بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی امیر کبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

ریاضی محض

(گرایش جبر)

عنوان:

قطر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقهٔ جابجایی

نگارش:

حسین شجاعی

استاد راهنما:

دکتر فرهاد رحمتی

استاد مشاور:

دکتر داریوش کیانی

آبان ۱۳۸۷

بسمه تعالی

تاریخ:

شماره:

فرم اطلاعات پایان‌نامه

کارشناسی- ارشد و دکترا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی: حسین شجاعی جشوقانی دانشجوی آزاد ⊗ بورسیه ○ معادل ○

شماره دانشجوئی: ۸۵۱۱۳۰۲۳ دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر رشته تحصیلی: ریاضی محض گروه: جبر

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی: فرهاد رحمتی درجه و رتبه: : دانشیار

نام و نام خانوادگی: - درجه و رتبه: -

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی: داریوش کیانی درجه و رتبه: استادیار

نام و نام خانوادگی: - درجه و رتبه: -

عنوان پایان‌نامه به فارسی: قطر گراف مقسوم علیه صفر حلقه جابجایی

عنوان پایان‌نامه به انگلیسی: The diameter of zero divisor graph of a commutative ring

نوع پروژه: کارشناسی ○ ارشد ⊗ دکترا ○ سال تحصیلی:87-86

کاربرد ○ بنیادی ○ توسعه‌ای ○ نظری ⊗

تاریخ شروع : مهر ۸۶ تاریخ خاتمه : ابان ۸۷ تعداد واحد : ۶ سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه‌های کلیدی به فارسی: گراف مقسوم علیه صفر-مشخص سازی – قطر گراف – حلقه مک کوی –ایده السازی

واژه‌های کلیدی به انگلیسی :-Zero divisor graph-Characterization-Diameter of graph-McCoy ring Idealization

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات ۷۸	تصویر ○ جدول ⊗ نمودار ○ نقشه ○ واژه‌نامه ⊗	تعداد مراجع ۳۳	تعداد صفحات ضمائم ۹
زبان متن	فارسی ⊗ انگلیسی ○	چکیده	فارسی ⊗ انگلیسی ⊗	
یادداشت				

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد:

دانشجو:

امضاء استاد راهنما: **تاریخ:**

۱ : ارائه به معاونت پژوهشی به همراه یک نسخه الکترونیکی از پایان‌نامه و فرم اطلاعات پایان‌نامه بصورت PDF همراه چاپ چکیده (فارسی انگلیسی) و فرم اطلاعات پایان‌نامه

۲ : ارائه به کتابخانه دانشکده (شامل دو جلد پایان نامه به همراه نسخه الکترونیکی فرم در لوح فشرده طبق نمونه اعلام شده در صفحه خانگی کتابخانه مرکزی)

تقدیم به حامیان مهرآفرین،

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

خدا را شاکرم، از آن جهت که شکر و سپاسگزاری برای اوست. در حدیثی از کلام معصوم آمده است:

«من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق»

لذا از خانوادهٔ عزیزم که نه تنها در انجام پایان‌نامه، بلکه در طول تمام دورهٔ تحصیل، مشوق و همراه بنده بوده‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم که بی‌شک بدون همراهی و تشویق ایشان، این امر میسر نبود.
همچنین بر خود لازم می‌دانم از زحمات و تلاش‌های تمامی کسانی که به نوعی اینجانب را در تدوین و نگارش این پایان‌نامه یاری نمودند، تشکر و قدردانی نمایم. بالاخص، مایلم از جناب آقای دکتر فرهاد رحمتی، استاد راهنمای بنده و راهنمایی‌های ایشان تشکر کنم. همچنین، از جناب آقای دکتر داریوش کیانی، استاد مشاور، جناب آقای دکتر سعید اکبری (از دانشگاه صنعتی شریف)، ممتحن خارجی و جناب آقای دکتر بهروز خسروی، ممتحن داخلی این پایان‌نامه، به خاطر نظرات سازنده و مفیدشان سپاسگزاری می‌کنم.

«اولُ العلمِ معرفةُ الجبّارِ و آخِرُ العلمِ تفویضُ الامرِ اِلیهِ»

(رسول خدا (صلی‌الله علیه و آله و سلم))

یادمان نرود!، در کلاس زندگی و در درس تکامل، حاضر و سراپاگوش باشیم تا به سؤال بندگی جوابی صحیح و صریح بدهیم.
یادمان نرود!، که دنیا، فقط چرک‌نویس است.
یادمان نرود!، چرک‌نویس، پاسخ‌نامه نیست و نباید چرک‌نویس را به جای پاسخ‌نامه تحویل دهیم و اگر سهواً تحویل دادیم، حداقل در زمرهٔ آنانی باشیم که پاسخ‌نامه‌ای بهتر از چرک‌نویس ندارند، چرا که در این‌صورت، سرزنش‌ها کمتر است !!!...

چکیده

فرض کنیم R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد. گیریم $Z(R)^\star$ نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفرحلقهٔ R باشد، به حلقهٔ R، گرافی نسبت داده می‌شود که مجموعهٔ رئوس آن $Z(R)^\star$ است و دو رأس متمایز $x, y \in Z(R)^\star$ با یک یال به هم وصل می‌شوند اگر و فقط اگر $xy = 0$.
این گراف را با $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم.

دراین پایان‌نامه قطر گراف‌های مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$ بر حسب ایده‌آل‌های حلقهٔ R، مشخص‌سازی می‌شود. همچنین برای یک حلقهٔ کاهش‌یافتهٔ R، نامساوی‌های زیر ثابت می‌شود:

$$1 \leq diam(\Gamma(R)) \leq diam(\Gamma(R[x])) \leq diam(\Gamma(R[[x]])) \leq 3$$

کلمات کلیدی: ۱. گراف مقسوم‌علیه صفر(Zero divisor graph) ۲. مشخص‌سازی(Characterization) ۳. قطر گراف(Diameter of graph) ۴. حلقهٔ مک‌کوی(McCoy ring) ۵. ایده‌آلسازی(Idealization)

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه، حلقه‌های مورد بحث، جابجایی و یکدار می‌باشند. گیریم $Z(R)$ مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ R و $Z(R)^\star$ مجموعهٔ ناتهی از مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر آن باشد. گراف $\Gamma(R)$ را در نظر می گیریم که رئوس آن اعضای $Z(R)^\star$ باشد و هر یال آن به‌صورت زوج‌های متمایز (a,b) از مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفری باشد که $ab = ۰$. به‌وضوح $\Gamma(R)$ تهی است اگر و فقط اگر R دامنهٔ صحیح باشد.

اولین بار مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر توسط بِک[۱] در [۱۵] معرفی شد. وی حلقهٔ جابجایی و یکدار R را به عنوان مجموعهٔ رئوس این گراف در نظر گرفت. پس از وی، اندرسن[۲] و لیوینگستن[۳]، $Z(R)^\star$ را به عنوان رئوس گراف در نظر گرفتند. آنان ثابت کردند، $\Gamma(R)$ همواره همبند است و قطر[۴] آن همواره کمتر یا مساوی ۳ است ([٦]، قضیهٔ ۲.۳). آنان همچنین ثابت کردند، $\Gamma(R)$ کامل است اگر و فقط اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یا برای هر $x,y \in Z(R)$، $xy = ۰$ ([٦]، قضیهٔ ۲.۸).

اخیراً آکستِل[۵]، کُویکِندال[٦] و استیکلِس[۷]، در[۱۱]، گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های R، $R[x]$ و $R[[x]]$ را مطالعه کردند و ثابت کردند، در صورتی‌که $R \ncong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ و R نوتری و یکی از این سه گراف از قطر ۲ باشد، شرط کافیست برای آنکه هر سه گراف از قطر ۲ باشد. آنان همچنین ثابت کردند، در صورتی‌که $R \ncong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ و یکی از این سه گراف، کامل باشد، آنگاه هر سه گراف، کامل است ([۱۱]، قضیهٔ ۳).

آنان این مطلب را که آیا حلقه‌ای غیرنوتری با خاصیت $diam(\Gamma(R)) = diam(\Gamma(R[x])) = ۲$ وجود دارد، به عنوان سؤال مطرح کردند. نکتهٔ مهم اینکه، کار آنها نشان می‌دهد، برای یک حلقهٔ نوتری، نمی‌توانیم داشته باشیم:

$$diam(\Gamma(R)) = diam(\Gamma(R[[x]])) = ۲, diam(\Gamma(R[x])) = ۳.$$

آنان حدس زدند، در صورتی‌که حلقهٔ R، فاقد عضو پوچتوان ناصفر باشد، باز هم وجود حلقه‌ای با مشخصات بالا امکان‌پذیر نیست. این مطلب در این پایان‌نامه اثبات می‌شود.

[۱] I. Beck
[۲] D.F. Anderson
[۳] P.S. Livingston
[۴] diameter
[۵] M. Axtell
[٦] J. Coycendall
[۷] J. Stickles

هدف اصلی در این پایان‌نامه، تشخیص قطرهای سه گراف بالا، بر حسب خواص حلقهٔ R است. یادآوری می‌کنیم، حلقه‌ای که فاقد عضو پوچتوان باشد، حلقهٔ کاهش‌یافته نامیده می‌شود. در اینجا، برای حلقه‌های کاهش‌یافته، یک مشخص‌سازی کامل برای قطر سه گراف مذکور ارائه می شود (قضیهٔ ۱.۲.۴) و برای حلقه‌های ناکاهش‌یافته، فقط قطرهای $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x])$ مشخص می شود(قضیهٔ ۱.۳.۳).

زمانی‌که R ناکاهش‌یافته است، یکی از مشکلاتی که در مطالعهٔ گراف $\Gamma(R[[x]])$ داریم، این است که مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ $R[[x]]$، می‌توانند شکل متفاوت‌تری نسبت به زمانی‌که R، کاهش یافته است، داشته باشند. برای مثال در [۱۹] (مثال ۱.۰.۴)، حلقه‌ای آورده شده است که یک مقسوم‌علیه صفر به‌صورت $r-x$ $(r \in R)$، در $R[[x]]$ وجود دارد. بدیهی است، ضریب x در این مقسوم‌علیه صفر، یکال است و لذا کمی عجیب به نظر می‌رسد (مثال ۵.۲.۵ را نیز ببینید). بنابراین اهمیت بررسی جداگانهٔ حلقه‌های کاهش‌یافته و ناکاهش‌یافته در اینجا روشن می‌شود.

این پایان‌نامه، بر اساس مرجع [۲۶] (مقاله‌ای از پروفسور توماس لوکاس[۸] از دانشگاه کارلوت از کارولینای شمالی[۹] آمریکا) و در پنج فصل نگاشته شده است. در فصل اول، تعاریف و قضایای مقدماتی آورده شده است. در فصل دوم، شرایط لازم و کافی برای تشخیص قطر گراف $\Gamma(R)$ بررسی می‌شود. در فصل سوم و چهارم همین کار برای حلقه‌های $R[x]$ و $R[[x]]$ انجام می‌شود. در فصل پنجم، حلقه‌هایی از دو نوع کاهش‌یافته و ناکاهش‌یافته آورده می‌شود که با استفاده از نتایج بدست آمده در فصل‌های قبل می‌توانیم قطر گراف‌های $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$ را مشخص کنیم.
در قسمت ضمیمه نیز، تاریخچه‌ای از مطالعات و کارهای انجام شده روی گراف $\Gamma(R)$ را آورده‌ایم.
در راستای این پایان‌نامه و به عنوان یک کار جدید، در [۳۲]، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر ایده‌آلسازی شدهٔ حلقهٔ R روی R بر اساس قطر $\Gamma(R)$ بررسی شده و نتایج حاصل در قالب مقاله‌ای جهت انتشار، ارسال گردیده است. قسمت‌هایی از این مقاله را عیناً در قسمت ضمیمه آورده‌ایم.

[۸] T.G Lucas
[۹] University of North Carolina Charlotte

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیم ابتدایی که در سراسر این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

۱ مفاهیم مربوط به نظریهٔ گراف

یادآوری می‌کنیم یک گراف G عبارت است از مجموعه‌ای از رئوس $(V(G))$ و مجموعه‌ای از یال‌ها $(E(G))$ که هر یال به‌صورت $\{a,b\}$ نشان داده می‌شود و به این معناست که a و b به هم متصلند. $\{a,a\}$ طوقه نامیده می‌شود. البته در یک گراف اگر جهت یال‌ها مهم باشد، گراف جهت‌دار[۱] قابل تعریف است. در سراسر این پایان‌نامه گراف‌های مورد بحث، ساده (بدون یال‌های جهت‌دار و حداکثر یک یال بین دو رأس) و بدون طوقه هستند.

◄ **تعریف ۱.۱.۱**.(مسیر)

در یک گراف به دنباله‌ای از رئوس متمایز مانند

$$v_1 = v, v_2, \dots, v_n = w$$

بطوریکه، هر زوج $\{v_i, v_{i+1}\}$ یک یال باشد، یک مسیر بین v و w گفته می شود. به عدد $n-1$، طول این مسیر می گوییم.

◄ **تعریف ۲.۱.۱**.(گراف همبند)

گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن، یک مسیر وجود داشته باشد.

◄ **تعریف ۳.۱.۱**.(گراف کامل[۲])

گراف G را کامل گوییم هرگاه هر دو رأس متمایز آن به هم متصل باشد.

◄ **تعریف ۴.۱.۱**.(فاصله دو رأس)

به طول کوتاهترین مسیر بین رأس‌های v و w در یک گراف، فاصلهٔ آنها می گوییم و با $d(v,w)$ نشان می دهیم.

◄ **قرارداد.** در حالتی که بین دو رأس v و w هیچ مسیری نباشد، قرارداد می‌کنیم: $d(v,w) = \infty$.

---

[۱] directed graph
[۲] complete

◄ **تعریف ۵.۱.۱**.(قطر گراف)
قطر گراف G، بیشینهٔ فاصله‌های بین هر دو رأس این گراف است که با $diam(G)$ نشان داده می‌شود. در واقع

$$diam(G) = Sup\{d(v,w) : \quad v,w \in V, v \neq w\}$$

و V مجموعهٔ رئوس G است.

بنابراین قطر یک گراف همبند، صفراست اگر این گراف، یک رأس تنها باشد و یک گراف همبند با بیش ازیک رأس، ازقطر ۱ است ، اگر و فقط اگر کامل باشد. پس در گراف همبند G که یک رأس تنها نباشد، همواره $diam(G) \geq ۱$.

۲ مفاهیم مربوط به نظریهٔ حلقه

◄ **تعریف ۱.۲.۱**.(عضو پوچتوان)
عضو r از حلقهٔ R را پوچتوان گوییم، هر گاه یک $n \in I\!N$ وجود داشته باشد، بطوریکه $r^n = ۰$.

◄ **قرارداد.** مجموعهٔ تمام اعضای پوچتوان حلقهٔ R را با $Nil(R)$ نشان می‌دهیم.

◄ **تعریف ۲.۲.۱**.(حلقهٔ کاهش‌یافته)
حلقهٔ R را کاهش‌یافته گوییم، هرگاه $Nil(R) = (۰)$. بدیهی است، در غیر این‌صورت R را ناکاهش‌یافته گوییم.

◄ **تعریف ۳.۲.۱**.(ایده‌آل اول مینیمال)
ایده‌آل اولی را که نسبت به شامل بودن ایده‌آل I، مینیمال است، ایده‌آل اول مینیمال I گوییم. مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با $Min(I)$ نمایش می‌دهیم.
ایده‌آل اولی را که نسبت به شامل بودن ایده‌آل صفر، مینیمال است، یک ایده‌آل اول مینیمال از R گوییم. مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول مینیمال R را با $Min(R)$ نمایش می‌دهیم.

در حالتی که ایده‌آل اول مینیمال R، (۰) باشد، R دامنهٔ صحیح است و (۰) تنها ایده‌آل اول مینیمال R است.

◂ **تعریف ۴.۲.۱**.(رادیکال جیکوبسن[۳])

به اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقهٔ R رادیکال جیکوبسن R گوییم و با $J(R)$ نشان می‌دهیم. در واقع $J(R) = \cap_{M\in Max(R)} M$ که $Max(R)$ مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقهٔ R است.

◂ **تعریف ۵.۲.۱**.(مقسوم‌علیه صفر)

عضو $a \in R$ را مقسوم‌علیه صفر گوییم، هرگاه عضو ناصفری مانند $b \in R$ وجود داشته باشد، بطوریکه $ab = 0$. مجموعهٔ تمام مقسوم‌علیه‌های صفر را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم.

◂ **تعریف ۶.۲.۱**.(پوچساز)

$a \in R$ را یک پوچساز برای ایده‌آل I گوییم، هر گاه $aI = (0)$. مجموعهٔ عناصر پوچساز ایده‌آل I از حلقهٔ R را با $(0 : I)$ نشان می‌دهیم.

◂ **نماد گذاری.** یک ایده‌آل با n مولد $a_1, \ldots, a_n$ را با $(a_1, \ldots, a_n)$ نشان می‌دهیم و در حالتی که امکان ابهام وجود دارد با $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ نشان می‌دهیم.

◂ **تعریف ۷.۲.۱**.(ارتفاع [۴])

ایده‌آل I از حلقهٔ R را در نظر می‌گیریم.بزرگترین عدد n را بطوریکه بتوان دنبالهٔ افزایشی از ایده‌آل‌های اول مانند

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n \subseteq I$$

را یافت، ارتفاع ایده‌آل I گوییم و با htI نمایش می‌دهیم.

◂ **تعریف ۸.۲.۱**.(بعد کرول[۵])

بعد حلقهٔ R برابر است با بیشینهٔ ارتفاع ایده‌آل‌های اول R که با $dim(R)$ نشان داده می‌شود. در واقع

$$dim(R) = Sup\{htP : \quad P \in Spec(R)\}.$$

◂ **تعریف ۹.۲.۱**.(مجموعهٔ بستهٔ ضربی)

$S \subseteq R$ را زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی گوییم، اگر $1_R \in S$ و برای هر $x, y \in S$، داشته باشیم: $xy \in S$.

---

[۳] Jacobson radical
[۴] height
[۵] krull dimension

◄ **تعریف ۱۰.۲.۱** .(موضعی‌سازی[۶])

گیریم M یک $R-$ مدول باشد. فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی R باشد. قرار می‌دهیم:

$$\{(m,s): \quad m \in M, s \in S\}$$

یک رابطهٔ هم‌ارزی روی این مجموعه و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $(m,s) \sim (\acute{m},\acute{s})$ اگر و فقط اگر یک $t \in S$ وجود داشته باشد، بطوریکه $t(s\acute{m} - \acute{s}m = ۰)$. هر کلاس هم‌ارزی از زوج‌های (m,s) را با $\frac{m}{s}$ و مجموعهٔ تمام کلاس‌های هم‌ارزی را با M_S (و یا $S^{-۱}M$) نمایش می‌دهیم. در این‌صورت M_S با دو عمل جمع و ضرب اسکالر

$$\frac{m}{s} + \frac{\acute{m}}{\acute{s}} = \frac{\acute{s}m + s\acute{m}}{s\acute{s}}$$

$$r.\frac{m}{s} = ۰$$

به یک $R-$مدول تبدیل می‌شود. همچنین R_S و M_S را می‌توان (با عمل جمع بالا و) با عمل ضرب

$$\frac{r}{s}.\frac{\acute{r}}{\acute{s}} = \frac{r\acute{r}}{s\acute{s}}$$

و

$$\frac{r}{s}.\frac{m}{\acute{s}} = \frac{rm}{s\acute{s}}$$

به ترتیب به عنوان یک حلقه و یک R_S-مدول در نظر گرفت. به R_S-مدول M_S، موضعی‌سازی M در S گوییم.

◄ **تذکر ۱.۲.۱** . در حالتی که P یک ایده‌آل اول از حلقهٔ R باشد، $S = R - P$ یک مجموعهٔ بستهٔ ضربی است. در این حالت، به عنوان نمادی استاندارد، M_S (R_S) را با M_P (R_P) نشان می‌دهیم.

◄ **تعریف ۱۱.۲.۱** .(حلقهٔ مَک‌کُوی[۷])

حلقهٔ R را مَک‌کُوی گوییم، هرگاه هر ایده‌آل متناهی‌مولد مشمول در $Z(R)$ یک پوچساز ناصفر داشته باشد. بطور مشابه حلقهٔ R را شمارا مَک‌کُوی گوییم، هرگاه هر ایده‌آل شمارامولد مشمول در $Z(R)$ یک

[۶] localization
[۷] McCoy

پوچساز ناصفر داشته باشد.

◄ **تعریف ۱۲.۲.۱** .($R-$ مدول بخش‌پذیر[۸])

$R-$ مدول M را $R-$ مدول بخش‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ یک $n \in M$ وجود داشته باشد، بطوریکه $rn = m$.

◄ **تعریف ۱۳.۲.۱** .(ایده آل بخشی[۹])

ایده آل I از حلقهٔ R را ایده آل بخشی گوییم، هرگاه با هر ایده آل اصلی مقایسه‌پذیر باشد.
ایده آل P، ایده آل اول بخشی است، هر گاه $P \subseteq (x)$ برای هر $x \in R - P$.

◄ **تعریف ۱۴.۲.۱** .($R-$ مدول انژکتیو[۱۰])

$R-$ مدول E را انژکتیو گوییم، هرگاه برای هر $R-$ همریختی یک به یک $f : M \to N$ و هر $R-$ همریختی $g : M \to E$، یک $R-$ همریختی $h : N \to E$ وجود داشته باشد، بطوریکه $hof = g$.

◄ **تعریف ۱۵.۲.۱** .(توسیع اساسی[۱۱])

$R-$ همریختی یک به یک $f : M \hookrightarrow N$ را در نظر می‌گیریم. $R-$مدول N را توسیع اساسی M گوییم هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر K از N داشته باشیم: $K \cap f(M) \neq (0)$.

◄ **تعریف ۱۶.۲.۱** .(پوشش انژکتیو[۱۲])

توسیع اساسی ماکسیمال $R-$ مدول M را که انژکتیو باشد، پوشش انژکتیو M گوییم و با $E_R(M)$ نشان می‌دهیم.

◄ **تعریف ۱۷.۲.۱** .(ایده آلسازی[۱۳])

فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. حاصلضرب دکارتی $R \times M$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه با دو عمل جمع و ضرب زیر یک حلقهٔ جدید تشکیل می‌دهد:

$$(r, m) + (s, n) = (r + s, m + n)$$

$$(r, m) \cdot (s, n) = (rs, rn + sm)$$

به این حلقهٔ جدید، ایده آلسازی‌شدهٔ $R-$ مدول M روی حلقهٔ R گوییم و آن را با $R(+)M$ نمایش می‌دهیم. به‌وضوح عضو $(0, 0)$، عضو صفر، و $(1, 0)$ عضو یکهٔ این حلقه می‌باشد.

[۸] divisible module
[۹] divided ideal
[۱۰] injective
[۱۱] essential extention
[۱۲] injective hull
[۱۳] idealization

۳ قضایای مقدماتی

◄ **قضیه ۱.۳.۱.** گیریم R یک حلقه باشد. در این‌صورت، $\Gamma(R)$ متناهی است اگر و فقط اگر یا R متناهی باشد یا R یک دامنهٔ صحیح باشد. به‌خصوص، اگر $1 \leq |\Gamma(R)| < \infty$ آنگاه R متناهی است و میدان نیست.

اثبات :

رجوع کنید به [۶]، قضیهٔ ۲.۲. ■

◄ **قضیه ۲.۳.۱.** گیریم R یک حلقه باشد. در این‌صورت، $\Gamma(R)$ همواره همبند است و $diam(\Gamma(R)) \leq 3$.

اثبات :

رجوع کنید به [۶]، قضیهٔ ۳.۲. ■

◄ **قضیه ۳.۳.۱.** گیریم R یک حلقه باشد. در این‌صورت، گراف $\Gamma(R)$ کامل است اگر و فقط اگر یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یا برای هر زوج $x, y \in Z(R)$، داشته باشیم: $xy = 0$.

اثبات :

رجوع کنید به [۶]، قضیهٔ ۸.۲. ■

◄ **قضیه ۴.۳.۱.** گیریم R یک حلقه باشد. در این‌صورت،
$\Gamma(R)$ تک‌نقطه‌ای[14] (یعنی $diam(\Gamma(R)) = 0$) است اگر و فقط اگر $R \cong \mathbb{Z}_4$ یا $R \cong \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$.

اثبات :

رجوع کنید به [۱۵]، گزارهٔ ۲.۲. ■

◄ **قضیه ۵.۳.۱.** گیریم R یک حلقه باشد. اگر $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ آنگاه موارد زیر با هم معادلند:

۱) $\Gamma(R)$ کامل است.

۲) $\Gamma(R[x])$ کامل است.

[14] singleton

۳) $\Gamma(R[[x]])$ کامل است.

اثبات :

رجوع کنید به [۱۱]، قضیهٔ ۳. ■

◂ **قضیه ۶.۳.۱.** گیریم R یک حلقهٔ نوتری باشد. اگر $diam(\Gamma(R)) = ۲$، آنگاه $diam(\Gamma(R[[x]])) = ۲$.

اثبات :

رجوع کنید به [۱۱]، قضیهٔ ۴. ■

◂ **قضیه ۷.۳.۱.** گیریم R یک حلقه باشد بطوریکه $diam(\Gamma(R)) = ۲$. اگر $Z(R) = P_۱ \cup P_۲$ اجتماع دو ایده‌آل اول باشد که در $Z(R)$ ماکسیمالند، آنگاه $diam(\Gamma(R[x])) = ۲$.

اثبات :

رجوع کنید به [۱۱]، گزارهٔ ۳. ■

برای حلقهٔ ایده‌آلسازی شدهٔ $R(+)M$ قضیهٔ ساختاری زیر را داریم:

◂ **قضیه ۸.۳.۱.** گیریم R یک حلقهٔ جابجایی و M یک $R-$مدول باشد. در این‌صورت،

۱) J یک ایده‌آل $R(+)M$ است اگر و فقط اگر $J = I(+)B$ که I یک ایده‌آل R و B زیرمدولی از M است، بطوریکه $IM \subseteq B$.

۲) Q یک ایده‌آل اول $R(+)M$ است اگر و فقط اگر $Q = P(+)M$ که P ایده‌آل اولی از R است.

۳) (r,m) در $R(+)M$ یکال است اگر و فقط اگر r یکالی از R باشد.

اثبات :

رجوع کنید به [۲۱]، قضیهٔ ۱.۲۵. ■

◂ **قضیه ۹.۳.۱.**(قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول)

گیریم R یک حلقهٔ نوتری و I یک ایده‌آل اصلی باشد. در این‌صورت، برای هر $P \in Min(I)$ داریم: $htP \leq ۱$.

اثبات :

رجوع کنید به [۳۱]، قضیهٔ. ■

◂ **قضیه ۱۰.۳.۱** .(قضیهٔ ایده‌آل اصلی تعمیم‌یافتهٔ کرول)
گیریم R یک حلقهٔ نوتری و $I = (a_1, \ldots, a_n)$ یک ایده‌آل سره باشد. در این‌صورت، برای هر $P \in Min(I)$ داریم: $htP \leq n$.

اثبات :

رجوع کنید به [۳۱]، قضیهٔ ۴.۱۵. ■

قضیهٔ بعد، عکس قضیهٔ بالا را بیان می‌کند:

◂ **قضیه ۱۱.۳.۱** . گیریم R یک حلقهٔ نوتری و $P \in Spec(R)$ باشد. فرض کنیم $htP = n$. در این‌صورت، یک ایده‌آل I با n مولد هست، بطوریکه $htI = n$ و $I \subseteq P$.

اثبات :

رجوع کنید به [۳۱]، قضیهٔ ۱۳.۱۵. ■

◂ **قضیه ۱۲.۳.۱** . گیریم R یک حلقهٔ نوتری باشد. فرض کنیم $P, Q \in Spec(R)$ و $P \subsetneq Q$. اگر ایده‌آل اولی مانند P_1 وجود داشته باشد بطوریکه $P \subsetneq P_1 \subsetneq Q$، آنگاه تعداد نامتناهی ایده‌آل اول بین P و Q وجود دارد.

اثبات :

رجوع کنید به [۲۳]، قضیهٔ ۱۴۴. ■

◂ **قضیه ۱۳.۳.۱** . گیریم R یک حلقه باشد. در این‌صورت، $Nil(R)$ برابر اشتراک ایده‌آل‌های اول (مینیمال) R است.

اثبات :

رجوع کنید به [۸]، گزارهٔ ۸.۱ یا [۲۳]، ص. ۱٦. ■