دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم – گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش جبر)

عنوان:

ثابت‌ها و دستگاه سیستم اکید چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر روی میدان‌های ارزش‌دار هنسلی

استاد راهنما:

دکتر کمال عقیق

ارائه دهنده:

زهرا خوش‌مسلک

آذر ۹۱

با تشکر فراوان از جناب آقای دکتر کمال عقیق که در تمام مراحل نگارش این پایان‌نامه مرا از مساعدت‌ها و راهنمایی‌های دلسوزانه‌شان بهرمند نمودند و همچنین بینش جدیدی از علم ریاضیات را در ذهن من ایجاد نمودند.

تقدیم به همسر عزیز، پدر و مادر مهربانم. به پاس بردباری بی‌نظیرشان که همواره سرچشمه اعتقاد و امید من بوده است و محبت بی‌دریغشان که گرمی بخش لحظات زندگی من است و حضورشان که خلا بی‌نهایت زندگی‌ام را سرشار از عشق و امید کرده است.

چکیده

در این پایان‌نامه مفاهیم مقدماتی از توسیع میدان‌ها و نظریه اعداد جبری را مطالعه می‌کنیم. سپس به بررسی قدرمطلق‌ها، ارزیاب‌ها و میدان‌های کامل می‌پردازیم. همچنین با توسیع ارزیاب v به توسیع $K^{\prime}/K$، درجه باقیمانده و شاخص انشعاب را تعریف می‌کنیم. به‌ویژه، توسیع‌های بی‌نقص و سپس چندجمله‌ای‌های بی‌نقص را تعریف می‌کنیم و نیز با استفاده از تعریف زنجیرهای متمایز کامل، ثابت‌های وابسته به چندجمله‌ای‌ها بی‌نقص تعریف می‌شود. همچنین به‌معرفی دستگاه اکید چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر می‌پردازیم و یک تناظر یک به یک میان دستگاه اکید چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر و کلاس‌های مزدوج زنجیرهای متمایز کامل برقرار می‌کنیم که این تناظر به‌عنوان یک نتیجه ساده از نتایج متنوع اثبات شده برای دستگاه‌های اکید است.

نمادها

اعداد طبیعی .... $\mathbb{N}$

اعداد صحیح .... $\mathbb{Z}$

میدان اعداد گویا .... $\mathbb{Q}$

میدان اعداد مختلط .... $\mathbb{C}$

یک چندجمله‌ای با ضرایبی متعلق به K .... $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در K .... $K[x]$

میدان توابع گویا با ضرایب در K .... $K(x)$

گروه ضربی عناصر ناصفر میدان K .... $K^{\times}$

K' یک توسیع K است .... K'/K

بستار جبری K .... $\widetilde{K}$

ایده‌آل اصلی تولید شده توسط a .... (a)

تصویر a تحت نگاشت طبیعی .... $\bar{a}$

حلقه‌ی اعداد صحیح جبری........ $\mathcal{O}$

قدرمطلق معمولی........ $| \ |_0$

نرم........ $\| \ \|$

قدرمطلق p-$adic$........ $| \ |_p$

میدان اعداد p-$adic$........ Q_p

ارزیاب p-$adic$........ v_p

ارزش درجه........ v_∞

حلقه‌ی ارزش v........ $\mathcal{O}, \mathcal{O}_v$

ایده‌آل ماکسیمال حلقه ارزش o_v........ $\mathcal{M}, \mathcal{M}_v$

میدان کلاس باقیمانده ارزیاب v........ R_v

گروه ارزش v........ G_v

گروه یکه‌های حلقه‌ی O_v........ $\mathcal{O}_v^\times$

اندیس انشعاب توسیع ارزیاب $(K_۲, \mathcal{O}_۲) \supseteq (K_۱, \mathcal{O}_۱)$ .... $e(\mathcal{O}_۲ / \mathcal{O}_۱)$

درجه باقیمانده توسیع ارزیاب $(K_۲, \mathcal{O}_۲) \supseteq (K_۱, \mathcal{O}_۱)$ .... $f(\mathcal{O}_۲ / \mathcal{O}_۱)$

نقص توسیع (L/K) .... $def(L/K)$

گروه ثابت بخش‌پذیر از گروه ارزش G ارزیاب v .... $\mathbb{Q}G$

یک زنجیر برای θ .... $\theta = \theta_0, \theta_۱, \dots, \theta_n$

فهرست مطالب

فصل یک

فصل دو

فصل سه

فصل چهار

فصل پنج

مقدمه

در فصل اول ابتدا به تعریف مفاهیم مقدماتی مانند توسیع میدان‌ها می‌پردازیم که منجر به تعریف چندجمله‌ای‌های تفکیک‌پذیر و میدان‌های تام[1] می‌شود که در فصل پنجم مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین از قضایا، لم‌ها و گزاره‌های این فصل ، در فصل‌های بعد مستقیم یا غیرمستقیم استفاده می‌کنیم.

در فصل دوم ابتدا مفهوم قدرمطلق را روی یک میدان دلخواه تعریف می‌کنیم و سپس برای سهولت بیشتر با استفاده از نگاشت $v(x) = ln|x|$، قدرمطلق را به صورت جمعی و تحت عنوان، ارزیاب مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه این فصل، به تعریف مفاهیمی مانند گروه ارزش، حلقه ارزش و میدان مانده می‌پردازیم. همچنین خاصیت ارشمیدسی برای ارزیاب‌ها بیان می‌شود و با ذکر مثال سعی در بیان تفاوت‌های ارزیاب ارشمیدسی و غیرارشمیدسی داریم. در ادامه نیز با استفاده از تعریف مجموعه مرتب، ارزیاب کرول و رتبه یک ارزیاب را تعریف می‌کنیم و در انتها به بیان قضایایی مانند آرتین- واپلاس می‌پردازیم.

در فصل سوم با توجه به اهمیت لم هنسل در این پایان‌نامه و شرط برقراری آن برای میدان‌های کامل غیرارشمیدسی، ابتدا یک میدان کامل را تعریف می‌کنیم و سپس به دسته‌بندی میدان‌های کامل بر اساس خصلت ارشمیدسی می‌پردازیم. همچنین لم هنسل را ارائه می‌دهیم و این‌که اگر یک میدان در این لم صدق کند، هنسلی است.

[1] perfect

در فصل چهارم به توسیع ارزیاب‌ها می‌پردازیم. و با استفاده از آن دو مفهوم درجه باقیمانده و اندیس انشعاب را تعریف می‌نمایم. همچنین به تعریف ارزیاب درجه می‌پردازیم. در ادامه این فصل با استفاده از [۱۲]، مفهوم مکان تعریف می‌شود.

در فصل پنجم با استفاده از [۱۳]، [۱۴] و [۱۶] ابتدا زوج‌های متمایز را تعریف می‌کنیم و سپس مفهوم آن را به زنجیرهای متمایز کامل تعمیم می‌دهیم. در ادامه این فصل با تعریف دستگاه اکید چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر، به بیان یک تناظر یک به یک میان دستگاه اکید چندجمله‌ای‌ها و کلاس‌های مزدوج زنجیرهای متمایز کامل می‌پردازیم.

فصل یک

۱ - ۱ توسیع میدان‌ها

تعریف ۱-۱-۱

فرض کنیم که K یک میدان باشد. در این‌صورت، میدانی مانند $K^{\prime}$ را یک توسیع[۲] K می‌نامیم هرگاه K زیرمیدانی از $K^{\prime}$ باشد. این‌که $K^{\prime}$ توسیع K است را با نماد $K^{\prime}/K$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۱

میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یک توسیع از میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ نیز یک توسیع از میدان اعداد گویای $\mathbb{Q}$ است.

قضیه ۱-۱-۱

قضیه: فرض کنیم که K یک میدان و $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایبی متعلق به میدان K باشد. دراین‌صورت، یک توسیع K مثل $K^{\prime}$ و نیز عضوی متعلق به میدان $K^{\prime}$ مثل α، که ریشه‌ی $f(x)$ باشد، وجود دارد.

اثبات: به قضیه ۸-۱-۳، در [۱]، صفحه ۴۷۲، مراجعه نماید.

تعریف ۱-۱-۲

فرض کنیم که K یک میدان و $K^{\prime}/K$ یک توسیع آن باشد. در این‌صورت، $K^{\prime}$ یک فضای برداری روی میدان K می‌باشد. بعد این فضای برداری را درجه توسیع[۳] $K^{\prime}/K$ می‌نامیم و با نماد $[K^{\prime}:K]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۳

[۲]فرض کنیم که K یک میدان و $K^{\prime}/K$ یک توسیع آن باشد؛ در این‌صورت، $K^{\prime}/K$ را یک توسیع متناهی[۴] می‌نامیم هرگاه درجه توسیع $K^{\prime}/K$ یک عدد متناهی باشد. همچنین متناهی بودن درجه را با نماد $[K^{\prime}:K] < \infty$ نمایش می‌دهیم.

[۲] field extension
[۳] extension degree
[۴] finite extension

مثال ۱-۱-۲

$\mathbb{Q}$ زیرمیدانی از میدان $\mathbb{Q}\left(\sqrt{۲}\right)$ است و یا به‌عبارت دیگر $\mathbb{Q}\left(\sqrt{۲}\right)$ یک فضای برداری روی میدان اعداد گویا $\mathbb{Q}$ است. می‌توان برای این فضای برداری مجموعه‌ی $\{۱ , \sqrt{۲}\}$ را به‌عنوان یک پایه در نظر گرفت، در نتیجه خواهیم داشت که، $[\mathbb{Q}\left(\sqrt{۲}\right) : \mathbb{Q}] = ۲$ و این یعنی $\mathbb{Q}\left(\sqrt{۲}\right)/\mathbb{Q}$ یک توسیع متناهی است.

تعریف ۱-۱-۴

[۲]فرض کنیم که K یک میدان، F یک زیرمیدان و S نیز یک زیرمجموعه دلخواه آن باشد. در این‌صورت، حاصل اشتراک تمام آن زیر میدان‌های K، که تک تک شامل $F \cup S$ باشند، یک زیرمیدان K و یک توسیع F می‌باشد. این توسیع را با نماد $F(S)/F$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه، S را مجموعه مولد[۵] توسیع $F(S)/F$ می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۵

[۱]فرض کنیم که K یک میدان، F یک زیر میدان و S نیز یک زیرمجموعه تک عضوی آن مثلا $S = \{\alpha\}$، باشد. در این‌صورت، توسیع $F(\alpha)/F = F(S)/F$ را یک توسیع ساده[۶] F و α را نیز عنصر مولد[۷] این توسیع می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۶

[۲]فرض کنیم که K یک میدان، K'/K یک توسیع آن و $f(x) \in K[x]$ یک چندجمله‌ای باشد. دراین‌صورت، می‌گویم که $f(x)$ در میدان K' می‌شکافد هرگاه بتوانیم $f(x)$ را به حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌های درجه یک، که متعلق به $K'[x]$ هستند، تجزیه کنیم. حال اگر $f(x)$ در K' شکافته شود و K' کوچک‌ترین میدان شامل K با این ویژگی باشد، آن‌گاه K' را میدان شکافنده[۸] چندجمله‌ای $f(x)$ روی K می‌نامیم.

قضیه ۱-۱-۲

فرض کنیم که K یک میدان، K'/K یک توسیع آن، $f(x) \in K[x]$ یک چندجمله‌ای درجه n و C یک مقدار ثابت باشد. دراین‌صورت، اگر $f(x)$ مطابق $f(x) = C \times (x - c_۱) \times \ldots \times (x - c_n)$ در $K'[x]$ تجزیه شود، آن‌گاه $K(c_۱, \ldots , c_n)$ را میدان شکافنده $f(x)$ روی K می‌نامیم.

---

[۵] generating set
[۶] simple extension
[۷] generating element
[۸] splitting field

اثبات: به قضیه ۲۱-۲-۶ در [۳]، صفحه ۵۶۴، مراجعه نمایید.

تعریف ۱-۱-۷

[۲]فرض کنیم که K یک میدان، $p(x)$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر درجه nام متعلق به $K[x]$ و S میدان شکافنده $p(x)$ روی K باشد. در این‌صورت، $p(x)$ را روی K تفکیک‌پذیر[۹] می‌نامیم هرگاه $p(x)$ دارای nتا ریشه‌ی متمایز در S باشد.

تعریف ۱-۱-۸

[۲]فرض کنیم که K یک میدان و $f(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه متعلق $K[x]$ باشد. در این‌صورت، $f(x)$ را روی میدان K تفکیک‌پذیر می‌نامیم هرگاه تمام چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر موجود در تجزیه $f(x)$، که البته همگی متعلق به $K[x]$ هستند، روی میدان K تفکیک‌پذیر باشند.

مثال ۱-۱-۳

$\mathbb{Q}(\sqrt{۲})/\mathbb{Q}$ یک توسیع ساده و $\sqrt{۲}$ مولد این توسیع است.

$\mathbb{Q}(\sqrt{۲})$ میدان شکافنده چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر درجه دوم $\frac{۱}{۲}x^{۲} - ۱ \in \mathbb{Q}[x]$ است، زیرا $\mathbb{Q}(\sqrt{۲})$ کوچکترین میدان شامل $\mathbb{Q}$ است که بتوان در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های آن، یعنی $\mathbb{Q}(\sqrt{۲})[x]$، چندجمله‌ای $\frac{۱}{۲}x^{۲} - ۱$ را به حاصل‌ضرب دوچندجمله‌ای درجه اول، به‌شکل،

$$\frac{۱}{۲}x^{۲} - ۱ = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}x - ۱\right) \times \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}x + ۱\right)$$

تجزیه کرد. به‌علاوه چندجمله‌ای مورد نظر به‌دلیل داشتن دو ریشه‌ی متمایز $\pm\sqrt{۲}$ که به میدان شکافنده‌اش، یعنی $\mathbb{Q}(\sqrt{۲})$ تعلق دارند، روی $\mathbb{Q}$ تفکیک‌پذیر است.

تعریف ۱-۱-۹

[۱]فرض کنیم که K یک میدان، K'/K یک توسیع آن و β متعلق به K' باشد. در این صورت، β را روی K یک عنصر جبری[۱۰] می‌نامیم هرگاه β ریشه‌ی یک چندجمله‌ای ناصفر متعلق به $K[x]$ باشد.

---
۹ separable
۱۰ algebraic

تعریف ۱-۱-۱۰

[۱]در تعریف فوق، اگر $K^{\prime}$ و K به‌ترتیب برابر با $\mathbb{C}$ و $\mathbb{Q}$ باشد، آن‌گاه βی توصیف شده را یک عدد جبری[۱۱] می‌نامیم.

قضیه ۱-۱-۳

فرض کنیم که K یک میدان، $K^{\prime}/K$ یک توسیع آن و β متعلق به $K^{\prime}$ باشد. در این‌صورت، β روی K جبری است اگروتنهااگر β ریشه‌ی یک چندجمله‌ای کمین متعلق به $K[x]$ باشد.

اثبات: به قضیه ۸.۱.۲۱ در [۲]، صفحه ۵۴۸، مراجعه نماید.

مثال ۱-۱-۴

$\sqrt{۲}$ یک عدد جبری می‌باشد، زیرا به‌ازای آن چندجمله‌ایی مثل، $(x^{۲} + ۳) \times \left(\frac{۱}{۲}x^{۲} - ۱\right) \in \mathbb{Q}\,[x]$، صفر می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۱

[۱]فرض کنیم که K یک میدان و $K^{\prime}/K$ یک توسیع آن باشد. در این‌صورت، $K^{\prime}/K$ را یک توسیع جبری[۱۲] می‌نامیم هرگاه هر عضو $K^{\prime}$ یک عنصرجبری روی میدان K باشد.

تعریف۱-۱-۱۲

فرض کنیم که K یک میدان باشد. در این‌صورت، K را یک میدان عدد جبری[۱۳] می‌نامیم هرگاه K یک توسیع جبری متناهی از میدان اعداد گویا $\mathbb{Q}$ باشد.

مثال ۱-۱-۵

$\mathbb{Q}\left(\sqrt{۲}\right)$ یک توسیع جبری متناهی از میدان اعداد گویا و در نتیجه یک میدان عدد جبری است.

قضیه ۱-۱-۴

فرض کنیم که K یک میدان، $K^{\prime}/K$ یک توسیع آن، $\beta \in K^{\prime}$ یک عنصر جبری روی میدان K و $deg(\beta, K) = n$ باشد. دراین‌صورت، $K(\beta)$ یک فضای برداری n- بعدی روی K با پایه $\{ ۱, \beta, \ldots, \beta^{n-۱} \}$ می‌باشد.

اثبات: به قضیه ۲۳.۲.۸ در [۱]، صفحه ۴۹۱، مراجعه نماید.

[۱۱] algebraic element
[۱۲] algebraic extension
[۱۳] algebraic number field

تعریف ۱-۱-۱۳

[۲]فرض کنیم که K یک میدان باشد. در این‌صورت، K را از نظر جبری بودن بسته[14] (به‌طور جبری بسته) می‌نامیم هرگاه هر چندجمله‌ای غیرثابت روی K دارای ریشه‌ای متعلق به میدان K باشد.

قضیه ۱-۱-۵

فرض کنیم که K یک میدان باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل می‌باشند:

۱) K از نظر جبری بسته می‌باشد؛

۲) تنها چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر متعلق به $K[x]$، چندجمله‌ای‌های درجه یک می‌باشند؛

۳) هر چندجمله‌ای غیرثابت روی میدان K را می‌توان به حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌هایی با درجه یک، متعلق به $K[x]$، تجزیه نمود؛

۴) میدان K با هر توسیع جبری‌اش برابر می‌باشد.

اثبات: به قضیه ۲.۳.۲۱ در[۲]، صفحه ۵۷۲، مراجعه نماید.

تعریف ۱-۱-۱۴

[۲]فرض کنیم که K یک میدان و K'/K یک توسیع آن باشد. در این‌صورت، میدان K' را بستار جبری[15] میدان K می‌نامیم و آن‌را با نماد $\widetilde{K}$ نمایش می‌دهیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) K'/K توسیعی جبری

و

۲) K' از نظر جبری بسته باشد.

به‌علاوه، بنا بر نتیجه ۴.۳.۲۱ در [۲]، صفحه ۵۷۴، هر میدان دلخواه، دارای یک بستار جبری می‌باشد.

قضیه ۱-۱-۶

(**قضیه اساسی جبر**)[16] : میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ از نظر جبری بسته می‌باشد.

اثبات: به برهان قضیه ۱۹.۳ در [۱۴]، صفحه ۴۱۷، مراجعه نماید.

[14] algebraically closed
[15] algebraic closure
[16] fundamental theorem of algebra

تعریف ۱-۱-۱۵

[۲]فرض کنیم که K یک میدان، $K^{\prime}/K$ یک توسیع آن و $\beta \in K^{\prime}$، روی K جبری باشد. در این‌صورت، β را روی K از نظر جبری تفکیک‌پذیر[۱۷] می‌نامیم هرگاه چند جمله‌ای کمین آن روی میدان K تفکیک‌پذیر باشد.

تعریف ۱-۱-۱۶

[۲]فرض کنیم که K یک میدان و $K^{\prime}/K$ یک توسیع جبری آن باشد. در این‌صورت، $K^{\prime}/K$ را یک توسیع از نظر جبری تفکیک‌پذیر می‌نامیم هرگاه هر عضو میدان $K^{\prime}$ روی K تفکیک‌پذیر باشد.

مثال ۱-۱-۵

مثال ۱۷.۱.۲ در [۲]، صفحه ۵۵۱:

به دلیل تساوی $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-۱})$، توسیع $\mathbb{C} / \mathbb{R}$ یک توسیع جبری و $\mathbb{C}$ نیز طبق قضیه ۱-۲-۶، از نظر جبری بسته است، بنابراین $\mathbb{C}$ بستار جبری $\mathbb{R}$ می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱۷

[۲]فرض کنیم که K یک میدان باشد. در این‌صورت، K را میدان تام[۱۸] می‌نامیم هرگاه هر توسیع جبری آن روی K تفکیک‌پذیر باشد.

قضیه ۱-۱-۷

فرض کنیم که K یک میدان با مشخصه عدد اول $p > 0$ باشد. در این‌صورت، K را یک میدان تام می‌نامیم اگروتنهااگر تساوی $K = K^p$، برقرار باشد.

اثبات: به ۱۲.۱.۲۲ در [۲]، صفحه۵۸۲، مراجعه نماید.

قضیه فوق راهی برای شناخت یک میدان تام در اختیار ما قرار می‌دهد. اگرمیدانی با مشخصه صفر باشد، آن‌گاه هرچندجمله‌ای غیرثابت روی آن تفکیک‌پذیر است. بنابراین هر میدان با مشخصه صفر یک میدان تام می باشد.

[۱۷] algebraically Separable
[۱۸] perfect

نتیجه ۷.۱.۲۲ در [۳]، صفحه ۵۸۱ بیان می‌کند از آن‌جایی که مشخصه $\mathbb{Q}$ برابر با صفر است لذا $\mathbb{Q}$ یک میدان تام می‌باشد. هر توسیع جبری متناهی و یا نامتناهی $\mathbb{Q}$ یک توسیع تفکیک‌پذیر است. تام بودن $\mathbb{Q}$ بدین معناست که تمام ریشه‌های یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر روی $\mathbb{Q}$ متمایز می‌باشند.

قضیه ۱-۱-۸

فرض کنید که K یک میدان و K'/K یک توسیع آن باشد. در این صورت، احکام زیر معادل می‌باشند:

۱) اگر K'/K یک توسیع متناهی باشد، آن‌گاه K'/K یک توسیع جبری نیز می‌باشد؛

۲) برای یک عضو متعلق به K' مثل β توسیع ساده $K(\beta)/K$، یک توسیع متناهی است اگر وتنها اگر β روی K جبری باشد؛ (به قضیه ۱۹.۱.۲۱ در [۲] صفحه ۵۵۲، مراجعه نماید.)

۳) اگر K'/K یک توسیع تفکیک‌پذیر متناهی باشد، آن‌گاه به‌ازای عضوی متعلق به K'، مثل δ، تساوی $K' = K(\delta)$ برقرار است. به‌عبارت دیگر، یک توسیع تفکیک‌پذیر متناهی، یک توسیع ساده می‌باشد.

اثبات: به قضیه ۱۵.۴.۹ در [۱]، صفحه ۵۶۶، مراجعه نماید.

تعریف ۱-۱-۱۸

فرض کنیم که K یک میدان و K'/K یک توسیع آن باشد. در این‌صورت، دو عضو $\alpha, \beta \in K'$ را K- مزدوج[۱۹] و یا به‌عبارت دیگر، روی میدان K مزدوج[۲۰] می‌نامیم هرگاه α, β ریشه‌های چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر واحدی روی میدان K باشند.

نکته: بنابر نتیجه ۹.۲.۲۱ در [۲]، صفحه ۵۶۶، اگر α, β متعلق به میدان K' و K- مزدوج باشند، آن‌گاه

$$K(\alpha) \cong K(\beta) .$$

تعریف ۱-۱-۱۹

عدد مختلط β را متعالی[۲۱] می‌نامیم هرگاه β یک عدد جبری نباشد.

---

۱۹ K-conjugate

۲۰ Conjugate over K

۲۱ transcendental

قضیه ۱-۱-۹

فرض کنیم که K یک میدان، K'/K یک توسیع میدان و $\beta \in K'$ باشد. β روی K جبری است اگروتنهااگر $K(\beta)/K$ یک توسیع متناهی باشد. در این‌صورت، $[K(\beta):K]$ با درجه چندجمله‌ای مینیمال β روی K برابر است و همچنین داریم $K(\beta) \cong K[\beta]$.

اثبات: به [۲۴]، مرجع صفر بعد از قضیه ۱.۱۱، مراجعه نماید.

در نتیجه، برای هر β مختلط شرایط زیر معادل می‌باشند:

۱) β یک عدد جبری است؛

۲) β در یک چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب صحیح صدق می‌کند؛

۳) $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] < \infty$.

تعریف ۱-۱-۲۰

فرض کنیم که O یک حلقه و R یک زیرحلقه‌ی آن باشد. در این‌صورت، عضوی از O را یک عنصر صحیح[۲۲] روی R می‌نامیم هرگاه ریشه‌ی یک چندجمله‌ای تکین با ضرایبی متعلق به R باشد. بدین ترتیب، با توجه به تعاریف عنصر جبری و صحیح و با این فرض که O و R هر دو میدان باشند، عضوی از O روی R صحیح خواهد بود اگروتنهااگر این عضو روی R جبری باشد.

تعریف ۱-۱-۲۱

فرض کنیم که β یک عدد جبری باشد. در این‌صورت، β را یک عدد صحیح جبری[۲۳] می‌نامیم هرگاه ریشه‌ی یک چندجمله‌ای تکین با ضرایبی متعلق به اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ باشد.

گزاره ۱-۱-۱

فرض کنیم که O یک حلقه، R یک زیر حلقه و $\beta \in R$ باشد. در این‌صورت، احکام زیر معادل می‌باشند:

۱) β روی R صحیح است؛

---

[۲۲] integer or integral elment
[۲۳]algebraic integral

۲) حلقه‌ی $R\left[\beta\right]$ یک R- مدول به‌طور متناهی تولید شده می‌باشد؛

۳) یک زیرحلقه‌ی O مثل T چنان موجود است که $R\left[\beta\right] \subseteq T$ و T یک R- مدول به‌طور متناهی تولید شده می‌باشد.

اثبات: به گزاره A. در [۲۲]، صفحه ۸۵، مراجعه نمایید.

تعریف ۱-۱-۲۲

[۲۲]فرض کنیم که O یک حلقه و R یک زیرحلقه‌ی آن باشد. در این‌صورت، O را روی R صحیح[۲۴] می‌نامیم هرگاه هر عضو O روی R صحیح باشد.

تعریف ۱-۱-۲۳

[۲۲]فرض کنیم که O یک حلقه و R یک زیر حلقه‌ی آن باشد. در این‌صورت، اگر عضوی از O که روی R صحیح می‌باشد، به خود R تعلق داشته باشد، آن‌گاه R را در O از نظر صحیح بودن بسته[۲۵] می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۲۴

[۲۲]فرض کنیم که O یک حلقه و R یک زیر حلقه‌ی آن باشد. در این‌صورت، مجموعه تمام عناصر O، که روی R صحیح هستند، حلقه‌ای را تشکیل می‌دهد که در O از نظر صحیح بودن بسته می‌باشد. این حلقه را بستار صحیح[۲۶] R در O می‌نامیم.

---

[۲۴] integral over R
[۲۵] integrally closed
[۲۶] integral closure