بسم الله الرحمن الرحيم

دانشـــگاه مازنـــدران

عنوان :

مثبت بودن جوابهای نامنفی برای سیستم مرتبط نیمه مثبت گون

« جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض »

استاد راهنما :

۱۳۸۱ /۸/ ۱۴

دکتر قاسم علیزاده افروزی

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
ثبت مدارک

استاد مشاور :

دکتر منوچهر زند

استاد داور :

دکتر میر کمال میرنیا

نگارش :

علی سوسرائی

۴۱۴۱۲

اردیبهشت ۸۱

«بسمه تعالی»

دانشگاه مازندران
معاونت آموزشی
تحصیلات تکمیلی

«ارزشیابی پایان‌نامه در جلسه دفاعیه»

دانشکده علوم پایه

نام و نام‌خانوادگی : علی سوسرائی شمارهٔ دانشجوئی : ۷۸۵۲۴۷۸۰۴

رشته تحصیلی : ریاضی کاربردی **مقطع** : کارشناسی ارشد **سال تحصیلی** : ۸۱-۸۰

عنوان پایان‌نامه : «مثبت بودن جوابهای نامنفی برای سیستم مرتبط نیمه مثبت گون»

تاریخ دفاع : ۸۱/۲/۱۸

نمره پایان‌نامه (به عدد) : ۱۸٫۲

نمره پایان‌نامه (به حروف) : هیجده و دو دهم

هیأت داوران

استاد راهنما : آقای دکتر قاسم علیزاده افروزی امضاء

استاد مشاور : آقای دکتر منوچهر زند امضاء

استاد داور : آقای دکتر عبدالعلی نعمتی امضاء

استاد مدعو : آقای دکتر میرکمال میرنیا امضاء

نماینده تحصیلات تکمیلی : آقای دکتر حسن حسین‌زاده امضاء

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی ام بخشید و مرا به طریق علم و دانش رهنمون کرد . به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخر نمود و خوشه چینی از خرمن دانش را روزیم ساخت . گذر از این راه و فائق آمدن برمشکلات و دشواری ها ممکن نبود مگر به لطف خداوند و مهربانی آنان که از وجودشان بهره مند بوده ام . لذا بر خود واجب می دانم به پاس نعمات خداوندی و بنا به وظیفه سپاسگزار تمام عزیزانی باشم که در این مرحله از زندگی با بزرگواری و مهربانی یاریم نمودند .

انجام و به ثمر رسیدن این پایان نامه را مرهون زحمات بی شائبه و راهنمایی های خردمندانه استاد ارجمند دکتر قاسم علیزاده افروزی می دانم . در ایام تحصیل افتخار داشتم که شاگرد عزیزانی چون دکتر عبدالحمید ریاضی ، دکتر ارسلان شادمان ، دکتر امیر هوشنگ یمینی ، دکتر احمد مأموریان ، دکتر احمد عبداللهی ، دکتر بهزاد اشجری ودکتر ابوالقاسم راعی ، دکتر رضا عامری و دکتر محسن علیمحمدی بوده ام و در اینجا و بدین وسیله کمال تشکر و قدردانی خویش را ابراز می دارم . همچنین از دکتر میر کمال میرنیا به دلیل داوری موشکافانه و عالمانه تشکر می کنم و از خداوند متعال برای ایشان آرزوی سلامت و توفیق دارم .

از زحمات پدر بزرگوار و مادر عزیزم که همواره مشوق و راهنمای واقعی من بودند و نیز از همسر فداکارم که سهم ایشان را در نگارش این پایان نامه کمتر از خود نمی دانم سپاسگزاری می کنم .

تقدیم به :

روح پر فتوح امام راحل (رضوان الله تعالی علیه)

و

مقام معظم رهبری

و

آنان که با قطرات خونشان از میهن اسلامی پاسداری کردند .

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

چکیده

در سالهای اخیر روی جوابهای نامنفی مسایل مقدار مرزی به شکل

$$-u''(x) = \lambda f(u(x)) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0 = u(1)$$

که $\lambda > 0$ و $f(0) > 0$ کار شده و نتایج خوبی هم برای آن حاصل شده است . ماروی جوابهای نامنفی بحث می کنیم که در شرط $f(0) < 0$ صدق می کنند.

دریافتیم که برای یکتایی جوابهای مثبت بایستی $f(u)$ محدب باشد و برای جوابهای مثبت چندگانه بایستی $f(u)$ قدری مقعر باشد. همچنین ثابت می کنیم جوابهای نامنفی با صفرهای درونی وجود دارد مگر در مسایل مثبت گون که در آن حالت دیگر صفرهای درونی نداریم.

نیز ثابت می کنیم جوابهای نامنفی مسأله دیریشله نیم خطی در یک گوی مثبت هستند و لذا تقارن شعاعی دارند . در حقیقت به این سوال پاسخ داده شده است که جوابها چه موقع تقارن شعاعی دارند . همچنین شرایطی برای هندسه دامنه ارایه داده ایم که در آن شرط مثبت بودن جوابهای نامنفی تامین می شود.

در انتها ثابت می کنیم که جوابهای نا منفی برای دستگاه نیمه مثبت گون مرتبط در یک گوی نیز مثبت هستند و لذا متقارن شعاعی اند.

فصل اوّل
مقدمه

۱ـ۱ـ۱تعریف.رابطه بین متغیر مستقل x و متغیر وابسته y و مشتقات آن نسبت به متغیر مستقل x،یک معادله دیفرانسیل معمولی را مشخّص می کند.

مشتق نسبت به xرا به صورت y' یا $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ نمایش می دهیم.به همین ترتیب برای مشتقات مرتبه بالاتر داریم

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$y^{(3)}=\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$$

حال چندین مثال برای معادله دیفرانسیل معمولی می آوریم

a) $y'=1+y$

b) $y''=-p^2y$ (P مقدار ثابت)

c)
$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}=3\frac{d^2y}{dx^2}$$

۱ـ۱ـ۲تعریف.یک معادله دیفرانسیل را از مرتبه n گویند هرگاه بالاترین مرتبهٔ مشتق ظاهر شده برابر n باشد .مثلاً معادله (a)از مرتبه اوّل و معادلات (b) و (c)از مرتبه دوّم هستند.

منظور از حل معادلهٔ دیفرانسیل آن است که کلّیه جوابهای صادق در معادله دیفرانسیل را به دست آوریم. به عنوان مثال تابع $y=e^x-1$ در معادله (a)صدق می کند ،زیرا

$$y=e^x-1\Rightarrow y'=e^x\Rightarrow y'=y+1$$

پس $y = e^x - 1$ یک جواب برای معادله (a)است.

در حالت کلّی همه توابع به صورت $y = ke^x - 1$ که جواب معادله دیفرانسیل (a) است، زیرا

$$y = ke^x - 1 \Rightarrow y' = ke^x \Rightarrow y' = 1 + y$$

لذا بی شمارجواب برای معادله دیفرانسیل (a) به دست آمده است. به این جوابها ،جواب عمومی معادله (a) اطلاق می شود.یعنی $y = ke^x - 1$ یک جواب عمومی برای معادله (a)است.به ازای هر مقدار برای پارامترk، یک جواب خصوصی برای معادله (a)حاصل می شود.مثلاً به ازاء $k = 5$ تابع $y = 5e^x - 1$ یک جواب خصوصی برای معادله (a) است.

۱ـ۱ـ۳تعریف. هر رابطه بین متغیرهای مستقل $x_1, \dots, x_n$ ومتغیر تابع u و مشتقات متغیر تابع نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل جزئی (نسبی)می گویند.

۱ـ۱ـ۴ تعریف. $y = u(x_1, \dots, x_n)$ تابعی چند متغیره باشد. مشتق u نسبت به متغیر x_i به صورت $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ با u_{x_i} نشان داده می شود.همچنین مشتق دوم u نسبت به متغیر x_i به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ یا $u_{x_i x_i}$ نشان داده می شود.به همین ترتیب مشتق مرتبه n م u نسبت به x_i به صورت $\frac{\partial^n u}{\partial x_i^n}$ نشان داده می شود.

حال چندین مثال برای معادلات دیفرانسیل جزئی (نسبی) می آوریم

(معادله گرمائی تک بعدی) (d) $u_t = k^2 u_{xx}$

(معادله موج تک بعدی) (e) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

(معادله لاپلاس دو بعدی) (f) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

همان طور که گفته شد یک معادله دیفرانسیل می تواند جوابهای بی شماری داشته باشد که به هر یک از این جوابها جواب خصوصی معادله دیفرانسیل گفته می شود. برای به دست آوردن یک جواب خصوصی از یک معادله دیفرانسیل،می بایست یک نقطه از جواب را داشته باشیم و در جواب عمومی قرار دهیم تا مقدار ثابت دلخواه جواب عمومی به دست آید و بدین ترتیب جواب خصوصی مشخص گردد.

ثابت می شود که برای هر معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ n ، در حالت کلی جوابهای عمومی آن وابسته به n ثابت دلخواه می باشند. بنابراین برای به دست آوردن یک جواب خصوصی از مجموعه جوابهای عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n، می بایست مختصات nنقطه از جواب مورد نظر را داشته باشیم .

۱ـ۱ـ۵ قضیهٔ وجود یکتائی برای معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم .

تابع $u=f(x,y,z)$ را طوری در نظر بگیرید که f_z, f_y, f_x در مکعب مستطیل

$$R=\{(x,y,z) \,||\, x-x_0|<h, |y-y_0|<k, |z-z_0|<l\}$$

پیوسته باشد. در این صورت بازه ای شامل نقطهٔ x_0 مثل بازهٔ $I=(x_0-\sigma, x_0+\sigma)$ وجود دارد به طوری که معادلهٔ $y''=f(x,y,y')$ دارای جوابی یکتا به صورت $y=y(x)$ است که روی I تعریف شده و در شرایط زیر صدق می کند

$$y(x_0)=y_0 \qquad \text{و} \qquad y'(x_0)=z_0$$

شرایط فوق را شرایط مسأله مقدار اولیه گویند.

بنابراین برای یک معادله از مرتبه n با دارا بودن n مقدار اولیه معلوم در نقطهٔ x_0 مثل

$$y(x_0)=y_0 \qquad \text{و} \qquad y'(x_0)=y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

آن معادله دارای جواب خصوصی یکتائی به صورت $y=y(x)$ است که در n شرط بالا صدق می کند.

۱ـ۱ـ۶ تعریف. فرض کنید معادلهٔ کلی $f(x_1,\dots x_n, u_{x_1}, \dots u_{x_n}, u_{x_1x_2}, \dots u_{x_1x_n}, \dots u_{x_nx_n})=0$ بیانگر یک معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه n باشد. در این صورت معادله بالا را خطی گوئیم هرگاه معادله بر حسب u و کلیه مشتقات u وابسته خطی با ضرائب حقیقی باشد. مثلا معادلات (a) و (b) خطی اند. همچنین معادلات (d) و (e)، (f) نیز خطی اند.

۱ـ۱ـ۷ تعریف. فرض کنید معادلهٔ کلی $F(x_1,\dots x_n, u_{x_1}, \dots u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots u_{x_1x_n}, \dots u_{x_nx_n})=0$ بیانگر یک معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه n باشد. در این صورت معادلهٔ بالا را نیم خطی گویند، هرگاه بر حسب همهٔ مشتقات u خطی با ضرائب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ باشد، معادلهٔ $u+u_x=xu_y$ و نیز معادلهٔ $-u''(x)=\lambda f(u(x))$ به ازاء هر تابع f، نیم خطی اند.

برخی تعاریف و نمادهای آنالیزی

۱ـ۲ـ۱ تعریف. یک حوزه (یا دامنه) $\Omega \subseteq \Re^n$، زیر مجموعه ای باز و همبند است.منظور از باز بودن Ω آن است که گوئی به مرکز $x \in \Omega$ و به شعاع r (یعنی $B_r(x)$) در Ω باشد. (یعنی $B_r(x) \subset \Omega$).منظور از همبندی Ω آن ست که هر دو نقطهٔ $x, y \in \Omega$ را بتوان توسط یک پاره خط شکسته (یا حتی منحنی) که تماما در Ω قرار داشته باشد به هم وصل کرد.

۱ـ۲ـ۲ تعریف. حوزه Ω کراندار است هرگاه یک گوی بزرگ به مرکز 0 وبه شعاع M شامل Ωموجود باشد باشد.(یعنی $\Omega \subset B_M(0)$)

فرض کنید $\overline{\Omega}$ نشان دهندهٔ بستار Ω باشد مرز $\partial\Omega$ از یک حوزهٔ Ω مجموعهٔ نقاط حدی Ωاست که در Ω قرار ندارند، یعنی $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$

اگر $\Omega = \Re^n$،آنگاه $\partial\Omega = \phi$و اگر Ωیک مجموعه کراندار باشد، $\partial\Omega$ نیز مجموعه ای کراندار است.

۱ـ۲ـ۳ تعریف. فرض کنید $E \subset S$ یک مجموعهٔ کراندار باشد.اگر عنصری مانند $\alpha \in S$ با خواص زیر موجود باشد

(۱) α یک کران بالائی E باشد.

(۲) هرگاه b نیز یک کرانَ بالایی برای E باشد، در این صورت $\alpha \le b$.

در این صورت α را کوچکترین کران بالائی E (یا سوپریمم E) می نامیم و می نویسیم $\alpha = \sup E$

۱ـ۲ـ۴ تعریف. فرض کنید $E \subset S$ یک مجموعهٔ کراندار باشد.اگر عنصری مانند $\beta \in S$ با خواص زیر موجود باشد

(۱) β یک کران پایینی E باشد.

(۲) هرگاه cنیز یک کران پایینی برای E باشد، در این صورت $c \le \beta$.

در این صورت β را بزرگترین کران پایینی E (یا اینفی مم E) می نامیم و می نویسیم $\beta = \inf E$

۱ـ۲ـ۵ قضیهٔ هوپیتال. فرض کنید f، g بر (a,b) حقیقی و مشتقپذیر باشند و به ازای هر $x \in (a,b)$، $g'(x) \neq 0$ که $-\infty \le a < b \le +\infty$. فرض کنید اگر $x \to a$ آنگاه $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A$ و نیز وقتی $x \to a$، $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ و یا این که هر گاه $x \to a$ در این صورت $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$. در این صورت وقتی $x \to a$، آنگاه $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$

۱ـ۲ـ۶ قضیه. فرض کنید f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد(یعنی $f \in R$ روی $[a,b]$).به ازای $a \le x \le b$ قرار دهید $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. در این صورت F بر $[a,b]$پیوسته است به علاوه هر گاه f در نقطهٔ x_0 از $[a,b]$ پیوسته باشد، F در x_0 مشتقپذیر است و داریم $F'(x_0) = f(x_0)$.

۱ـ۲ـ۷ دستور مشتق گیری از انتگرال. فرض کنید $u_2(a),u_1(a)$ توابعی حقیقی و مشتق پذیر روی $[\alpha,\beta]$ باشند و f نیز تابعی حقیقی دو متغیره و مشتقپذیرباشد.اگر $\psi(a)=\int_{u_1(a)}^{u_2(a)} f(x;a)dx$ ، $a\in[\alpha,\beta]$ آنگاه

$$\frac{d\psi}{da}=\int_{u_1(a)}^{u_2(a)}\frac{df(x;a)}{da}dx+\frac{du_2(a)}{da}.f(u_2(a),a)-\frac{du_1(a)}{da}f(u_1(a),a)$$

۱ـ۳ـ۱ تعریف.تابع حقیقی f از $\Re$ به توی $\Re$ را زبرخطی گویند هرگاه

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}=\infty$$

۱ـ۳ـ۲تعریف.هرگاه f تابعی حقیقی روی مجموعهٔ $E\subset\Re$ باشد و به ازاء هر $x,y\in E$ داشته باشیم

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(ax)=af(x)\qquad\forall a\in\Re$$

آنگاه f تابعی خطی است و در غیر این صورت به آن غیر خطی گویند.

۱ـ۳ـ۳تعریف. تابع حقیقی f از $\Re$ به توی $\Re$ را زیرخطی گویند هرگاه

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}=0$$

۱ـ۳ـ۴ تعریف.معادلهٔ دیفرانسیل $u^{(n)}(x)=f(u(x),u'(x),u''(x),...,u^{(n-1)}(x))$ که تابع f بطور صریح به $x\in E\subset\Re$ بستگی نداشته باشد را معادلهٔ دیفرانسیل ناوابسته (خودگردان)می گویند.

تذکراز تعریف بالا دیده می شود که به ازاء هر عدد حقیقی ثابت c،تابع $u_1(x)=u(x+c)$ نیز یک جواب معادله خواهد بود که در بازهٔ $(a-c,b-c)$ تعریف می شود.

۱ـ۳ـ۵ تعریف. مجموعهٔ تمام توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ نشان می دهند و آنهائی که مشتقات نسبی مرتبهٔ اولشان نیز همگی پیوسته اند را با $C^1(\Omega)$نمایش می دهند.

$C^1(\Omega)=\{f\mid f:\Omega\to\Re^n$ با مشتقات نسبی مرتبهٔ اول پیوسته$\}$

به طور مشابه برای $k\in N$، $C^k(\Omega)$ نشان دهندهٔ مجموعهٔ تمام توابع پیوسته روی Ω است که همهٔ مشتقات تا مرتبهٔ k-ام آن نیز روی Ω پیوسته باشند.

گاهی اوقات به جای استفاده از $f\in C^k(\Omega)$ می گوئیم f از کلاس(ردهٔ) C^kاست یا این که f تا مرتبهٔ k-ام تابعی هموار است.

۱ـ۳ـ۶ تعریف. $C^1(\overline{\Omega})$ نشان دهندهٔ مجموعهٔ توابع $f\in C^1(\Omega)$ ی است که برای آن، f ومشتقات نسبی مرتبهٔاول fبه طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ گسترش می یابند.

$C^k(\overline{\Omega}),C(\overline{\Omega})$ نیز به طور مشابه تعریف می شود.در حالت کلی می توانیم بنویسیم

$$C(\Omega;\Re^n)=\{f\mid f:\Omega\to\Re^n,\ f\ \text{پیوسته}\}\quad \Omega\subset\Re^n \ \text{که}$$

۱ـ۳ـ۷ تعریف.فرض کنید $y=u(x_1,...,x_n)$ یک تابع چند متغیره باشد .عملگر لاپلاسین را که با Δu نمایش می دهند به صورت زیر تعریف می شود

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\ 2}}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^{\ 2}}$$

بنابراین معادله لاپلاس تک بعدی به صورت $u''(x)=f(x)$ ومعادلهٔ لاپلاس دو بعدی به صورت $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ تعریف می شود.(f تابعی دلخواه است).

۱ـ۳ـ۸ تعریف. بردار گرادیان تابع uرا به صورت ∇u نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند

$$\nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n})$$

در این قسمت مسائل مقدار مرزی برای معادلات لاپلاس nبعدی ،بخصوص مسائل دیریشله را مورد مطالعه وبررسی قرار می دهیم .

۱ـ۳ـ۹ تعریف. فرض کنید $\Omega\subset\Re^n$ یک حوزه باشد. معادله لاپلاس همگن به صورت زیر است

$$\Delta u=0 \qquad : \qquad \Omega\subset\Re^n \qquad (۱)$$

و نوع غیر همگن آن به صورت زیر است

$$\Delta u=f \qquad : \qquad \Omega\subset\Re^n \qquad (۲)$$

که به معادلهٔ پوآسن معروف است.

معادلهٔ لاپلاس و معادلهٔ پوآسن غالبا در علوم فیزیکی پدید می آیند.به عنوان مثال ، جوابهای پوآسن ، متناظر باحالات تعادلی (یا پایدار مستقل از زمان) نظیر جریان گرما،حرکت موج و.... است که f متناظر با نیروهای بیرونی نظیر منابع گرمایی یا مولدهای موج است . وقتی هیچ نیروی بیرونی نباشد، چنین حالات پایداری با جوابهای معادله لاپلاس همگن متناظرند.

جوابهای (۱) را توابع همساز در Ω می نامند و می گوئیم تابع u در Ω همساز است .معادلات لاپلاس و پوآسن همچنین نقش مهمی در نظریه های میدانی دارد که در آن میدانی نظیر میدان الکتریکی (یا میدان مغناطیسی یا میدان گرانشی) به عنوان گرادیان تابع پتانسیل u است.

۱ـ۴ـ۱ روش جداسازی متغیرها برای حل معادلات لاپلاس .

یکی از روشهای حل معادلات لاپلاس روش جداسازی متغیرهاست . اگر دامنه Ω دارای تقارن طبیعی باشد، آنگاه سعی خواهیم کرد که از جداسازی متغیرها و سریهای فوریه به حل معادله بپردازیم .

مثال : مسأله مقدار مرزی زیر را برای $z = u(x,y)$ در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 && 0 \le x, y \le \pi \\ &u(0,y) = 0 = u(\pi,y) , && 0 \le y \le \pi \\ &u(x,0) = 0 && 0 \le x \le \pi \end{aligned}$$

برای حل این مسأله به روش جداسازی متغیرها ، فرض کنید $u(x,y) = X(x)Y(y)$ جواب مسأله معادله دیفرانسیل جزئی (یا به اختصار PDE) باشد. پس با مشتقگیری و جایگذاری در $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ خواهیم داشت

$$X''Y + XY'' = 0$$

می توان به طور جبری متغیرهای این معادله را از هم جدا کرد.

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$$X'' = -\lambda X$$

$$Y'' = \lambda Y$$

حال معادلهٔ $X''+\lambda X = 0$ را به کمک معادله مشخصه آن یعنی $t^2 + \lambda = 0$ حل می کنیم .این راه حل در کلیهٔ کتب معادلات دیفرانسیل ارائه شده است . داریم

$$X(x) = ae^{i\sqrt{\lambda}x} + be^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

حال با استفاده از شرط مرزی $u(0,y) = 0$ و روابط ریاضی داریم

$$u(0,y) = 0 \to X(0)Y(y) = 0 \to X(0) = 0$$

$$u(\pi,y) = 0 \to X(\pi)Y(y) = 0 \to X(\pi) = 0$$

و همچنین

$$X(x) = a(\cos\sqrt{\lambda}x + i\sin\sqrt{\lambda}x) + b(\cos\sqrt{\lambda}x - i\sin\sqrt{\lambda}x)$$

با جایگزینی $X(\pi) = X(0) = 0$ و ساده کردن روابط در نهایت داریم

$$\begin{cases} a+b=0 \\ (a-b)\sin\sqrt{\lambda}\pi=0 \end{cases}$$

اگر $a-b=0$ ، آنگاه داریم $a=b=0$. که در این صورت جواب بدیهی برای مسأله به دست می آید.

لذا $\sin\sqrt{\lambda}x=0$ یعنی $\sqrt{\lambda}\pi=n\pi$ برای $n\in \mathrm{N}$. بنابراین $\lambda=n^2;n=1,2,\ldots$ پس $X_n(x)=a_n\sin nx$.

حال با این مقادیر λ ،معادله به صورت $Y''-n^2Y=0$ در می آید. معادلهٔ مشخصهٔآن به صورت $s^2-n^2=0;n\in\mathrm{N}$ است.لذا $s=\pm n$ و در نتیجه $n=1,2,\ldots$ $\quad Y_n(y)=c_n\sinh(ny)+d_n\cosh(ny)$

با جایگزینی شرط مرزی $U(x,0)=0$ داریم $Y(0)=0$ ،از طرفی $Y_n(0)=d_n$ لذا $d_n=0$.

بنابراین $\quad u_n(x,y)=X_nY_n=a_n\sin(nx)\sinh(ny)\quad;\quad n=1,2,\ldots$

و در حالت کلی

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)\sinh(ny)$$

که به صورت صوری در معادله $u_{xx}+u_{yy}=0$ و سه شرط مرزی همگن صدق می کند.

۱ــ۴ــ۲ معادلات دیفرانسیل با مقادیر مرزی . فرض کنید Ω یک قلمرو کراندار باشد.مسائل مقدار مرزی ، یک معادله دیفرانسیل با شرط مرزی است که به دو صورت می باشد.یا شرط مرزی $u|_{\partial\Omega}=g$ را داریم یا شرط مرزی $\frac{\partial}{\partial n}u|_{\partial\Omega}=h$ که در آن nبردار عمود بر $\partial\Omega$ است را داریم یا مقادیر مشتق عمود uرا روی $\partial\Omega$ داریم که این به دو مسأله مقدارمرزی متفاوت منجر می شود.

i) مسأله دیریشله برای معادله لاپلاس که شامل یافتن یک جواب صادق در شرایط زیر است

$$\begin{aligned} &\Delta u=0 && \text{در } \Omega \\ &u(x)=g(x) && \text{روی } \partial\Omega \end{aligned} \qquad (3)$$

ii) مسأله نیومن برای معادله لاپلاس که شامل یافتن یک جواب صادق در شرایط زیر است

$$\begin{aligned} &\Delta u=0 && \text{در } \Omega \\ &\frac{\partial u}{\partial n}=h(x) && \text{روی } \Omega \end{aligned} \qquad (4)$$

که در آن nبردار یکه عمود بر $\partial\Omega$ است

به همین طریق می توان حالت دیریشله و نیومن را برای معادله پوآسن (یعنی در Ω $\Delta u=f$) تعریف کرد.

۱ــ۴ــ۳ تعریف. معادله دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دوم $au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=f(x,y)$ را در نظر بگیرید که در آن c,b,a ضرائب ثابتی هستند.