ازای هر $g \in G$، $|H : H \cap H^g|$ متناهی است.عبارت **ساکن** اولین بار توسط پروفسور **کِگِل** [۲] بیان شده است.

واضح است که زیرگروه های نرمال، زیرگروه های متناهی و زیرگروه های با اندیس متناهی در G زیرگروه هایی ساکن اند. در این رساله عمدتاً گروه های نامتناهی و ساده را مورد مطالعه قرار می دهیم و قضیه اصلی را مبنی بر اینکه **گروه نامتناهی، ساده، موضعاً متناهی و تماماً ساکن وجود ندارد** در فصل سوم، بخش سوم با ذکر برهان ارائه خواهیم کرد.

این رساله متشکل از سه فصل، بر اساس مقالات [1] و [4] کتابنامه طرح ریزی شده است. البته مقالات دیگری نیز مورد استفاده قرار گرفته که در انتهای رساله لیست گردیده است.

در فصل اول به تعاریف و اصطلاحات اولیه پرداخته و مقدمات را برای فصول بعدی فراهم خواهیم کرد.

فصل دوم را به معرفی و بررسی خواص زیرگروه های ساکن و گروه های تماماً ساکن اختصاص داده و با ذکر مثال های عینی ماهیت این نوع گروه ها را برای خواننده مشخص خواهیم کرد. به عنوان نمونه،

---

[۱] Commensurable

[۲] Kegel

نشان خواهیم داد که زیرگروه و تصویر همریخت گروه تماماً ساکن، گروه هایی تماماً ساکن است. اما خاصیت توسیع در گروه های تماماً ساکن برقرار نیست.

فصل سوم متشکل از سه بخش است که دربخش اول لم های مورد نیاز قضیه اصلی را با ذکر برهان بیان می کنیم. بخش دوم اختصاص به قضیه هایی دارد که در قضیه اصلی استفاده شده است در بخش سوم قضیه اصلی را بیان و ثابت خواهیم کرد.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ همرده های راست و چپ

در این بخش به معرفی همرده های یک زیرگروه و بیان خواص اصلی اندیس زیرگروه ها در یک گروه می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید H زیر گروه ثابتی از گروه G و $a, b \in G$.

a همنهشت راست با b به پیمانه H است، $a \equiv_r b \ (modH)$، اگر $ab^{-1} \in H$.

a همنهشت چپ با b به پیمانه H است، $a \equiv_l b \ (modH)$، اگر $a^{-1}b \in H$.

اگر G گروهی آبلی باشد، آنگاه همنهشتی راست و چپ به پیمانه H بر هم منطبقند.

هم چنین گروه های نا آبلی G و زیر گروه های H از آن موجودند به طوری که همرده های چپ و راستشان بر هم منطبق است. اما در حالت کلی این مطلب برقرار نیست.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنید H زیرگروهی از گروه G باشد

الف) همنهشتی راست (چپ) به پیمانه H یک رابطه هم ارزی روی G است؛

ب) رده هم ارزی $a \in G$ تحت همنهشتی راست (چپ) به پیمانه H عبارت است از مجموعه

$$Ha = \{ha \mid h \in H\} \qquad (aH = \{ah \mid h \in H\})$$

ج) به ازای هر $a \in G$، $|Ha| = |H| = |aH|$.

برهان. به ۲.۴.۱، از مرجع [۷] مراجعه شود. □

تعریف ۳.۱.۱ مجموعه Ha، همرده راست H در G و aH همرده چپ H در G نامیده می شود.

نتیجه ۴.۱.۱ فرض کنید H زیر گروهی از گروه متناهی G باشد

الف) G، اجتماعی از همرده های راست (چپ) H در G است؛

ب) دو همردهٔ راست (چپ) H در G، یا مجزا هستند یا مساویند؛

ج) اگر R، مجموعهٔ مجزای همرده های راست H در G و L، مجموعهٔ مجزای همرده های چپ H در G باشند، آنگاه $|R| = |L|$.

برهان. به ۳.۴.۱، از مرجع [٦] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید H زیرگروهی از گروه G باشد، اندیس H در G که با |G:H| نشان داده می شود عبارت است از تعداد همرده های مجزای راست (چپ) H در G.

قضیه ٦.۱.۱ اگر H، K و G گروه هایی متناهی باشند که $K < H < G$، آنگاه

$$|G:K| = |G:H||H:K|$$

اگر هر دو تایی از این اندیس ها متناهی باشند آنگاه اندیس سومی نیز متناهی است.

برهان. بنا به نتیجه ۴.۱.۱، $a_i \in G \;,\; G = \bigcup_{i\in I} Ha_i$، $|I| = |G:H|$ و همرده های Ha_i دوبدو مجزایند، بطور مشابه $b_j \in H \;,\; H = \bigcup_{j\in J} Kb_j$، $|J| = |H:K|$ و همرده های Kb_j دوبدو مجزایند. بنابراین

$$G = \bigcup_{i\in I} Ha_i = \bigcup_{i\in I}(\bigcup_{j\in J} Kb_j)a_i = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} Kb_ja_i$$

حال کافیست نشان دهیم همرده های Kb_ja_i دوبدو مجزایند.

اگر $Kb_ja_i = Kb_ra_t$ پس $b_ja_i = kb_ra_t \; (k \in K)$. چون $b_r, b_j, k \in H$، در نتیجه

$$Ha_i = Hb_ja_i = Hkb_ra_t = Ha_t$$

از این رو $b_j = kb_r$, $i = t$. بنابراین $j = r$, $Kb_j = Kkb_r = Kb_r$ با توجه به نتیجه ۴.۱.۱ داریم $|G : K| = |I \times J|$، که

$$|G : K| = |I \times J| = |G : H||H : K|.$$

□

نتیجه ۷.۱.۱ اگر H زیرگروهی از گروه متناهی G باشد آنگاه $|G| = |G : H||H|$ و هم چنین مرتبه a $(a \in G)$ مرتبه گروه را عاد می کند.

برهان. بااستفاده از قضیه قبل و جایگزینی $K = \langle ۱ \rangle$ قسمت نخست نتیجه ثابت می شود، قسمت دوم حالت خاصی از قسمت اول با فرض $H = \langle a \rangle$ است. □

تعریف ۸.۱.۱ اگر G یک گروه و K، H زیرگروه هایی از آن باشند، HK را با مجموعه $\{hk \mid h \in H, k \in K\}$ تعریف می کنیم. HK لزوماً زیرگروه نیست امّا می توان مرتبه HK را تعیین کرد.

قضیه ۹.۱.۱ اگر H و K زیرگرو ه هایی متناهی از گروه G باشند. آنگاه

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

برهان. فرض کنید $C = H \cap K$ زیرگروهی از K با اندیس $n = \frac{|K|}{|H \cap K|}$ و K اجتماعی از همرده های راست $Ck_۱, Ck_۲, \ldots, Ck_n$ برای $k_i \in K$ و $i = ۱, ۲, \ldots, n$.

چون $HC = H$، نتیجه خواهد داد که HK اجتماع مجزایی از $Hk_۱, Hk_۲, \ldots, Hk_n$. بنابراین

$$|HK| = |H|n = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

□

قضیه ۱۰.۱.۱ اگر H و K زیرگروه هایی از گروه G باشند، آنگاه $|H : H \cap K| \leq |G : K|$. اگر $|G : K|$ متناهی باشد آنگاه $|H : H \cap K| = |G : K|$ اگر و تنها اگر $G = KH$.

برهان. فرض کنید A، مجموعه همرده های راست $H \cap K$ در H و B، مجموعه همرده های راست K در G باشد. نگاشت

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow B \\ (H \cap K)h &\to Kh \end{aligned}$$

خوش تعریف است، زیرا

$$(H \cap K)h' = (H \cap K)h \Rightarrow h'h^{-1} \in H \cap K \subset K$$

از این رو $Kh' = Kh$، همچنین φ نیز یک به یک است، پس

$$|H : H \cap K| = |A| \leq |B| = |G : K|.$$

اگر $|G : K|$ متناهی باشد آنگاه $|H : H \cap K| = |G : K|$ اگر و تنها اگر φ پوشا و φ پوشاست اگر و تنها اگر $G = KH$. توجه کنید که به ازای هر $h \in H$ و $k \in K$، $Kkh = Kh$ چون $(kh)h^{-1} = k$.
□

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید H و K زیرگروه هایی با اندیس متناهی از گروه G باشند، در این صورت $|G : H \cap K|$ متناهی و $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$ بعلاوه $|G : H \cap K| = |G : H||G : K|$ اگر و تنها اگر $G = HK$.

برهان. استفاده از قضایای ۶.۱.۱ و ۱۰.۱.۱ برهان را واضح خواهد کرد. □

قضیه ۱۲.۱.۱ (پوانکاره [۱])
مقطع یک مجموعه متناهی از زیرگروه های گروه G که هر یک اندیس متناهی در G دارند خود، اندیس متناهی در G دارد.

برهان. بااستفاده از قضیه قبل و استقراء به سادگی حکم برقرار است. □

لم ۱۳.۱.۱ فرض کنید H و K زیرگرو ه هایی از گروه G باشند
الف) اگر $H \leq K$ و $|G:H|$ متناهی، آنگاه $|G:K|$ نیز متناهی است؛
ب) اگر $H \leq K$، G، $N \trianglelefteq G$ و $|K:H|$ متناهی، آنگاه $|KN:HN|$ نیز متناهی است؛
ج) اگر $H_1 \leq K_1$، $H_2 \leq K_2$، $|K_1:H_1| < \infty$ و $|K_2:H_2| < \infty$ آنگاه $|K_1 \cap K_2 : H_1 \cap H_2|$ نیز متناهی است؛
د) اگر $H \leq K$ و $|K:H|$ متناهی‌باشد، آنگاه به ازای هر $g \in G$، $|K^g : H^g|$ متناهی است.

برهان. الف) فرض کنید A، مجموعه همرده های راست و مجزای H در G و B، مجموعه همرده های راست و مجزای K در G باشد. نگاشت α را بصورت زیر تعریف کنید

$$\begin{aligned} \alpha : A &\longrightarrow B \\ Hg &\longmapsto Kg \end{aligned}$$

واضح است کهα خوش تعریف و پوشاست. در نتیجه $|B| \leq |A| < \infty$ یعنی $|G:K|$ متناهی است.
ب) هر همرده HN در KN به شکل

$$HNkn = HNknk^{-1}k = HNk = HkN$$

از متناهی بودن $|K:H|$ نتیجه حاصل خواهد شد.
ج) واضح است زیرا $(H_1 \cap H_2)k = H_1k \cap H_2k$ به ازای هر $k \in K_1 \cap K_2$.

---
[۱] Poincare

د) فرض کنید A، مجموعه همرده های راست و مجزای H در K و B، مجموعه همرده های راست و مجزای H^g در K^g ($g \in G$ دلخواه است). نگاشت γ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{aligned} \gamma : A &\longrightarrow B \\ Hk &\longmapsto H^g k^g \end{aligned}$$

واضح است که γ خوش تعریف، پوشا و یک به یک است و این حکم را نتیجه خواهد داد. $\square$

۲.۱ گروه ماتریس ها و تبدیلات خطی

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید R حلقه ای یکدار و $GL(n,R)$ مجموعه ماتریس های $n \times n$ معکوس پذیر با درایه هایی از R باشد که این مجموعه با عمل ضرب معمولی ماتریس ها تشکیل یک گروه می دهد. از خواص اولیه ماتریس ها مشاهده می شود که عنصر همانی، I_n (ماتریس همانی $n \times n$) است. این گروه، **گروه خطی عام** [۲] از درجه n روی R نامیده می شود. بویژه اگر F یک میدان باشد، $GL(n,F)$ گروه همهٔ ماتریس های نامنفرد $n \times n$ روی F است.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید V فضایی برداری روی میدان F، با بعد n و $GL(V)$، مجموعه همه تبدیلات خطی یک به یک و پوشا روی V باشد. $GL(V)$ با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می دهد. یعنی

$$\alpha,\beta \in GL(V) \text{ و } v \in V \text{ که } \alpha o \beta(v) = \alpha(\beta(v)).$$

یک رابطه ای ما بین گروه های $GL(V)$ و $GL(n,F)$ وجود دارد. با انتخاب یک پایه ثابت برای فضای برداری V هر تبدیل خطی یک به یک و پوشا روی V، با یک ماتریس نامنفرد $n \times n$ روی F، متناظر است. این تناظر یک یکریختی گروهی از$GL(V)$ به $GL(n,F)$ است.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند. یک تبدیل خطی از V به W عبارت است از تابع T از V به W بطوری که به ازای هر $\alpha,\beta \in V$ و هراسکالر c در F، $T(c\alpha+\beta) = cT\alpha + T\beta$.

[۲] General Linear Group

بدیهی است که تبدیل خطی T نامنفرد است هرگاه $T\gamma = 0$ نتیجه دهد که $\gamma = 0$. در واقع فضای پوچی T، $\{0\}$ است.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید V و W دو فضای برداری از بعد متناهی روی میدان F باشند بطوری که $dimV = dimW$. اگر T تبدیل خطی از V به W باشد شرایط زیر هم ارزند

الف) T معکوس پذیر است؛

ب) T نامنفرد است؛

ج) T پوشاست.

برهان. به ۹.۲.۳، از مرجع [٦] مراجعه شود. □

۳.۱ عمل گروه بر یک مجموعه

تعریف ۱.۳.۱ گروه G بر مجموعه ناتهی S، عمل می کند اگر تابعی با ضابطهٔ

$$G \times S \longrightarrow S$$
$$(g, s) \longmapsto gs$$

وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $g_1, g_2 \in G$ و $s \in S$

$$(g_1 g_2)s = g_1(g_2)s \quad \text{و} \quad es = s$$

مثال ۲.۳.۱ فرض کنید H زیرگروهی از گروه G، گروه H روی مجموعه G با ضابطهٔ $(h, x) \longmapsto h^{-1}xh$ عمل می کند.

عمل $h \in H$ روی G را تزویج به وسیلهٔ عنصر h نامند و $h^{-1}xh$ را **مزدوج** [3] x گویند.

فرض کنید S، مجموعه همهٔ زیرگروه های G باشد. H با ضابطهٔ تزویج $(h, K) \longmapsto h^{-1}Kh$ روی S عمل می کند. اگر K زیرگروهی دلخواه از G و $h \in H$، آنگاه $h^{-1}Kh$ زیرگروهی از G است که یکریخت با K می باشد . گروه $h^{-1}Kh$ مزدوج K نامیده می شود.

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنید گروه G روی مجموعه S عمل کند

الف) رابطهٔ $\sim$ روی S تعریف شده بدین صورت

به ازای هر $s, s' \in S$، $s \sim s'$ اگر وتنها اگر عنصر $g \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $gs = s'$

یک رابطهٔ هم ارزی روی S است.

ب) به ازای هر $s \in S$،

$$G_s = \{g \in G \mid gs = s\} \leq G.$$

[3] Conjugate

برهان. واضح است. □

تعریف ۴.۳.۱ رده های رابطهٔ هم ارزی فوق، **مدارهای** [۴] G روی S نامیده می شوند، مدار s را با $\overline{s}$ نشان می‌دهند و زیر گروه G_s را **پایدارساز** [۵] s گویند.
اگر گروه G با ضابطه تزویج روی خودش عمل کند. مدار x $(x \in G)$، **ردهٔ تزویج** [٦] x نامیده می شود.
اگر زیرگروه H روی G با تزویج روی G عمل کند، پایدارساز x

$$H_x = \{h \in H \mid h^{-1}xh = x\} = \{h \in H \mid xh = hx\}$$

مرکزساز [۷] x در H نامیده می شود که آن را با $C_H(x)$ نشان می دهند.
اگر $H = G$، برای سادگی $C_G(x)$ مرکز ساز x نامیده می شود.

تعریف ۵.۳.۱ اگر H با تزویج روی مجموعه S، شامل تمام زیرگروه های G $(H \leq G)$ عمل کند. زیرگروه H که $K \in S$ را ثابت نگه می دارد در واقع $\{h \in H \mid h^{-1}Kh = K\}$، **نرمالساز** K[۸] در H گویند و با $N_H(K)$ نشان می دهند.
گروه $N_G(K)$ را برای سادگی نرمالساز K گویند. واضح است که هر زیر گروه K در $N_G(K)$ نرمال است و K در G نرمال است اگر وتنها اگر $N_G(K) = G$.

قضیه ٦.۳.۱ اگر گروه G روی مجموعه S عمل کند. آنگاه کاردینال مدار $s \in S$ عبارت است از $|G : G_s|$.

---

[۴] Orbits
[۵] Stabilizer
[٦] Conjugacy Class
[۷] Centralizer
[۸] Normalizer

برهان. فرض کنید $g, h \in G$، چون

$$\begin{aligned} gs = hs &\iff g^{-1}hs = s \\ &\iff g^{-1}h \in G_s \\ &\iff hG_s = gG_s. \end{aligned}$$

نتیجه می شود ضابطهٔ $gs \longrightarrow gG_s$ خوش تعریف، یک به یک و پوشا از مجموعه همرده های G_s در G به مدار sاست، از این رو $|\overline{s}| = |G : G_s|$. □

نتیجه ۱.۳.۷ فرض کنید G گروهی متناهی و K زیرگروهی از G باشد. در این صورت

الف) به ازای $x \in G$، تعداد عناصر در ردهٔ تزویج x عبارت است از $|G : C_G(x)|$ که مرتبه گروه را عاد می کند؛

ب) اگر $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ $(x_i \in G)$ رده های مجزای تزویج گروه G باشند آنگاه

$$|G| = \sum_{i=1}^{n} |G : C_G(x_i)|$$

که آن را **معادله رده ای** [۹] گروه G نامند.

ج) تعداد زیرگروه های G مزدوج با K عبارت است از $|G : N_G(K)|$ که مرتبه G را عاد می کند.

برهان. به ۲.۴.۴، از مرجع [۷] مراجعه شود. □

---

[۹] Class Equation

۴.۱ خاصیت موضعی گرو ه ها

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید ρ خاصیتی از گروه ها باشد، گروه G راموضعاً $\rho-$ گروه گویند هرگاه هر زیر مجموعه متناهی از G در یک $\rho-$ زیر گروهی از G واقع شود.
چنانچه خاصیت ρ به زیرگروه های G انتقال یابد. آنگاه گروه G موضعاً $\rho-$ گروه است اگر هر زیرگروه متناهیاً تولید شده خاصیت ρ را داشته باشد.

مثال ۲.۴.۱ واضح است که رده گروه‌های موضعاً متناهی نسبت به زیرگروه و تصویر همریخت بسته است. همچنین قضیه زیر بیان می کند که خاصیت موضعاً متناهی نسبت به توسیع نیز بسته است.

قضیه ۳.۴.۱ (اسمیت [۱۰])
اگر $N \trianglelefteq G$ و گروه های N و G/N هر دو موضعاً متناهی باشند. آنگاه G موضعاً متناهی است.

برهان. به ۱.۳.۱۴، از مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

مثال ۴.۴.۱ رده **گروه های تابدار** [۱۱] آن دسته از گروه هایی هستند که هر عنصر آن و یا در واقع هر زیرگروه یک مولدی آن مرتبه متناهی دارد. بطور مشابه به ازای هر عدد طبیعی n می توان گروه های $n-$ متناهی را تعریف نمود که عبارت است از رده ای از گروه ها که هر زیر گروه $n-$ مولدی آن متناهی باشد.
چنانچه گروه G برای هر عدد طبیعی n، $n-$ متناهی باشد آن را موضعاً متناهی گویند.

[۱۰] Schmidt
[۱۱] Periodic Groups