بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشکده ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

روش‌های تکراری شکافت هرمیتی و هرمیتی -کج اصلاح شده پیش شرط سازی شده برای دستگاه معادلات خطی متقارن مختلط

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط

هادی فیض‌اله‌زاده

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادرم

و تقدیم به آنانی که برای بشریت تلاش کرده‌اند

تقدیر و تشکر:

سپاس خداوندی را که داده‌هایش نعمت است و نداده‌هایش حکمت و این است که شکر او را در هر حال واجب می‌نماید. پس در حال هر او را شکر می‌نمایم خصوصاً به این خاطر که مرا توفیق داد در راه علم که راه برگزیدگان اوست قدم بردارم.

از زحمات پدر و مادر گرامی‌ام نهایت تشکر را دارم. بی‌شک بدون حمایت و پشتیبانی آنها تعالی و پیشرفت برایم دشوار خواهد بود.

از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه که در نوشتن این پایان نامه کمال همکاری را داشتند، سپاسگزاری می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر برهانی‌فر و جناب آقای دکتر ضارب‌نیا که زحمت بازخوانی و داوری این رساله را بر عهده داشتند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از دانشجویان دانشگاه محقق اردبیلی و همکلاسی‌های خود که در طی دوران تحصیل مرا همراهی کردند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

هادی فیض اله زاده

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: فیض‌اله‌زاده **نام:** هادی

عنوان پایان نامه :

روش‌های تکراری شکافت هرمیتی و هرمیتی ـکج اصلاح شده پیش شرط سازی شده برای دستگاه معادلات خطی متقارن مختلط

استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیزعددی
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱/۶/۲۸ **تعداد صفحه ۸۵**

کلید واژه‌ها :
دستگاه معادلات خطی، پیش شرط سازی شده، HSS و MHSS

چکیده:
در این پایان نامه قصد داریم به معرفی روش تکراری HSS اصلاح شده (MHSS) پیش شرط سازی شده بپردازیم که برای حل رده‌ای از دستگاههای معادلات خطی متقارن مختلط به کار می‌رود. تحت شرایط مناسب، همگرایی روش تکراری MHSS پیش شرط سازی شده (PMHSS) را بررسی کرده و مشخصات طیف ماتریس ضرایب پیش شرط سازی شده با ماتریس پیش شرط ساز PMHSS را بیان می‌کنیم. نتایج عددی نیز نشان می‌دهد که وقتی از ماتریس پیش شرط ساز PMHSS برای پیش شرط سازی روش‌های زیرفضای کرایلف مانند روش مانده‌ی مینیمال (GMRES) و روش مانده‌ی مینیمال با شروع مجدد (GMRES(♯)) استفاده می‌شود همگرایی سریعتر خواهد بود. بخصوص، مثال‌هایی که آورده شده‌اند نشان می‌دهد که روش تکراری PMHSS و روش GMRES پیش شرط سازی شده با ماتریس پیش شرط ساز PMHSS نسبت به پارامتر و اندازه‌ی مساله حساس نیستند.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار . . . . ط

۱ تعاریف ومفاهیم اولیه ۱

۱.۱ تعاریف ۲

۲.۱ قضایا ۶

۳.۱ روش‌های تکراری ایستا ۸

۴.۱ زیرفضای کرایلف ۹

۵.۱ روش مانده‌ی مینیمال تعمیم یافته (GMRES) ۱۲

۶.۱ روش GMRES پیش شرط سازی شده ۱۵

۷.۱ معرفی روش گرادیان مزدوج (CG) ۱۸

۲ روش HSS اصلاح شده (MHSS) برای حل رده‌ی وسیعی از دستگاه‌های معادلات خطی متقارن مختلط ۲۰

۱.۲ مقدمه ۲۱

۲.۲ روش‌های شکافت هرمیتی—هرمیتی کج (HSS) ۲۲

۳.۲ روش‌های شکافت هرمیتی—هرمیتی کج ناقص (IHSS) ۲۸

۴.۲ روش تکراری MHSS ۳۱

۳ روش PMHSS برای حل رده‌ی وسیعی از دستگاههای خطی متقارن مختلط ۳۹

۱.۳ پایه گذاری روش ۴۰

۲.۳ نتایج نظری ۴۳

۴ نتایج عددی ۵۳

۱.۴ مقدمه ۵۴

۲.۴ نتیجه‌گیری ۶۵

الف مراجع ۷۴

ب واژه نامه ۷۸

لیست اشکال

۱.۲ نمودار $f(\alpha)$ برای $\lambda = ۲,۴,۶$ به ازای مقادیر مختلف و مثبت α در بازه‌ی $[۰,۱۶)$ ۲۶

۱.۴ تعداد تکرارها برای مقادیر مختلف m وقتی که $GMRES$ و $GMRES(۱۰)$ پیش شرطسازی شده‌اند برای مثال ۱.۴ . . . . ۵۷

۲.۴ تعداد تکرارها برای مقادیر مختلف m وقتی که $GMRES$ و $GMRES(۱۰)$ پیش شرطسازی شده‌اند برای مثال ۲.۴ . . . . ۵۷

۳.۴ تعداد تکرارها برای مقادیر مختلف m وقتی که $GMRES$ و $GMRES(۱۰)$ پیش شرطسازی شده‌اند برای مثال ۳.۴ . . . . ۵۹

۴.۴ نمودار تعداد تکرارها برای روش‌های $MHSS$ و $PMHSS$ وقتی $m = ۱۶$ برای مثال ۱.۴ . . . . ۶۰

۵.۴ نمودار تعداد تکرارها برای روش‌های $MHSS$ و $PMHSS$ وقتی $m = ۱۶$ برای مثال ۲.۴ . . . . ۶۱

۶.۴ نمودار تعداد تکرارها برای روش‌های $MHSS$ و $PMHSS$ وقتی $m = ۱۶$ برای مثال ۳.۴ . . . . ۶۲

۷.۴ نمودار تعداد تکرارها در مثال ۱.۴ برای روش‌های $GMRES$ و $GMRES(۱۰)$ که با $MHSS$ و $PMHSS$ پیش شرطسازی شده‌اند وقتی که $m = ۶۴$ ۶۳

۸.۴ نمودار تعداد تکرارها در مثال ۲.۴ برای روش‌های $GMRES$ و $GMRES(۱۰)$ که با $MHSS$ و $PMHSS$ پیش شرطسازی شده‌اند وقتی که $m = ۶۴$ ۶۴

۹.۴ نمودار تعداد تکرارها در مثال ۳.۴ برای روش‌های $GMRES$ و $GMRES(۱۰)$ که با $MHSS$ و $PMHSS$ پیش شرطسازی شده‌اند وقتی که $m = ۶۴$ ۶۴

لیست جداول

۱.۴ مقادیر IT و CPU برای روش‌های $MHSS$، $PMHSS$، $GMRES$ و $GMRES(20)$ برای مثال ۱.۴ . . . . ۶۷

۲.۴ مقادیر IT و CPU برای حالت پیش شرطسازی شده‌ی $GMRES$ و $GMRES(10)$ برای مثال ۱.۴ . . . . ۶۸

۳.۴ مقادیر IT و CPU برای روش‌های $MHSS$، $PMHSS$، $GMRES$ و $GMRES(20)$ برای مثال ۲.۴ . . . . ۶۹

۴.۴ مقادیر IT و CPU برای حالت پیش شرطسازی شده‌ی $GMRES$ و $GMRES(10)$ برای مثال ۲.۴ . . . . ۷۰

۵.۴ مقادیر IT و CPU برای روش‌های $MHSS$، $PMHSS$، $GMRES$ و $GMRES(20)$ برای مثال ۳.۴ . . . . ۷۱

۶.۴ مقادیر IT و CPU برای حالت پیش شرطسازی شده‌ی $GMRES$ و $GMRES(10)$ برای مثال ۳.۴ . . . . ۷۲

۷.۴ بازه‌ی پارامتر بهینه برای روش‌های $MHSS$ و $PMHSS$ که به ازای آنها کمترین تکرار را داریم. ۷۲

۸.۴ بازه‌ی پارامتر بهینه برای حالت پیش شرطسازی شده وقتی که $m =$ ۱۶، $m =$ ۳۲ و $m =$ ۶۴ که به ازای آنها کمترین تکرار را داریم. ۷۳

۹.۴ بازه‌ی پارامتر بهینه برای حالت پیش شرطسازی شده وقتی که $m =$ ۱۲۸ و $m =$ ۲۵۶ که به ازای آنها کمترین تکرار را داریم. ۷۳

پیش‌گفتار

بسیاری از مسایل علمی و کاربردی را می‌توان به صورت یک دستگاه معادلات خطی فرمول بندی نموده و جواب را از حل دستگاه به دست آورد. یک دستگاه معادلات خطی در حالت کلی به شکل

$$Ax = b, \qquad (۱.۰)$$

است که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و b یک بردار n تایی است. منظور از حل دستگاه یافتن برداری مانند x است که در(۱.۰) صدق کند.

به طور کلی روش‌های حل دستگاه (۱.۰) دو دسته‌اند: روش‌های مستقیم و روش‌های تکراری.

الف—روش‌های مستقیم: روش‌هایی هستند که در آنها پس از تعداد متناهی اعمال حسابی به جواب دستگاه (جواب واقعی) می‌رسیم. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توانیم به روش حذفی گوس[۱] و روش گاوس— جردن[۲] اشاره کنیم[۱۵].

ب—روش‌های تکراری: در روش‌های تکراری با استفاده از یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، دنباله‌ای از بردارها تولید می‌شود که به جواب دستگاه همگراست. روش‌های تکراری نیز خود شامل روش‌های ایستا[۳] (ساکن) و غیرایستا[۴] می‌باشد. در یک روش ایستا ماتریس تکرار در همه‌ی گام‌های تکرار ثابت می‌باشد و تغییر نمی‌کند. به طور کلی در روش‌های ایستا

---

[۱] Gaussian elimination

[۲] Gauss-Jordan elimination

[۳] Stationary iterative methods

[۴] Nonstationary iterative methods

دستگاه (۱.۰) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x = Bx + C.$$

بنابراین دنباله‌ای مثل $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + C$ ساخته می‌شود. شرایطی فراهم می‌کنیم به طوری که این دنباله با هر نقطه‌ی شروع $x^{(0)}$ به جواب دستگاه (۱.۰) یعنی $x = A^{-1}b$ همگرا باشد. به سادگی می‌توان ثابت کرد که شرط لازم و کافی برای اینکه دنباله‌ی $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + C$ به ازای هر حدس اولیه‌ی $x^{(k)}$ همگرا باشد این است که $\rho(B) < 1$ که در آن $\rho(B)$ معرف شعاع طیفی ماتریس B است [۱۵].

از جمله روش‌های ایستا می‌توان به روش ژاکوبی[۱]، SOR، گوس − سایدل[۲] اشاره کرد. برخلاف روش‌های ایستا، در روش‌های غیرایستا ماتریس تکرار ثابتی وجود ندارد و در هر گام تغییر می‌کند، از جمله‌ی روش‌های این دسته می‌توان به گرادیان مزدوج (CG[۳])، FOM[۴] و GMRES[۵] اشاره کرد[۲۲].

روش تکراری دو مرحله‌ی HSS[۶] در سال ۲۰۰۳ توسط بای[۷] و همکارانش ابداع شد که برای حل دستگاههای معادلات خطی با ماتریس ضرایب معین مثبت به کار می‌رود. بای و همکارانش در [۴] صورت اصلاح شده‌ی روش HSS یا همان روش تکراری MHSS[۸] را برای ماتریس‌های معین مثبت متقارن مختلط ارایه کردند که از نظر همگرایی و مدت زمان اجرا بهتر از روش HSS برای این نوع ماتریس‌ها بود. در سال ۲۰۱۰ نیز آنها در [۱۱] با پیش شرط سازی روش MHSS علاوه بر بهتر کردن روش به نوعی مشکل پیدا کردن پارامتر بهینه را که از جمله مشکلات اساسی روش‌های تکراری است، حل کردند. در این پایان‌نامه قصد داریم روش MHSS پیش شرط سازی شده[۹] را معرفی کرده و جزئیات همگرایی آن را بررسی کنیم.

---

[۱] Jacobi

[۲] Gauss-Seidel

[۳] Conjugate gradient

[۴] Full Orthogonalization Method

[۵] Generalized minimal residual

[۶] Hermitian and Skew-hermitian Splitting

[۷] Bai

[۸] Modified Hermitian and Skew-Hermitan splitting

[۹] Preconditioned

فصل اول این پایان نامه به تعاریف، قضایا و معرفی روش‌هایی اختصاص دارد که در طول پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در فصل دوم به معرفی روش‌های تکراری HSS و MHSS پرداخته و قضایای مربوط به آنها را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم روش تکراری PMHSS[1] را معرفی نموده و خواص و ویژگی‌های آن را با اثبات چند قضیه بررسی می‌کنیم و بالاخره در فصل چهارم با ارایه کردن سه مثال، هم کارایی روش تکراری PMHSS را نشان می‌دهیم و هم می‌بینیم هنگامی که از ماتریس پیش شرط ساز PMHSS برای پیش شرط سازی GMRES و GMRES(♯) استفاده می‌شود، بازه‌ی وسیعی را برای پارامتر بهینه خواهیم داشت و در حالت کلی اگر پارامتر را ۱ در نظر بگیریم، تعداد تکرارها و زمان همگرایی تقریباً با زمانی که پارامتر بهینه را با آزمایش به دست می‌آوریم، یکی خواهد بود.

[1] Preconditioned Modified Hermitian and Skew-Hermitan splitting

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم اولیه

در این فصل به ارایه‌ی بعضی از مفاهیم و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ادامه به معرفی روش GMRES و CG می‌پردازیم که هم در مقایسه با روش تکراری مورد بحث و هم در قسمت نتایج عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک نرم روی V تابع‌ای است مثل $\|.\|$ از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$. بعلاوه $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$؛

(ج) به ازای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که $V = \mathbb{C}^n$، نرم را نرم برداری و در صورتی که $V = \mathbb{C}^{n\times n}$، نرم را نرم ماتریسی گوئیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنید که $A = (a_{ij})$ ماتریسی با درایه‌های حقیقی باشد. ترانهاده‌ی ماتریس A به صورت $A^T = (a_{ji})$ تعریف می‌شود. ماتریس A را متقارن گوییم هرگاه $A^T = A$ و آن را کج‌متقارن گوییم هرگاه $A^T = -A$. همچنین، ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را هرمیتی گویند هرگاه، $A = A^H$ که در آن $A^H = (\overline{a_{ji}})$. در این صورت A را هرمیتی کج گویند هرگاه، $A = -A^H$.

تعریف ۳.۱ ماتریس A را یکانی گویند هرگاه $A^H A = I$. اگر A یکانی باشد، آنگاه $\|A\|_2 = 1$، که $\|A\|_2$ نرم ماتریسی تولید شده توسط نرم برداری اقلیدسی است.

تعریف **۴.۱** ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را قطری شدنی گویند هرگاه یک ماتریس یکانی مانند U وجود داشته باشد به طوری که

$$U^H AU = U^{-1} AU = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n),$$

که در آن λ_i، $i = 1, ..., n$ مقادیر ویژه‌ی A هستند.

تعریف **۵.۱** یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی (یا مختلط) V، تابع‌ای است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در V، اسکالر حقیقی (یا مختلط) (x, y) نسبت می‌دهد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) (x, x) حقیقی باشد و $(x, x) \geq 0$. بعلاوه $(x, x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) برای هر اسکالرλ، $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$؛

(ج) برای هر $z \in V$، $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$؛

(د) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

تعریف **۶.۱** هر فضای برداری مختلط یا حقیقی که یک ضرب داخلی در آن تعریف شده باشد یک فضای حاصل‌ضرب داخلی نامیده می‌شود.

مثال **۱.۱** برای هر دو بردار x و y در $\mathbb{C}^n$، ضرب داخلی استاندارد آنها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i x_i.$$

تعریف **۷.۱** برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ پوچی A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$null(A) = \{x \in \mathbb{C}^n \ : Ax = 0\}.$$

تعریف **۸.۱** فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ و $B \in \mathbb{C}^{r\times s}$ دو ماتریس دلخواه باشند. در این صورت، ماتریس $C \in \mathbb{C}^{pr\times qs}$، ضرب کرونکر[۱] ماتریس A در ماتریس B را با نماد $A\otimes B$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \bigotimes B = \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & a_{۱۲}B & \dots & a_{۱s}B \\ a_{۲۱}B & a_{۲۲}B & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \\ a_{r۱}B & & \dots & a_{rs}B \end{bmatrix}.$$

تعریف **۹.۱** فرض کنید ماتریس A نامنفرد باشد. در این صورت

$$\kappa(A) = \mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-۱}\|,$$

را عدد شرطی ماتریس A گوییم. اگر $\mathrm{cond}(A)$ کوچک باشد، آنگاه دستگاه $Ax = b$ را یک دستگاه خوش شرط[۲] و در صورتی که $\mathrm{cond}(A)$ بزرگ باشد دستگاه را بدشرط[۳] نامیم.

تعریف **۱۰.۱** ماتریس $n \times n$

$$T = \begin{pmatrix} a_۱ & b_۱ & & \\ c_۲ & a_۲ & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-۱} \\ & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

را یک ماتریس سه‌قطری می‌نامیم و با $T = \mathrm{tridiag}_n(c_i, a_i, b_i)$ نشان می‌دهیم.

---

[۱] Kronecker product
[۲] well-conditioned
[۳] ill-conditioned

تعریف ۱۱.۱ بردارهای x_1،x_2،...،x_n را در $\mathbb{C}^n$ دو به دو متعامد گویند هرگاه $x_i^H x_j = 0$، $i \neq j$. در این صورت اگر قرار دهیم $X = (x_1, \cdots, x_n)$، آنگاه خواهیم داشت

$$X^H X = D,$$

که در آن D یک ماتریس قطری $n \times n$ می‌باشد. بعلاوه اگر $D = I$ بردارها را یکامتعامد و ماتریس X را متعامد نامند.

تعریف ۱۲.۱ ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را معین مثبت گوییم، هرگاه:

$$\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x^T A x > 0.$$

اگر A متقارن و معین مثبت باشد ماتریس A را معین مثبت متقارن[1] (SPD) گوییم. همچنین ماتریس A را نیمه معین مثبت متقارن گویند هرگاه A متقارن بوده و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $x^T A x \geq 0$.

تعریف ۱۳.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را معین مثبت هرمیتی[2] (HPD) گوییم، هرگاه A هرمیتی باشد و دارای شرط

$$\forall x \neq 0 \in \mathbb{C}^n \quad : \quad x^H A x > 0.$$

باشد. همچنین، ماتریس A را نیمه معین مثبت هرمیتی گویند هرگاه A هرمیتی بوده و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^H A x \geq 0$.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. گوییم $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه متناظر به بردار ویژه x برای ماتریس A است، هرگاه

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0,$$

در این صورت (λ, x) را یک زوج ویژه‌ی A گویند.

---
[1] Symmetric positive definite
[2] Hermitian positive definite

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید $sp(A)$ مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A باشد. در این صورت بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A از حیث قدر مطلق را شعاع طیفی ماتریس A می‌گویند و با $\rho(A)$ نمایش می‌دهند یعنی

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|.$$

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$. در این صورت $A = M - N$ را یک شکافت از A گوییم، هرگاه M نامنفرد باشد.

۲.۱ قضایا

قضیه ۱.۱ (قضیه‌ی کیلی—همیلتون[۱])هر ماتریس مربعی A در چندجمله‌ای مشخصه‌ی خود صدق می‌کند. یعنی اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی A باشد، آنگاه

$$p(A) = 0.$$

برهان : به [۲۳] مراجعه شود. □

قضیه ۲.۱ بردارهای ویژه‌ی متناظر به مقادیر ویژه‌ی متمایز یک ماتریس مستقل خطی هستند.

برهان : به [۱۵] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۱ اگر ماتریس A متقارن و همه مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشند، آنگاه A معین مثبت متقارن است.

برهان : به [۱۵] مراجعه شود. □

[۱] Caley-Hamilton