بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

یکریختی های سه تایی جردن ضربی روی عناصر خود الحاق جبرهای فون نویمان

استاد راهنما:

دکتر علی تقوی

استاد مشاور:

دکتر محسن علیمحمدی

نگارش:

حسن رنجبر

شهریور ۸۷

سپاسگذاری

من لم یشکر المخلوق و لم یشکر الخالق

وظیفه خود می دانم مراتب سپاس و قدردانی خویش را از بزگواران زیر اعلام نمایم

استاد ارجمند جناب آقای دکتر **علی تقوی**
که با راهنماییهای پر بار و ارزشمندشان هدایت این پایان نامه را عهده دار بودند.

استاد ارجمند جناب آقای دکتر **محسن علیمحمدی**
که در این پایان نامه از مشاوره ایشان بهره جستم.

تقدیم به:

همسرم و دخترم نیلوفر

چکیده :

ما در این رساله به بررسی یکریختی های سه تایی جردن ضربی بین مجموعه هایی از عناصر خود الحاق(به همین ترتیب مجموعه هایی از عناصر مثبت) جبرهای فون نویمان می پردازیم این تبدیلات نگاشتهایی دو سویی هستند که بر روی دامنه هایشان در تساوی زیر صدق می کنند:

$$\phi(ABA) = \phi(A)\phi(B)\phi(A)$$

ما نشان خواهیم داد که وقتی جبرهای فون نویمان جمعوند مستقیم جابجایی ندارند همه این تبدیلات از یکریختی های خطی * -جبر و آنتی یکریختی های خطی *-جبر نشات می گیرد.

و بعلاوه در فصل چهار به بررسی عملگرهای مقدماتی روی عملگرهای خودالحاق می پردازیم

واژه های کلیدی:

یکریختی های سه تایی جردن ضربی، جبرهای فون نویمان،عملگرهای خودالحاق، عملگرمثبت،جبر *-عملگر استاندارد، عملگرهای مقدماتی

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول

مقدمات و پیش نیازها

۱ـ۱ مقدمه

دراین فصل گذ شته از بیان مفاهیم پایه ای آنا لیزتابعی به معرفی جبرهای باناخ و C^* - جبرها می پردازیم .همچنین تعاریف ومفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصلهای بعد نیز مطرح می شود.

۱ـ۲ مروری بر آنا لیز تابعی

تعریف۱ـ ۲ـ ۱ فرض کنید X یک مجموعه باشد و τ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد یعنی $X \subseteq P(X)$ ، τ را یک توپولوژی روی X نامند اگر از سه خاصیت زیر بهره مند باشد:

۱) $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$

۲)هرگاه به ازای $i = 1,...,n$ ، آنگاه $v_1 \cap v_2 ... \cap v_n \in \tau$

۳)هرگاه $\{v_\alpha\}$ گردایه ای دلخواهی از اعضای τ باشد آ نگاه $\bigcup_{\alpha} V_\alpha \in \tau$

هرگاه τ یک توپولو ژی روی X باشد. آنگاه زوج مرتب (X,τ)را یک فضای توپولوژیک می نامند واعضای τ را مجموعه های باز نامند . طبق این تعریف یک تو پولوژی روی X عبارتست از گردایه ای از زیر مجموعه های X موسوم به مجموعه های باز به طوریکه ϕو X هر دو بازند و مقطع متناهی و اجتماع دلخواه از مجموعه های باز نیز باز می باشد. اشتراک دلخواه مجموعه های باز با G_δ نشان داده می شود .

مثال ۱ ـ۲ـ۲ فرض کنید X مجموعه ای دلخواه باشد قرار دهید $\tau = \{\phi, X\}$به وضوح یک توپولوژی روی X است. این توپولوژی کوچکترین توپولوژی ممکن روی X است. به عبارت دیگر اگر τ' توپولوژی دیگری روی X باشد آنگاه $\tau \subseteq \tau'$

مثال۱ـ ۲ـ۳ فرض کنید X مجموعه دلخواه باشد. $\tau = P(X)$ به وضوح یک توپولوژی روی X است . این توپولوژی را توپولوژی گسسته در X نامند. این توپولوژی بزرگترین توپولوژی ممکن روی X است. یعنی اگر τ' توپولوژی دیگری روی X باشد آنگاه $\tau' \subseteq \tau$

تعریف ۱ـ ۲ـ۴ فرض کنید(X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $E \subseteq X$در این صورت Eرا در X بسته گوییم هر گاه متمم آن باز باشد. اشتراک دلخواه مجموعه های بسته ، بسته است و اجتماع دلخواه مجموعه های بسته با F_σ نشان داده می شود.

تعریف ۱ـ ۲ـ ۵ اگر (X,τ) فضای توپولوژیک باشد و $E \subset X$ بست $\overline{E}$ از E اشتراک تمام مجموعه های بسته شامل E است و درون E^0 مجموعه Eاجتماع تمام مجموعه های باز جزء E است. و همسایگی $P \in X$ مجموعه بازی است که شامل Pمی باشد.

تعریف ۱ـ ۲ـ۶ (X,τ) را فضای توپولوژیک ها وسد ورف نامند هر گاه نقاط متمایز X همسایگی های از هم جدایی داشته با شند و τ را توپولوژی هاوسدورف می گویند.

تعریف۱ـ ۲ـ ۷ فرض کنید X و Y فضاها ی توپولوژیک باشند ، نگاشت $f:X\to Y$ را پیوسته گوییم ، هر گاه تصویر وارون هر مجموعه باز در Y، در X باز باشد.

خانواده تمام توابع پیوسته از X به Y با $C(X,Y)$ و خانواده تمام توابع پیوسته روی X با $C(X)$ نشان داده می شود

تعریف۱ـ ۲ـ۸ خانواده ی $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ را یک پو شش (باز) برای زیر مجموعه B از فضای توپولوژیک X گویند هرگاه $B\subseteq\bigcup\{V_\alpha:\alpha\in A\}$.

زیر مجموعه K از فضای توپولوژیک X را فشرده گویند ،هرگاه هر پوشش باز آن دارای یک زیر پوشش باز متناهی باشد.

تعریف۱ـ ۲ـ ۹ فرض کنید X یک مجموعه باشد ،یک پایه توپولوژی روی X گردایه ای از زیر مجمو عه های X (موسوم به ا عضای پایه) است به طوریکه :

۱)به ازای هر $x\in X$ دست کم یک عضو پایه مانند β شامل x موجود باشد.

۲)اگر x متعلق به مقطع دو عضو پایه ما نند β_1 و β_2 باشد. آنگاه عضوی از پایه مانند β_3 وجود دارد به طوریکه $x\in\beta_3$ و $\beta_1\cap\beta_2\subseteq\beta_3$

تعریف۱ـ ۲ـ ۱۰ X در نقطه x پایه شمارا دارد هر گاه گردایه شمارا یی از همسایگی ها ی x مانند β موجود باشد به طوریکه هر همسایگی x دست کم حاوی یک عضو این گردایه باشد.

اگر فضایی در هر نقطه اش یک پایه شمارا داشته باشد،گوییم در اولین اصل شمارایی صدق می کند.
هرگاه توپولوژی فضای X دارای پایه ای شمارا باشد ، گوییم X در دومین اصل شمارایی صدق می کند.

تعریف ۱ـ ۲ـ ۱۱ یک تور در فضای X عبارتست از تابع F از یک مجموعه مرتب I بهتوی X که برای هر $\alpha\in I$ ،
$$F(\alpha)=x_\alpha$$

تعریف ۱ـ ۲ـ۱۲ فرض کنید X یک مجموعه باشد و F یک خانواده از توابع از X به توی فضای توپولوژیک Y باشد. توپولوژی ضعیف روی X القاء شده به وسیله Fضعیف ترین توپولوژی روی X است که هر تابع از Fنسبت به آن پیوسته باشد.بنا بر این یک تور $\{x_\alpha\}$ نسبت این توپولوژی به $x \in X$همگرا است. اگر و فقط اگر $\{f\{x_\alpha\}\}$ به $f(x)$ برای هر f در F همگرا باشد.

تعریف۱ـ ۲ـ۱۳ فرض کنید X فضای برداری روی میدان اسکالر F باشد.یک نیم نرم روی X تابع $\| \|: X \to R$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\|x\| \geq 0$

۲) $\|tx\| = |t|\|x\|$ $\qquad \forall t \in F$ ، $x \in X$

۳) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\qquad \forall x, y \in X$

یک نیم نرم روی X یک نرم نا میده می شود ، اگر در شرط زیر صدق کند:

٤) x=0 $\qquad \|x\| = 0 \leftrightarrow$ $\qquad \forall x \in X$

یک فضای خطی نیم نرم دار (نرم دار) یک جفت مرتب $(X, \| \|)$است که $\| \|$ یک نیم نرم (نرم) روی X است.

اگر X یک فضای خطی نیم نرم دار (نرم دار) باشد، در این صو رت $d(x,y) = \|x-y\|$یک نیم متر روی X است که تحت انتقا ل پایاست یعنی:

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \qquad \forall x, y, z \in X$$

یک فضای نرم دار با توپولوژی متری مجهز می شود. یک فضای خطی نرم دار که در این توپولوژی متری کامل باشد .یک فضای باناخ نامیده می شود.

تعریف ۱ـ ۲ـ ۱۳ فرض کنید X و Y فضای برداری روی میدان اسکالر F باشند تابع $T: X \to Y$ را یک عملگر خطی از X به Y نا مند هر گاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in F$، $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ بر قرار باشد.

یک عملگر خطی از X به F را یک تابعک خطی می نامند .فضای همه ی تا بعکهای خطی پیوسته روی X،دوگـان X نامیده و با X^*نمایش میدهند. فرض کنید X یک فضای نرم دار کامل و X^* دوگان X باشد.

منظور از توپولوژی ضعیف روی X ، توپولوژی ضعیف القاء شده به وسیله خانواده همه تا بعکهای خطی پیوسـته روی X است.بنابر این یک تور $\{ x_\alpha \}$ در X در این توپولوژی ضعیف همگرا به $x \in X$ است،اگر و تنها اگر $\{ g(x_\alpha) \}$ به $g(x)$ برای هر g در X^* همگرا باشد.

W^*- توپولوژی روی X^* ، توپولوژی ضعیف روی X^*القاء شده به وسیله خانوا ده $F = \{ f_x : x \in X \}$ که در آن برای هر $x \in X$ تا بع $f_x : X^* \to C$با ضابطه $f_x(g) = g(x)$،
برای هر $g \in X^*$ تعریف می شود. بنابر این یک تور $\{ g_\alpha \}$ د ر X^*نسبت به W^*-توپولوژی همگرا بـه $g \in X^*$ است،اگر و فقط اگر $\{ g(x_\alpha) \}$ به $g(x)$ برای هر x در X همگرا باشد.

قضیه ۱ـ ۲ـ ۱۴[۴۲] فرض کنید X و Y دو فضای برداری نرم دار روی یک میدان اسکالر F باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) T پیوسته است.

۲) T در یک نقطه پیوسته است.

۳) T در صفر پیوسته است. یعنی اگر $x_n \to 0$آنگاه $T_{x_n} \to 0$

٤) اگر $\overline{\beta}_1$ گوی یکه بسته در Xباشد آنگاه $T(\overline{\beta}_1)$ در Y کراندار است.

۵) عدد حقیقی kوجود دارد بطوریکه به ازای هر $x \in X$, $\|Tx\| \le k\|x\|$

تعریف ۱ـ ۲ـ ۱۵ فرض کنید X و Y دو فضای بـرداری باشـند و $T : X \to Y$ یـک عملگـر خطـی باشـد گـوییم Tکراندار است اگر عدد حقیقی k وجود داشته باشد بطوریکه

$$\forall x \in X \quad , \quad \|Tx\| \le k\|x\|$$

قضیه ۱ـ ۲ـ ۱۶ اگر Xو Y دو فضای برداری نرم دار روی یک میدان اسکالر F باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد آنگاه T کراندار است اگر و تنها اگر T پیوسته باشد.

تعریف ۱ـ ۲ـ ۱۷ فرض کنید X و Yدو فضای برداری نرم دار روی یک میدان اسـکالر F باشـند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد نرم T را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \quad ; \|x\| \le ۱\}$$

قضیه ۱ــ ۲ــ ۱۸ [۴۲]فرض کنید X و Y دو فضای برداری روی یک میدان اسکالر F باشند . آنگاه فضای همه ی نگاشتها ی خطی پیوسته از X به توی Y تحت عمل نقطه وار جمع و ضرب اسکالریک فضای برداری است که با $B(X,Y)$ مشخص می شود. اگر X و Y نرم دار باشند آنگاه $B(X,Y)$ با نرم

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|; \|x\| \leq ۱\}$$

یک فضای برداری نرم داراست بعلاوه اگر Y باناخ باشد $B(X,Y)$ نیز باناخ است و $B(X,F)$ را با X^* نشان می دهیم و آن را دو گان X می گوییم .

قضیه ۱ــ ۲ــ ۱۹[۴۲] فضای نرم دار X باناخ است اگر و تنها اگر هر سری بطور مطلق همگرا در X همگرا باشد.

تعریف ۱ــ ۲ــ۲۰ فرض کنید X یک فضای برداری باشد. $\rho : X \to R$ تابعک زیر خطی نامیده می شود هر گاه دو شرط زیر را دارا باشد :

۱) $\forall x, y \in X \qquad \rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

۲) $\forall x, y \in X$ و $\alpha \in R_+ \qquad \rho(\alpha x) = \alpha \rho(x)$

قضیه ۱ــ۲ــ۲۱ [۴۲] (قضیه هان – باناخ)

اگر X یک فضای خطی حقیقی ، ρ تابعک زیر خطی روی X و M یک زیر فضای خطی X باشد آنگاه هر تابعک خطی $f : M \to R$ بقسمی که به ازاء هر $x \in M$، $f(x) \leq \rho(x)$ دارای توسیع $\Lambda : X \to R$ است بقسمی که به ازاء هر $x \in X$

$$-\rho(-x) \leq \Lambda(x) \leq \rho(x)$$

کار بردهای از قضیه هان – باناخ

قضیه ۱ــ ۲ــ ۲۲ [۴۲]فرض کنیم X یک فضای خطی و M یک زیر فضای خطی X باشد.اگر ρ یک نیم نرم روی X و f یک تابعک خطی روی M باشد بقسمی که به ازاء هر $x \in M$ داشته باشیم:

$$|f(x)| \leq \rho(x)$$

آنگاه f دارای توسیع $\Lambda : X \to R$ است بقسمی که به ازاء هر $x \in X$ داریم:

$$|\Lambda x| \le \rho(x)$$

قضیه ۱ـ۲ـ ۲۳ اگر X یک فضای نرم دار و $x_0 \neq 0 \in X$ آنگاه وجود دارد $\Lambda_0 \in X^*$ بطوریکه $\|\Lambda_0\| = 1$ و $\Lambda_0 x_0 = \|x_0\|$ خصوصا به ازاء هر $x \in X$ داریم :

$$\|x\| = \sup\{\|\Lambda x\| \Lambda \in X^*, \|\Lambda\| = ۱\}$$

برهان: فرض کنیم M زیر فضای تولید شده توسط x_0 از X باشد و f را روی M بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$$

آنگاه f یک تابعک خطی روی M است و

$$f(x_0) = \|x_0\|$$

نیم نرم p را نیز بصورت $p(x) = \|x\|$ در نظر می گیریم ، خواهیم داشت

$$\|f(x)\| = \|f(\alpha x)_.\| = \|\alpha\|\|x_.\| = \alpha\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| = \|x\| = p(x) \qquad (x \neq 0)$$

در نتیجه

$$\|f(x)\| = p(x) \qquad \forall x \in m$$

بنابر این طبق قضیه قبل f دارای توسیع Λ_0 روی X است بطوریکه

$$\forall x \in X, \quad \|\Lambda_0 x\| \le p(x)$$

در نتیجه

$$\forall x \in X, \quad \|\Lambda_0 x\| \le \|x\|$$

بنابراین $\|\Lambda_0\| \le 1$ پس $\Lambda_0 \in X^*$ و

$$\Lambda_0 x_0 = \|x_0\|\|\Lambda_0\| = 1$$

حال $x \in X$ را در نظر می گیریم طبق تو ضیحات بالا یک $\Lambda' \in X^*$ وجود دارد که $\Lambda' x = \|x\|, \|\Lambda'\| = ۱$ بنابر این

$$\|\Lambda x\| \le \|\Lambda\|\|x\| \text{ و از } \sup\{\|\Lambda x\| : \Lambda \in X^*, \|\Lambda\| = ۱\} \ge \|\Lambda' x\| = \|x\|$$

و داریم

$$\|x\| = \sup\{\|\Lambda x\| : \Lambda \in X^*, \|\Lambda\| = 1\}$$

قضیه ۱ـ ۲ـ۲۴ [۴۲]اگر X یک فضای موضعا محدب باشد آنگاه X^* ، نقاط X را جدا می کند

قضیه ۱ـ ۲ـ ۲۵[۴۲] اگر f یک تابعک خطی پیوسته روی یک زیر فضای M از یک فضای موضعا محدب X باشد آنگاه $\Lambda \in X^*$ وجود دارد بطوریکه روی M، $\Lambda = f$

قضیه ۱ـ ۲ـ ۲۶[۴۲] اگر X و Yدو مجموعه و f تابعی با دامنه $D \subseteq X$ و برد در Y باشد آنگاه نمودار f با $G(f)$ نشان داده می شود زیر مجموعه ای از $X \times Y$است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$G(f) = \{(x, f(x); x \in D\}$$

قضیه ۱ـ ۲ـ ۲۷[۴۲] فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند $X \times Y$ با توپولوژی حاصلضرب در نظر گرفته می شود اگر f تابعی از $D \subseteq X$ به Yباشد آنگاه f را بسته نامیم در صورتیکه $G(f)$ در توپولوژی حاصلضرب ، مجموعه ای بسته باشد.

قضیه ۱ـ ۲ـ ۲۸[۴۲] (قضیه نمودار بسته)

اگر X و Yدو فضای باناخ و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی با نمودار بسته باشد انگاه T پیوسته است.

قضیه ۱ـ ۲ـ ۲۹[۴۲] (قضیه نگاشت وارون)

اگر دو فضای باناخ و $T \in B(X, Y)$ اگر یک به یک و پوشا باشد انگاه T^{-1} نیز کراندار ودر نتیجه T همانسانی است.

قضیه ۱ـ ۲ـ ۳۰[۴۲] (قضیه نگاشت باز)

فرض کنید X و Yدو فضای باناخ و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی پوشاو پیوسته باشد اگر Oزیر مجموعه ای باز در X باشد آنگاه $T(O)$ در Y باز است به علاوه اگر Tیک به یک باشد آنگاه T یک همانسانی است. لذا مجموعه های باز Xرا به مجموعه های باز Yمی برد.

تعریف۱ـ ۲ـ ۳۱ فرض کنید Xیک فضای توپولوژیک و $E \subseteq X$ گوییم Eهیچ جا چگال نیست در صورتیکه $(\overline{E})^0 = \phi$

قضیه ۱ـ ۲ـ ۳۲[۴۲] (قضیه رسته بئر)

اگر X در یکی از دو شرط زیر صدق کند :

۱) فضای متریک کامل باشد.

۲) فضای توپولوژیک هاسدورف موضعا فشرده باشد.

آنگاه اشتراک هر تعداد شمارش پذیری از زیر زیر مجموعه های باز چگا ل در X مجموعه ای چگـال در X خواهـد بود

قضیه ۱ـ ۲ـ ۳۳[۴۲] (کرانداری یکنواخت):

فرض کنید X یک فضای باناخ و Y یک فضای نرم دار باشد اگر $A \subset B(X,Y)$ و به ازاء هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty$$

آنگاه

$$\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$$

نتیجه ۱ـ ۲ـ ۳۴[۴۲]

الف)اگر X یک فضای نرم دار و $E \subset X$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه E کراندار باشد آنست که به ازای هـر $\Lambda \in X^*$ داشته باشیم:

$$\sup\{\|\Lambda x\|; x \in E\} < \infty$$

ب) اگر X یک فضای باناخ و $E \subset X^*$ انگاه شرط لازم و کافی برای انکه E کراندار باشد آ نست کـه بـه ازای هـر $x \in X$ داشته باشیم :

$$\sup\{\|\Lambda x\| : \Lambda \in E\} < \infty$$

قضیه ۱ـ ۲ـ ۳۵ (باناخ-اشتینهاس):

اگر X فضای باناخ و Y یک فضای نرم دار و $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالـه ای در $B(X,Y)$ باشـد بـه قـسمی کـه بـه ازای هـر $x \in X$ $\quad n \to \infty$ $Tx = \lim T_n x$ موجود باشد آنگاه $T \in B(X,Y)$

برها ن : اگر $x \in X$ و $\lim T_n x = Tx, n \to \infty$ آنگاه بوضوح T خطی است. نشان می دهیم T کراندار است بنـا به قضیه کرانداری یکنواخت وجود دارد $M>0$ بطوریکه برای هر $n \in N$ داریم:

$$\|T_n\| \le M$$

برای هر $x \in \overline{\beta}_1$ و برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$\|Tx\| \leq \|T - T_n x\| + \|T_n x\| \leq \|Tx - T_n x\| + M$$

اگر در رابطه فوق $n \to \infty$، نتیجه می شود برای هر $x \in \overline{\beta}_1$ داریم: $\|Tx\| \leq M$

یعنی $\|T \leq M\|$ و لذا T کراندارو $T \in B(X,Y)$

□

تعریف ۱ـ ۲ـ ۳۶ فرض کنید X و Y دو فضای نرم دارو $T \in B(X,Y)$ عملگر $T^* : Y^* \to X^*$ را با ضا بطه زیر تعریف می کنیم:

$$(T^*\Lambda)(x) = \Lambda(Tx) \qquad \Lambda \in Y^*, x \in X$$

T^* را الحاقی T می نامند

قضیه ۱ـ ۲ـ ۳۷ برای هر $T \in B(X,Y)$ داریم:

$$\|T^*\| = \|T\| \quad \text{و} \quad T^* \in B(Y^*, X^*)$$

برهـا ن : بـرای هـر $\Lambda \in Y^*$ داریـم: $T^*\Lambda = \Lambda o T$ و لـذا $T^*\Lambda$ خطـی و پیوسـته اسـت در نتیجـه بـه ازای هر $\Lambda \in Y^*$ داریم $T^*\Lambda \in X^*$ به آسانی دیده می شود که T^* خطی است اگر $\Lambda \in Y^*, x \in X$ آنگاه.

$$|(T^*\Lambda)(x)| = |\Lambda T(x)| \leq \|\Lambda\|\|T\|\|x\|$$

یعنی T^* پیوسته است و $\|T^*\| \leq \|T\|$

حال اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد بنا به تعریف $\|T^*\|$ وجود دارد $x \in X$ بطوریکه $\|x\| = 1$ و $\|Tx\| > \|T\| - \varepsilon$ حال بنا به کار بردی از قضیه هان – باناخ $\Lambda \in Y^*$ وجود دارد بطوریکه $\|\Lambda\| = 1$ و $\Lambda(Tx) = \|Tx\|$ پس

$$|(T^*\Lambda)(x)| = |\Lambda(Tx)| = \|Tx\| > \|T\| - \varepsilon$$

لذا $\|T^*\| \geq \|T^*\Lambda\| \geq \|T\| - \varepsilon$ یعنی
$\|T^*\| \geq \|T\|$ پس $\|T^*\| = \|T\|$ و اثبات قضیه کامل می گردد.

□

تعریف ۱ـ ۲ـ۳۸ فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و B_1 گوی یکه با ز در X باشد عملگر $T \in B(X,Y)$ را فشرده نامند هر گاه $\overline{T(B_1)}$ در Y فشرده باشد به آسانی میتوان نشان داد T فشرده است اگر و تنها اگر برای هر دنباله کراندار $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X $\{Tx_n\}$ دارای یک زیر دنباله $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا در Y باشد همچنین T فشرده است اگر و تنها اگر $T(B_1)$ کلا کراندار باشد

قضیه ۱ـ ۲ـ ۳۹ [۴۲] فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند

الف) اگر $T \in B(X,Y)$ و $\dim R(T) < \infty$ آ نگاه T فشرده است.

ب) اگر $T \in B(X,Y)$ و T فشرده و $R(T)$ بسته باشد ا نگاه $\dim R(T) < \infty$

ج) A مجموعه تمام عملگرهای فشرده یک زیر فضای بسته از $T \in B(X,Y)$ است.

د) اگر $T \in B(X,Y)$ و T فشرده و $\lambda \neq 0$ آنگاه

$$\dim \ker(T - \lambda I) < \infty$$

ه) مجموعه عملگرهای فشرده در $B(X)$ یک ایده ال در $B(X)$ است.

قضیه ۱ـ ۲ـ ۴۰[۴۲] اگر Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$ آنگاه Y فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

۱ـ ۳ جبرهای باناخ

تعریف ۱ـ ۳ـ ۱ جبر باناخ A جبری نرمدار است که در خواص زیر صدق می کند

۱) فضای برداری A باناخ باشد

۲) به ازای هر x, y $\quad \|x, y\| \le \|x\| \|y\|$

۳) اگر جبر A دارای عنصر همانی ۱باشد آنگاه $\|۱\| = ۱$ بعلاوه اگر برای هر x و y در A ، داشته باشیم $xy = yx$
آنگاه A را جبر باناخ تعویض پذیر می نامند.

مثال ۱ـ ۳ـ ۲ ساده ترین جبر باناخ میدان مختلط C است که $\|Z\| = |Z|$

مثال ۱ـ ۳ـ ۳ اگر X یک فضای ها و سدورف فشرده باشد آنگاه $C(X)$ مجموعه همه توابع پیوسته بر K با اعمال جمع و ضرب نقطه وار و نرم سوپرمم جبر باناخ است و تا بع ثابت با مقدار 1یکه ضربی آن است.

مثال ۱ـ ۳ـ ۴ فرض کنید Z مجموعه اعداد صحیح با اندازه شمارشی است در این صورت $L^1(Z)$ با ضربی که در زیر تعریف می شود یک جبر باناخ است.

$$f * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k), n \in Z, f, g \in L^1(Z)$$

بنا به قضیه فو بینی:

$$\|f * g\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k) \right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(n-k)| |g(k)|$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n-k)| = \|f\| \|g\|$$

بنابر این ضرب خوش تعریف است به سادگی می توان نشان داد که ضرب بالا $L^1(Z)$ را یک جبر جابجایی یکه دار می سازد.یکه ضربی $L^1(Z)$ تابع 1است که به صورت 0=(n) 1,1=(0)1 برای $n \in Z - \{0\}$ تعریف می شود.

قضیه ۱ـ۳ـ ۵[۴۲] اگر A یک جبر باناخ یکه دار باشد آنگاه A با زیر جبری از B(A) یکریخت است.

قضیه ۱ ـ ۳ـ ۶ ضرب در جبر باناخ A توا ما پیوسته است.

برهان: اگر $x_n \to x, y_n \to y$ آنگاه $\|x_n y_n - xy\| \le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|y\|\|x_n - x\|$ لـــذا عملگـــر ضـــرب $(x, y) \to xy$ تواما پیوسته است.

تعریف۱ـ ۳ـ ۷ عنصر $x \in A$ را معکوس پذیر گویند هرگاه $y \in A$ وجود داشته باشد بطوریکه $xy = yx = e$ مجموعه عناصر معکوس پذیر را با G(A) نشان می دهیم بوضوح G(A) یک گروه ضربی است.

گزاره ۱ـ ۳ـ۸ اگر A یک جبر باناخ و x در A باشد با $\|x\| < 1$، آنگاه $1 - x$ در G(A) است و $\|(1-x)^{-1}\| \le (1 - \|x\|)^{-1}$

برهان:فرض کنید $x^0 = 1$، $y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $N \to \infty$
سری و حد فوق در A همگرا است زیرا

$$\left\| \sum_{n=0}^{N+\rho} x^n - \sum_{n=0}^{N} x^n \right\| \le \sum_{n=N+1}^{N+\rho} \|x\|^n \to 0 \quad ,(N \to \infty)$$

به طور یکنواخت بر حسب $(\rho \ge 1)$.

چون در جبرباناخ ضرب پیوسته است ، داریم

$$(1-x)y = y - xy = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = 1$$ و

$$y(1-x) = y - yx = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = 1$$ بنابر این $(1-x)^{-1} = y$ و

$$\|(1-x)^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|}$$ هر گاه $\|x\| < 1$.

گزاره ۱ـ ۳ـ ۹ برای هر جبر باناخ A گروه وارون پذیر $G(A)$ یک مجموعه باز است.
برهان:فرض کنید x در $G(A)$ باشد نشان می دهیم مجموعه