بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی

عنوان

طراحی و ساخت گوی معلق فازی به روش تاکاگی-سوگنو

اساتید راهنما

دکتر علی وحیدیان‌کامیاد و دکتر سهراب عفتی

نگارنده

احمد شوقی

زمستان ۱۳۹۲

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: طراحی و ساخت گوی معلق فازی به روش تاکاگی-سوگنو

نام نویسنده: احمد شوقی اساتید راهنما: دکتر علی وحیدیان‌کامیاد و دکتر سهراب عفتی

دانشکده: علوم ریاضی گروه: ریاضی کاربردی رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی

تاریخ تصویب: ۱۳۹۲/۳/۱۳ تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۱۰/۱۴

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۸۶

چکیده پایان‌نامه : سیستم‌های معلق عموما" سیستم‌هایی ناپایدار و با مدل‌های ریاضی پیچیده می‌باشند. لذا تحلیل رفتار و پایدارسازی این گونه سیستم ها نیز با پیچیدگی‌هایی روبروست. روش‌هایی که در کنترل کلاسیک جهت پایدارسازی سیستم‌ها ارائه می‌شود عموما" بر مبنای مدل ریاضی سیستم می‌باشد که این موضوع در مواجهه با مدل‌های ریاضی پیچیده یک ضعف محسوب می‌شود. مزیت استفاده از کنترل‌کننده‌های فازی در این است که به مدل ریاضی سیستم بستگی ندارد و می‌تواند جایگزین خوبی برای سایر روش‌های کنترلی در سیستم‌های غیرخطی باشد. در این پایان‌نامه با معرفی سیستم کنترل‌گوی معلق فازی ، با روش طراحی و ساخت سیستم گوی معلق آئرودینامیک آشنا خواهیم شد و با توجه به پیچیدگی مدل دینامیکی سیستم گوی معلق، از روش کنترل فازی با رهیافت سوگنو جهت پایدارسازی این سیستم استفاده خواهیم نمود. به این ترتیب که کنترل‌کننده فازی به عنوان یک سیستم استنتاج فازی در نرم‌افزار MATLAB پیاده‌سازی می‌شود. رایانه با توجه به اطلاعات دریافتی از سیستم گوی معلق، سرعت و *ارتفاع لحظه‌ای* گوی را محاسبه نموده و کنترلر با توجه به سرعت و ارتفاع لحظه‌ای، ارتفاع گوی را کنترل خواهدنمود. فرمان کنترل، ولتاژی است که از طرف کنترلر به فن سیستم گوی معلق اعمال می‌شود. در ادامه سیستم گوی معلق را مدل‌سازی نموده و با لحاظ نمودن معادله کنترل‌کننده در مدل ریاضی سیستم ، پایداری مجانبی سیستم را با استفاده از *قضیه پایداری لیاپانوف* اثبات خواهیم‌نمود.

واژگان کلیدی: منطق فازی، کنترلر فازی، گوی معلق آئرودینامیک، پایداری

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : طراحی و ساخت گوی معلق فازی به روش تاکاگی-سوگنو

اینجانب احمد شوقی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر علی وحیدیان‌کامیاد متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه فردوسی مشهد '' و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ
امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق این اثر و محصولات آن(مقالات مستخرج، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است. این مطلب بایستی به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.**

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها ج

فهرست جدول‌ها ه

پیش‌گفتار و

۱ تئوری مجموعه‌های فازی ۱

۱.۱ مفاهیم پایه ۱

۱.۲ سیستم‌های فازی ۷

۱.۲.۱ سیستم‌های فازی با رهیافت ممدانی ۸

۱.۲.۲ سیستم‌های فازی با رهیافت تاکاگی-سوگنو-کانگ(TSK) ۱۱

۱.۳ کنترل فازی ۱۲

۲ ساختار سیستم گوی معلق فازی ۱۴

۲.۱ مدار منبع تغذیه ۱۵

۲.۲ مدار درایور فن ۱۶

۲.۳ مدارهای سنسور آلتراسونیک ۱۷

۲.۳.۱ قسمت فرستنده ۱۹

۲.۳.۲ قسمت گیرنده ۱۹

۲.۴ مدارهای ارتباطی بین میکروکنترلر و کامپیوتر ۲۰

۳ پایدارسازی سیستم گوی معلق ۲۴

۳.۱ طراحی کنترل‌کننده فازی ۲۴
۳.۱.۱ انتخاب متغیرهای ورودی و خروجی ۲۵
۳.۱.۲ استخراج قواعد **IF-THEN** فازی ۲۶
۳.۱.۳ ترکیب قواعد **IF-THEN** فازی و آزمایش روی سیستم حلقه‌بسته . . ۳۷
۳.۲ ایجاد کنترل‌کننده فازی در نرم‌افزار متلب ۳۸

۴ تحلیل پایداری سیستم گوی معلق فازی ۴۸
۴.۱ مفاهیم اولیه و قضایا ۴۸
۴.۲ مدل‌سازی ۵۴
۴.۳ اثبات پایداری ۵۸

آ کدهای برنامه‌نویسی ۶۵

مراجع ۸۴

فهرست شکل‌ها

۱.۰ نمونه‌های ساخته شده از سیستم‌های گوی معلق . . . . . ط

۱.۱ توابع عضویت جعبه‌ابزار فازی متلب ۲

۱.۲ شمای کلی عملکرد سیستم گوی معلق فازی ۱۵
۲.۲ مدار تغذیه DC ۱۶
۳.۲ مدار راه انداز فن ۱۸
۴.۲ مدار سنسور فرستنده ۱۹
۵.۲ مدار سنسور گیرنده ۲۱
۶.۲ مدار ارتباطی بین میکروکنترلر و کامپیوتر ۲۲
۷.۲ مدار تبدیل RS232 به USB ۲۳

۱.۳ سیستم کنترل گوی معلق فازی ۲۵
۲.۳ نمودار توابع عضویت متغیرهای ورودی ۲۷
۳.۳ وضعیت توپ در مقادیر زبانی مختلف ۲۸
۴.۳ کنترل حلقه‌بسته سیستم گوی معلق ۳۷
۵.۳ ایجاد FIS در جعبه‌ابزار فازی متلب ۳۸
۶.۳ ایجاد سیستم فازی سوگنو ۳۹
۷.۳ افزایش تعداد متغیرهای ورودی ۳۹
۸.۳ متغیرهای ورودی کنترلر فازی سیستم گوی معلق ۴۰
۹.۳ ویرایش متغیرهای ورودی ۴۰
۱۰.۳ شخصی‌سازی تابع عضویت ۴۱
۱۱.۳ ویرایش توابع خروجی ۴۱

۱۲.۳ روش افزایش تعداد توابع خروجی ۴۲
۱۳.۳ روش ویرایش قواعد **IF-THEN** ۴۴
۱۴.۳ طراحی متغیرهای ورودی و خروجی کنترل‌کننده فازی سیستم گوی معلق ۴۵
۱۵.۳ رابط گرافیکی طراحی شده ۴۶
۱۶.۳ وضعیت پایداری توپ در نقاط تعادل مختلف ۴۷

۱.۴ نمایش هندسی مجموعه‌های برهان قضیه ۲.۱.۴ . . . . . ۵۲
۲.۴ نیروهای وارد بر توپ در سیستم گوی معلق ۵۴
۳.۴ شبیه‌سازی سیستم (۱۶.۴) در سیمولینک متلب ۵۷
۴.۴ نمایش ریشه معادله $T(x_1, 0) = 8/1916$ ۶۰
۵.۴ پایداری سیستم دینامیکی (۲۲.۴) در نقاط تعادل مختلف ۶۴

فهرست جدول‌ها

۱.۳ جدول مقادیر در حوزه مقدار زبانی neglarge ۲۹
۲.۳ جدول مقادیر ۳۱
۳.۳ جدول مقادیر ۳۲

پیش‌گفتار

پدیده معلق‌بودن[۱] از دیرباز تاکنون توجه بسیاری را به خود جلب نموده و دانشمندان و محققان بسیاری به روش‌های مختلف سعی در ساختن سیستم‌های معلق نموده‌اند. از عجایب هفت‌گانه باغ‌های معلق بابل (۵۶۲-۶۰۵ پیش از میلاد) گرفته تا قطارهای مغناطیسی[۲] امروزی همگی موید اهمیت ، زیبایی و ارزش این پدیده است. اگر چه ساحران و جادوگران به روش‌های سحر و جادو این پدیده را به وضوح اجرا نموده و ادعا نموده‌اند که توسط نیروهای غیرطبیعی ایجاد می‌شود ولی دانشمندان تحقیقاتی در این زمینه انجام داده‌اند و نشان داده‌اند که تحت شرایطی اجسام حتی مواد مایع نیز می‌توانند معلق شوند. معلق‌سازی به روش‌های مختلفی انجام می‌گیرد [۱۵]:

۱. *معلق‌سازی به روش آئرودینامیک*

۲. *معلق‌سازی با استفاده از انرژی صوت*

۳. *معلق‌سازی به کمک پرتوهای لیزر*

۴. *معلق‌سازی به روش‌های الکتروستاتیکی*

۵. *معلق‌سازی به روش‌های مغناطیسی*

از آنجایی که سیستم‌های معلق عموما" سیستم‌هایی ناپایدارند لذا مهمترین مساله‌ای که در طراحی این گونه سیستم‌ها مطرح می‌باشد مساله **پایدارسازی** است. یکی از روش‌های معلق‌سازی که امروزه کاربرد بسیار گسترده‌ای در صنعت دارد روش معلق‌سازی مغناطیسی است. سیستم‌های معلق مغناطیسی با توجه به نوع کاربرد به روش‌های مختلف ساخته و مورد آزمایش و استفاده قرار می‌گیرند. در نمونه‌ای آزمایشگاهی همانگونه که در شکل ۱.۰ (ب) نشان داده شده، گوی فلزی در میدان مغناطیسی که از کویل ناشی می‌شود

---

[۱] Suspense

[۲] Maglev

معلق قرار می‌گیرد. [۱۶] [۱] اما به خاطر محدودیت سایز کویل، ارتفاعی که گوی، معلق قرار می‌گیرد بسیار محدود است و از این رو می‌توان گفت گوی فلزی در یک ارتفاع ثابت مورد آزمایش قرار می‌گیرد. جهت فائق آمدن بر این مشکل می‌توان از سیستم‌های دیگری برای نمونه‌های آزمایشگاهی استفاده نمود. سیستمی که در این پروژه مورد بحث و پژوهش قرار می‌گیرد از نوع سیستم‌های معلق *آئرودینامیک* می‌باشد که در آن، گوی توسط نیروی بالا برنده ناشی از جریان هوای دمیده شده الکتروموتور در یک ارتفاع دلخواه معلق قرار می‌گیرد و به طور کلی *ساخت سیستم* ، *طراحی کنترلر فازی* ، *پایدارسازی* و *تحلیل پایداری* آن موضوع بحث این پایان‌نامه است. نمونه ساخته شده چنین سیستمی در شکل ۱.۰(و) نشان داده شده است. سیستم‌های معلق آئرودینامیک در صنعت کاربردهای ویژه‌ای دارند [۱۵]. مثلا" جهت ذوب ذرات سخت نظیر شیشه ، پولاد و نیترید بور و همچنین یاقوت از این روش استفاده می‌شود. در این روش حرارتی با دمای بالای ۲۰۰۰ درجه کلوین که از جت گاز آرگون با فشار حدود یک تور [۲] حاصل می‌شود سبب ذوب ذرات و معلق قرارگرفتن مواد مذاب در جریان گاز جت می‌شود.

اجزای تشکیل‌دهنده نمونه ساخته شده به طور کلی شامل گوی، لوله شفاف پلاستیکی، استند، مدارت الکترونیکی، موتور DC ، سنسور آلتراسونیک، کابل‌های دیتا و پاور و یک دستگاه رایانه می‌باشد. جریان هوای دمیده‌شده ناشی از چرخش فن DC نیرویی بالابر به گوی پلاستیکی اعمال می‌کند. در نتیجه تقابل این نیرو با نیروی گرانش، گوی در لوله به حرکت در می‌آید و با کنترل چرخش فن می‌توان گوی را در ارتفاعی دلخواه معلق نگه‌داشت. سنسور آلتراسونیک که در پایین لوله شفاف پلاستیکی تعبیه شده ارتفاع توپ را اندازه‌گیری می‌کند. پس از مقایسه ارتفاع اندازه‌گیری شده با ورودی مرجع و بررسی *خطا* و *تغییرات خطا* توسط کنترلر، تا زمانی که گوی در ارتفاع مرجع ثابت قرار گیرد، فرامین لازم از طرف کنترلر به فن اعمال می‌شود. نرم‌افزاری که در این پروژه مورد استفاده قرار می‌گیرد نرم‌افزار $MATLAB$ می‌باشد که کلیه محاسبات و کنترل سیستم گوی معلق از طریق این نرم‌افزار انجام خواهد گرفت. تنظیمات کنترلر و مشاهده تغییرات خروجی نیز که همان نمودار وضعیت ارتفاع توپ می‌باشد با طراحی یک GUI ساده مورد بررسی قرار می‌گیرد. این سیستم تاکنون به روش‌های کنترلی پیش‌خور [۱۷]، PID [۱۷]، مدلغزشی [۷]، خطی‌سازی فیدبک [۷] و همچنین فازی با رهیافت ممدانی [۱۷]نیز ساخته شده‌است. روش کنترلی که ما در این پروژه جهت پایدارسازی سیستم گوی معلق ارائه خواهیم‌داد، استفاده از *کنترل‌کننده فازی با رهیافت سوگنو* می‌باشد. مزیت استفاده از منطق فازی در طراحی سیستم‌های

[۱] زمانی که گوی فلزی در میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد به آن نیرویی متناسب با آن میدان وارد می‌شود. میدان مغناطیسی ناشی از کویل نیز با افزایش و یا کاهش جریان عبوری از آن قابل کنترل است. لذا در نتیجه تقابل نیروی گرانش و نیروی مغناطیسی و کنترل جریان عبوری از کویل می‌توان گوی را بطور پایدار معلق ساخت.

[۲] معادل ۱۳۳.۳۲ پاسکال

کنترلی در این است که بر خلاف سایر روش‌های کنترلی، به مدل ریاضی سیستم دینامیکی نیازی نیست. این مزیت زمانی نمود می‌یابد که مدل ریاضی سیستم، پیچیده و یا مبهم باشد. از آنجا که سیستم‌های معلق عموما'' سیستم‌هایی پیچیده می‌باشند، کنترل‌کننده‌های فازی می‌توانند جایگزین خوبی برای سایر روش‌های کنترلی باشند. در سیستم‌های فازی سوگنو با توجه به این‌که تالی قواعد آن بصورت تابعی از متغیرهای ورودی سیستم بیان می‌شود لذا خروجی استنتاج فازی نیز بصورت تابعی از متغیرهای ورودی قابل محاسبه و تحلیل می‌باشد. لذا با مدل‌سازی سیستم گوی معلق و با لحاظ معادله کنترلر در مدل ریاضی سیستم، می‌توان تحت شرایطی با استفاده از قضایای لیاپانوف پایداری سیستم گوی معلق را نیز اثبات نمود. به‌طور کلی مطالب پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم و نگارش شده است:

در **فصل اول** به بیان مفاهیم کاربردی مربوط به مجموعه‌های فازی که اساس منطق فازی می‌باشد خواهیم‌پرداخت. هر چند نظریه مجموعه‌های فازی بسیار گسترده‌تر از مطالب ارائه شده در این فصل می‌باشد به هر حال مطالب این فصل به گونه‌ای انتخاب شده که مفاهیم منطق فازی پایان‌نامه را پوشش‌دهد.

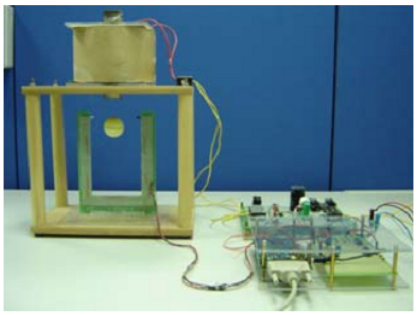
در **فصل دوم** ساختار سیستم گوی معلق فازی (شکل ۱.۰ (و)) را تشریح و همچنین مدارهای الکترونیکی سیستم را تحلیل خواهیم نمود.

در **فصل سوم** روش طراحی کنترل‌کننده فازی که در پایدارسازی سیستم گوی معلق مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم. با توجه به اینکه کنترلر فازی مورد استفاده یک سیستم فازی از نوع سوگنو می‌باشد لذا در این فصل کلیه توجه خود را معطوف طراحی این نوع سیستم فازی نموده‌ایم. در پایان این فصل به بیان روش ایجاد سیستم استنتاج فازی (FIS) در نرم‌افزار *متلب* پرداخته‌ایم و سیستم کنترل فازی خود را در متلب پیاده می‌کنیم و نهایتا'' کنترلر طراحی‌شده را به سیستم گوی معلق اعمال و پایداری سیستم را در نقاط تعادل مختلف نشان خواهیم داد.

و در **فصل چهارم** پایداری سیستم گوی معلق را به کمک قضیه لیاپانوف اثبات می‌نماییم. برای این‌کار ابتدا سیستم را مدل‌سازی نموده و سپس با بررسی شرایط قضیه لیاپانوف، همگرایی مجانبی سیستم دینامیکی به نقطه تعادل در دامنه کارکرد سیستم را اثبات خواهیم نمود.

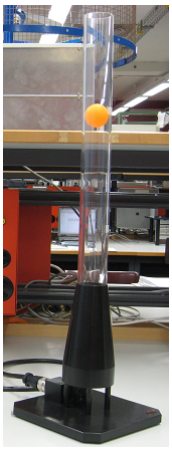
ضمن اینکه در **پیوست آ** کدهای برنامه‌نویسی متلب مربوط به محاسبات پایان‌نامه نظیر معادلات تالی قواعد $IF-THEN$ سیستم فازی با رهیافت سوگنو، واسط گرافیکی و یا همان پانل کنترل سیستم، محاسبه نقطه تعادل سیستم دینامیکی و ... بیان شده‌است.

(آ) سیستم گوی معلق مغناطیسی

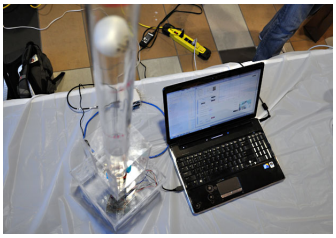


(ب) سیستم گوی معلق مغناطیسی

(ج) سیستم گوی معلق آئرودینامیک



(د) سیستم گوی معلق آئرودینامیک



(ه) سیستم گوی معلق آئرودینامیک

(و) سیستم گوی معلق آئرودینامیک

شکل ۱.۰: نمونه‌های ساخته شده از سیستم‌های گوی معلق

فصل ۱

تئوری مجموعه‌های فازی

مجموعه‌های فازی بنیاد و شالوده منطق فازی محسوب می‌شود و درحقیقت همان توسیع نظریه کلاسیک مجموعه‌ها در علم ریاضیات است. این مفهوم اولین بار توسط پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ میلادی مطرح شد و پس از آن با رشد مفاهیم تئوری فازی، به عنوان یک راه حل جدید برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های پیچیده و فرایندهای تصمیم گیری مطرح گردید و در حقیقت اساس کنترل فازی بنا گردید. در این فصل مفاهیم بنیادی مربوط به مجموعه‌های فازی که مطالب پایان‌نامه را پوشش می‌دهد بیان خواهیم کرد و علاقمندان می‌توانند جهت بررسی و مطالعه بیشتر به منابع [۱] [۸] [۱۰] [۱۱] [۱۲] رجوع نمایند.

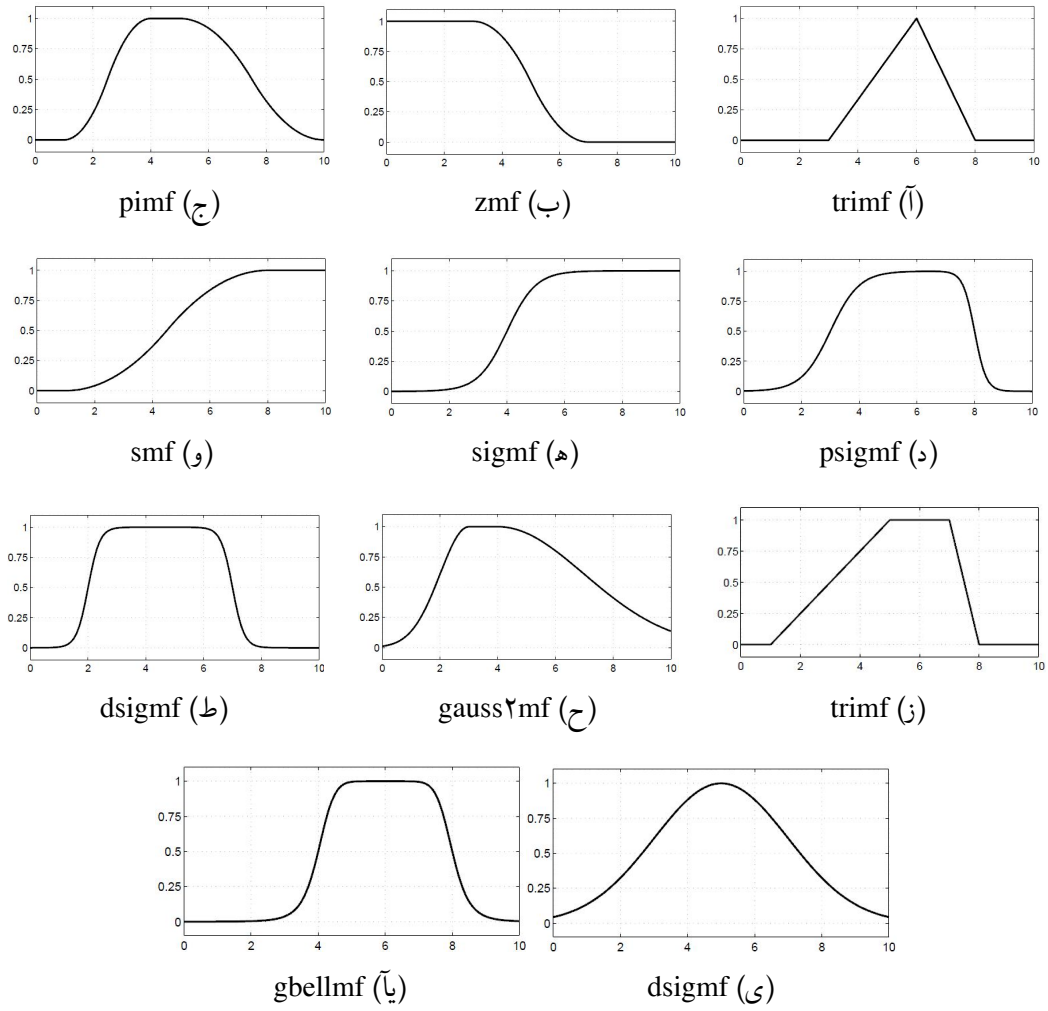
۱.۱ مفاهیم پایه

• ***مجموعه فازی*** [۱] مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی X مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بصورت

$$\tilde{A} = \{(x, A(x))|x \in X\}$$

می‌باشد که در آن X مجموعه مرجع و $A(x)$ تابع عضویت و یا درجه عضویت x به مجموعه $\tilde{A}$ می‌باشد و تابعی از X به روی $[0, \infty)$ می‌باشد . در صورتی‌که $\sup_{x \in X} A(x) = 1$ باشد ، به مجموعه

[۱] Fuzzy Set



شکل ۱.۱: توابع عضویت جعبه‌ابزار فازی متلب

فازی $\tilde{A}$ مجموعه فازی *نرمال* [۱] می‌گوییم.[۲]

نزدیکی مقدار تابع عضویت $A(x)$ به عدد یک نشان‌دهنده تعلق بیشتر و نزدیکی آن به مقدار صفر نشان‌دهنده تعلق کمتر x به $A(x)$ می‌باشد. با توجه به نوع کاربرد ، از توابع مختلفی می‌توان جهت تابع عضویت استفاده نمود. شکل ۱.۱ نمودار توابع عضویتی است که در جعبه‌ابزار فازی نرم‌افزار متلب مورد استفاده قرار می‌گیرد و در طراحی سیستم‌های فازی بیشترین کاربرد را دارد.

[۱] Normal Fuzzy set

[۲] در ادامه منظور ما از مجموعه فازی ، همان مجموعه فازی نرمال خواهدبود.

- ***تکیه‌گاه مجموعه فازی*** [۱] و یا $S(\tilde{A})$ عبارتست از مجموعه همه نقاط مجموعه مرجع بطوریکه تابع عضویت آن‌ها مثبت باشد .

- **برش-α مجموعه فازی** [۲] عبارتست از مجموعه همه نقاطی از مجموعه مرجع بطوریکه تابع عضویت آن‌ها بزرگ‌تر از α باشد.

- ***مجموعه فازی محدب*** [۳] مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب گفته می‌شود در صورتی‌که برای هر دو عضو دلخواه آن مثل $(x_1, A(x_1))$و $(x_2, A(x_2))$ داشته باشیم:

$$A\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \min\left\{A(x_1), A(x_2)\right\} \quad , x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1]\,.$$

به عبارت دیگر مجموعه $\tilde{A}$ محدب است در صورتی‌که تمامی مجموعه‌های برش- α آن محدب باشند.

- ***زیر مجموعه فازی*** [۴] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی روی مجموعه مرجع X باشند و توابع عضویت آن‌ها به ترتیب $A(x)$ و $B(x)$ باشد. می‌گوییم مجموعه فازی $\tilde{A}$ زیرمجموعه‌ی مجموعه فازی $\tilde{B}$ است و یا $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ در صورتی‌که $\forall x \in X$، $A(x) \leqslant B(x)$.

- ***مکمل مجموعه فازی*** [۵] مکمل مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، مجموعه فازی $\overline{\tilde{A}}$ با تابع عضویت

$$\overline{A}(x) = 1 - A(x)$$

و با مجموعه مرجع X می‌باشد.

- ***اشتراک دو مجموعه فازی*** [۶] اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و$\tilde{B}$ که آن را با $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ نمایش می‌دهیم، یک مجموعه فازی است که تابع عضویت آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(x) = \min\{A(x), B(x)\} = A(x) \wedge B(x), \quad x \in X$$

البته ما در اینجا برای تابع عضویت اشتراک دو مجموعه فازی از عملگر $\min(\wedge)$ استفاده نمودیم. ولی در حالت کلی می‌توان از عملگرهایی استفاده نمود که به کلاس $t-$***نرم‌ها*** تعلق داشته‌باشند.

- $t-$***نرم‌ها*** [۷] توابعی دو مقداری روی $[0, 1] \times [0, 1]$ می‌باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

---

[۱] Support of a fuzzy set
[۲] $\alpha - cut$
[۳] Convex fuzzy set
[۴] Fuzzy subset
[۵] Fuzzy complement
[۶] Fuzzy Intersection
[۷] t-norms

۱. $x \in X,\ t(A(x), ۱) = t(۱, A(x)) = A(x),\ t(۰, ۰) = ۰$

۲. $t(A(x), B(x)) \leq t(C(x), D(x))$ اگر $A(x) \leq B(x)$ و $C(x) \leq D(x)$

۳. $t(A(x), B(x)) = t(B(x), A(x))$

۴. $t(A(x), t(B(x), C(x))) = t(t(A(x), B(x)), C(x))$

• ***اجتماع دو مجموعه فازی*** [۱] اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ که آن را با $\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ نمایش می‌دهیم، یک مجموعه فازی است که تابع عضویت آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(x) = \max\{A(x), B(x)\} = A(x) \vee B(x), \quad x \in X.$$

در اینجا نیز برای تابع عضویت اجتماع دو مجموعه فازی از عملگر$\max(\vee)$ استفاده نمودیم. ولی در حالت کلی می‌توان از عملگرهایی استفاده نمود که به کلاس $s-$***نرم‌ها*** تعلق داشته باشند.

•$s-$***نرم‌ها*** [۲] توابعی دو مقداری از $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ به روی $[۰, ۱]$ می‌باشند و در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. $x \in X,\ s(A(x), ۰) = s(۰, A(x)) = A(x),\ s(۱, ۱) = ۱$

۲. $s(A(x), B(x)) \leq s(C(x), D(x))$ اگر $B(x) \leq D(x)$ و $A(x) \leq C(x)$

۳. $s(A(x), B(x)) = s(B(x), A(x))$

۴. $s(A(x), s(B(x), C(x))) = s(s(A(x), B(x)), C(x))$

• ***رابطه فازی*** [۳] فرض کنید $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌های مرجع باشند. مجموعه فازی

$$\tilde{R} = \{[(x, y), R(x, y)] | (x, y) \in X \times Y\}$$

رابطه فازی روی $X \times Y$ نامیده می‌شود.

• ***اجتماع و اشتراک دو رابطه فازی*** [۴] فرض کنید $\tilde{R}$ و $\tilde{Z}$ دو رابطه فازی به روی $X \times Y$ و $Y \times Z$ باشند. اجتماع و اشتراک این دو مجموعه را که بصورت $\tilde{S} = \tilde{R} \cup \tilde{Z}$ و $\tilde{T} = \tilde{R} \cap \tilde{Z}$ نمایش

[۱] Fuzzy union
[۲] s-norms
[۳] Fuzzy relation
[۴] Union-Intersection of fuzzy relations

می‌دهیم ، مجموعه‌ای فازی است که توابع عضویت آن‌ها بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S(x,y) = \max\{R(x,y), Z(x,y)\}, \quad (x,y) \in X \times Y$$
$$T(x,y) = \min\{R(x,y), Z(x,y)\}, \quad (x,y) \in X \times Y.$$

- ***تصویر اول و تصویر دوم یک رابطه فازی*** [۱] فرض کنید $\tilde{R} = \{[(x,y), R(x,y)] | \ (x,y) \in X \times Y\}$ یک رابطه فازی باشد. تصاویر اول و دوم مجموعه فازی $\tilde{R}$ را به ترتیب با $\tilde{R}_۱$ و $\tilde{R}_۲$ نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{R}_۱ = \left\{ [x, \bigvee_{y \in Y} \tilde{R}_۱(x,y)] \mid (x,y) \in X \times Y \right\}$$
$$\tilde{R}_۲ = \left\{ [y, \bigvee_{x \in X} \tilde{R}_۱(x,y)] \mid (x,y) \in X \times Y \right\}.$$

- ***ترکیب*** $\max - \min$ ***دو رابطه فازی*** [۲] فرض کنید $\tilde{R}$ و $\tilde{Z}$ دو رابطه فازی به روی $X \times Y$ و $Y \times Z$ باشند. ترکیب $\max - \min$ دو رابطه فازی فوق یک رابطه فازی به روی مجموعه $X \times Z$ می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R} \circ \tilde{Z} = \left\{ [(x,z), \bigvee_{y \in Y} \{R(x,y) \wedge Z(y,z)\}] \mid x \in X, y \in Y, z \in Z \right\}.$$

- ***متغیرهای زبانی- مقادیر زبانی*** [۳] یکی از ابزارهایی که در منطق فازی و استدلال تقریبی مورد استفاده قرار می‌گیرد استفاده از *متغیرهای زبانی* و *مقادیر زبانی* می‌باشد. یک متغیر زبانی با پنج‌تایی $\left(x, T(x), U, G, \tilde{M}\right)$ نمایش داده می‌شود که در آن x نام متغیر، $T(x)$ مجموعه مقادیر زبانی x روی مجموعه مرجع U می‌باشند. G مجموعه قواعد نحوی جهت ساخت مجموعه $T(x)$ می‌باشد. $\tilde{M}$ نیز مجموعه همه توابع عضویت مربوط به مقادیر زبانی x می‌باشد.

به عنوان مثال فرض کنیم x متغیر زبانی با برچسب "Age" با $U = [۰, ۱۰۰]$ باشد. $T(x)$ می‌تواند بصورت زیر تعریف شود:

$$T(x) = \{Old, VeryOld, NotSoOld, MorOrLessYoung, QuitYoung, VeryYoung\}$$

ضمن اینکه مجموعه $\tilde{M}(old)$ نیز یکی از اعضای $\tilde{M}$ می‌باشد:

$$\tilde{M}(old) = \{(u, O(u)) | u \in [۰, ۱۰۰]\}$$

[۱] First projection of a fuzzy relation
[۲] Max-Min combination of fuzzy relations
[۳] Linguestic variable - Linguetic values

در اینجا تابع $O(u)$ تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{M}$ می‌باشد. مجموعه $G(x)$ نیز روند ساخت مقادیر زبانی را نشان می‌دهد.

- ***مدل‌های زبانی*** [۱] یکی از ابزارهای اصلی در تئوری سیستم‌های فازی می‌باشد که اولین بار توسط پرفسور لطفی‌زاده مطرح شد. مدل‌های زبانی گزاره‌هایی می‌باشند که بر اساس تجربه و اطلاعات کارشناس خبره، سیستم‌های پیچیده را بطور زبانی و با ترکیب قواعد فازی **IF-THEN** توصیف می‌کنند.

به عنوان مثال در یک سیستم تک‌ورودی - تک‌خروجی، مدل زبانی که ویژگی‌های سیستم را توصیف می‌کند می‌تواند با مجموعه‌ای از قواعد **IF-THEN** به فرم زیر بیان شود:

$$\textbf{IF} \quad U \ is \ B_1 \quad \textbf{THEN} \quad V \ is \ D_1$$

ALSO

$$\vdots \ \vdots$$

ALSO

$$\textbf{IF} \quad U \ is \ B_m \quad \textbf{THEN} \quad V \ is \ D_m$$

در مدل زبانی فوق U متغیر ورودی است و V متغیر خروجی می‌باشد و در حقیقت همان *متغیرهای زبانی* می‌باشند. B_i ها و D_i ها زیرمجموعه‌های فازی روی مجموعه‌های X و Y می‌باشند و به عنوان *مقادیر زبانی* متغیرهای U و V می‌باشند. توابع عضویت B_i ها و D_i ها را نیز به ترتیب بصورت $B_i(x)$ و $D_i(x)$ نشان می‌دهیم. گزاره سمت چپ قوانین فوق را *مقدم* و گزاره سمت راست را *تالی* می‌گوییم.

- ***استنتاج با مدل‌های زبانی*** [۲] و یا *استدلال تقریبی* [۳] ، استدلال با گزاره های مبهم بر اساس تئوری مجموعه‌های فازی می‌باشد.

جهت روشن‌ساختن موضوع، مکانیسم بنیادی روش استدلال با مدل‌های زبانی و با در نظر گرفتن سیستم فازی با یک قاعده را توصیف خواهیم کرد. در بخش‌های آتی از تعمیم این روش جهت استنتاج سیستم‌های فازی استفاده خواهیم نمود. بر اساس استدلال تقریبی یک قاعده

$$\textbf{IF} \quad U \ is \ B \quad \textbf{THEN} \quad V \ is \ D \qquad (۱.۱)$$

[۱] Linguestic model
[۲] Inference with fuzzy models
[۳] Approximate reasoning

را می‌توان به عنوان گزاره فازی R در نظر گرفت که تابع عضویت آن روی $\mathbf{X} \times Y$ تعریف می‌شود. فرض کنیم گزاره فازی $\boxed{U \ is \ A}$ داده شده است. با ترکیب این گزاره با گزاره (۱.۱)، مجموعه فازی G بدست می‌آید :

$$G = A \cap R.$$

مجموعه G نیز یک مجموعه فازی است که روی فضای $X \times Y$ تعریف می‌شود و تابع عضویت آن بصورت زیر می‌باشد:

$$G(x,y) = A(x) \ \wedge \ R(x,y).$$

اکنون با بدست آوردن تصویر اول مجموعه فازی G ، گزاره $\boxed{V \ is F}$ که نتیجه استنتاج فازی بر مبنای استدلال تقریبی است، حاصل می‌شود و در آن F یک زیر مجموعه فازی روی Y می‌باشد که تابع عضویت آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$F(y) = \bigvee_{x \in X} [G(x,y)] = \bigvee_{x \in X} [A(x) \ \wedge R(x,y)]$$

ضمن اینکه تمامی روابط یاد شده فوق را می‌توان به فرم فشرده ترکیب $\max - \min$ دو رابطه فازی R و A نوشت:

$$F = A \circ R.$$

۲.۱ سیستم‌های فازی

سیستم‌های فازی سیستم‌هایی هستند که با استفاده از فرایند استدلال فازی، ورودی کریسپ[۱] را به خروجی کریسپ تبدیل می‌کنند. می‌توان نشان داد که سیستم فازی با n ورودی و m خروجی معادل m سیستم فازی می‌باشد. قسمت‌های اصلی یک سیستم فازی شامل *فازی‌سازی*[۲] و *استنتاج*[۳] و *نافازی‌سازی*[۴] می‌باشد. در مرحله فازی‌سازی ورودی کریسپ به محموعه فازی تبدیل می‌شود. مرحله استنتاج نیز همان توسیع استنتاج با مدل‌های زبانی می‌باشد که در بخش بعدی توضیح داده خواهد شد و نهایتا'' در مرحله نافازی‌سازی ، از مجموعه فازی حاصل از استنتاج فازی خروجی کریسپ حاصل می‌شود. حال با توجه به اینکه بخش *تالی* قواعد **IF-THEN** ، مجموعه فازی باشد و یا تابعی بر حسب متغیرهای ورودی

[۱] Crisp
[۲] Fuzzification
[۳] Inference Mechanism
[۴] Defuzzification