دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده‌ی علوم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضی محض – آنالیز

موضوع:

فضاهای متریک مخروطی مرتب و نتایجی از نقاط ثابت

نگارش:

لیلا عبداله‌یی

استاد راهنما:

دکتر سید هاشم پروانه مسیحا

استاد مشاور:

دکتر کوروش نوروزی

تقدیم به

مادر مهربانم و پدر عزیزم

که از نگاهشان صلابت، از رفتارشان محبت و از صبرشان ایستادگی را آموختم.

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

... پس در فراگیری علم و دانش پیش از آن‌که درختش بخشکد تلاش کنید و پیش از آن که به خود مشغول گردید از معدن علوم دانش استخراج کنید. چراغ دل را از نور گفتار گوینده‌ی با عمل روشن سازید و ظرف‌های جان را از آب زلال چشمه هایی که از آلودگی‌ها پاک است پر نمایید.

امام علی (ع)

قبل از هر چیز وظیفه‌ی خود می‌دانم که‌سپاس صمیمانه‌ام را تقدیم پدر عزیز و مادر مهربانم نمایم که همواره و بی دریغ مرا مرهون راهنمایی‌ها و الطافشان قرار دادند .

همچنین، از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر سید هاشم پروانه مسیحا که کمک‌های فراوانی در جهت پیشبرد این پایان نامه به بنده نمودند و نیزاستاد مشاور بزرگوارم، جناب آقای دکتر کوروش نوروزی کمال تشکر و سپاس را دارم.

در پایان، تقدیر بسیار از تذکرها و راهنمایی‌های سودمند دوستان عزیزم می‌نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به معرفی مخروط‌ها در فضای نرم‌دار پرداخته و مخروط‌های منظم و نرمال و رابطه‌ی بین آن‌ها را بررسی می‌کنیم. سپس، فضاهای متریک مخروطی را مورد مطالعه قرار داده و با معرفی یک ترتیب جزیی روی این فضاها قضیه ی کاریستی را بیان می‌نماییم. همچنین، قضایای نقطه ثابت را برای نگاشت‌های انقباضی، تک‌مقداری و چندمقداری روی فضای متریک مخروطی مرتب جزیی اثبات می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مخروط؛ فضای متریک مخروطی؛ نقطه‌ی ثابت؛ ترتیب جزیی؛ نگاشت انقباضی؛ به طور ضعیف صعودی.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

آنالیز غیرمحدب به خصوص روی فضاهای نرم‌دار مرتب و مخروط های نرمال و تابع‌های موضعی، کاربردهای بسیاری در نظریه‌ی بهینه سازی دارند.

در سال ۱۹۷۴، براندِاستید[۱] به اثبات قضیه‌های نقطه‌ی ثابت برای نگاشت‌های نانزولی در فضاهای متریک معمولی پرداخت. نیز در سال ۱۹۹۹، [۲] با ارایه‌ی چند تعریف جدید قضایای نقطه‌ی ثابت مشترک را برای نگاشت‌های به‌طور ضعیف صعودی در فضاهای متریک معمولی بیان نمود و چند سال بعد به همراه اُرِگان[۳] و آگاروال [۴]، این قضیه‌ها را روی نگاشت‌های چندمقداری بررسی کردند.

در سال ۲۰۰۷، هوآنگ[۵] و ژانگ[۶] با توجه به کارهای صورت گرفته از قبل، برای اولین بار با جایگزین کردن یک فضای باناخ مرتب به جای اعداد حقیقی، فضای متریک مخروطی را معرفی نموده و به اثبات قضیه‌های نقطه‌ی ثابت روی نگاشت‌های انقباضی پرداختند. بعد از آن رضاپور [۷] و حمل‌بَرانی[۸] توپولوژی روی این فضاها را مطالعه کردند و این قضایا را تعمیم دادند. پس از آن عبدالجواد [۹] و کاراپینار[۱۰] قضیه‌ی کاریستی را روی فضاهای متریک مخروطی بیان کردند. بالاخره

[۱] Brondsted
[۲] Dhage
[۳] OŔegan
[۴] Agarwal
[۵] Huang
[۶] Zhang
[۷] Rezapour
[۸] Hamlbarani
[۹] Abdeljawad
[۱۰] Karapinar

آلتن[11] و راکوویچ [12] این قضایا را در فضای متریک مخروطی مرتب جزیی مورد مطالعه قرار دادند.

متذکر می‌شویم، شماره‌هایی که در مقابل قضیه‌ها و تعاریف و ...،در متن پایان نامه در داخل قلاب آمده است، شماره‌ی مراجعی هستند که این مطالب از آن‌ها گرفته شده‌اند. نیز در جاهایی از این پایان نامه برای اختصار از نماد fx به جای $f(x)$، استفاده شده است و نیز منظور از روابط $x \geq y$ و $x \gg y$، همان $y \leq x$ و $y \ll x$ می باشد.

در پایان لازم به یادآوری است با تمام تلاشی که انجام شده، این پایان نامه خالی از اشکال نیست. اما امید دارم که مورد استفاده‌ی دوستداران ریاضی واقع شود.

لیلا عبداله‌یی
دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

---

[11] Altun
[12] Rakoćević

فصل ۱

مخروط‌ها در فضاهای نرم‌دار

در این بخش، مخروط‌ها را معرفی نموده و به ویژگی‌های رابطه‌ی ترتیب جزیی‌ای که روی فضا القا می‌کنند، می‌پردازیم. در این پایان‌نامه E همواره یک فضای باناخ است مگر این که خلاف آن ذکر شود.

۱.۱ مخروط ها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی و $P \subseteq E$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی P، مخروط نامیده می‌شود هرگاه

(P1) P بسته و ناتهی بوده و $P \neq \{0\}$؛

(P2) به ازای هر دو اسکالر $a, b \geq 0$ و هر $x, y \in P$ داشته باشیم $ax + by \in P$؛

(P3) اگر $x \in P$ و $-x \in P$، آن‌گاه $x = 0$.

به کمک مخروط P، می توان یک رابطه‌ی ترتیب جزیی روی E تعریف نمود.

فرض کنید مخروط $P \subseteq E$، داده شده است، رابطه‌ی " $\leq$ " روی E را به این صورت تعریف می کنیم:

$$\forall x, y \in E : x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

چون " $\leq$ " خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدی را دارد، بنابراین رابطه $(\leq)$ یک رابطه‌ی ترتیب جزیی روی E است و E به یک مجموعه‌ی مرتب جزیی تبدیل می‌شود. همچنین $x < y$ هرگاه $x \leq y$ و $x \neq y$ و نیز $x \ll y$، هرگاه $y - x \in P^\circ$، که P° درون P می‌باشد.

مثال ۲.۱.۱ به ازای هر $n \geq ۱$، مجموعه‌ی

$$P = \{(x_۱, \ldots, x_n) : x_۱, \ldots, x_n \geq \circ\}$$

یک مخروط در $E = \mathbb{R}^n$، تعریف می کند.

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید $E = \mathbb{R}^n$، برای $i = ۱, \ldots, n$ قراردهید:

$$P_i = \Big\{(x_۱, \ldots, x_n); x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x_{i+۱}, \ldots, x_n = \circ, x_i \geq \circ\Big\}$$

در این صورت به ازای هر i، P_i یک مخروط در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کند.

مثال ۴.۱.۱ فرض کنید x عضوی ناصفر در E باشد، در این صورت مجموعه‌ی $P = \{ax : \ a \geq \circ\}$ یک مخروط در E می‌باشد.

مثال ۵.۱.۱ فرض کنید $E = C[\circ, ۱]$. در این صورت E با نرم سوپریمم؛ یعنی،

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [\circ, ۱]} |f(t)| \ \ ; \ (f \in E)$$

یک فضای باناخ حقیقی است و $P = \{f \in E : \ f \geq \circ\}$ یک مخروط در این فضا می‌باشد.

در ادامه چند لم مقدماتی و مهم را در مورد مخروط‌ها بیان می‌کنیم.

لم ۶.۱.۱ [۲۸] برای هر مخروط P گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) $P + P^\circ \subseteq P^\circ$.

(۲) $P^\circ + P^\circ \subseteq P^\circ$.

(۳) به ازای هر $a > 0$، $aP^\circ \subseteq P^\circ$.

برهان. (۱) فرض کنید $c \in P^\circ$ و $x \in P$. در این صورت $r > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $N_r(c) \subseteq P$. اگر $y \in N_r(c+x)$، آن‌گاه از این‌که $\|y-(c+x)\| < r$، داریم $\|y-x-c\| < r$. پس $y-x \in N_r(c) \subseteq P$؛ یعنی، $y-x \in P$. بنابراین طبق خاصیت $P2$ مخروط‌ها، $y \in P$. از این رو $N_r(x+c) \subseteq P$. پس $c+x \in P^\circ$.

(۲) بنابر (۱) بدیهی است.

(۳) فرض کنید $c \in P^\circ$. در این صورت $r > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $N_r(c) \subseteq P$. اگر $y \in N_{ar}(ac)$، آن‌گاه $\|y-ac\| < ar$ و لذا $a^{-1}y \in P$. چون $a > 0$، طبق خاصیت $P2$، $y = aa^{-1}y \in P$. از این رو $ac \in P^\circ$. ○

لم ۷.۱.۱ (خاصیت ارشمیدسی) [۳۰] اگر $c \in P^\circ - \{0\}$ و $x \in E$، آن‌گاه عدد صحیح مثبت n وجود دارد به‌طوری‌که $x \ll nc$.

برهان. چون $c \in P^\circ$، پس $r > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $N_r(c) \subseteq P$ و چون هر همسایگی باز است، $N_r(c) \subseteq P^\circ$. بنابراین $c + N_r(0) \subseteq P^\circ$. از طرفی، می‌توان عدد صحیح مثبت n را طوری یافت که x و در نتیجه $-x$ عضوی از $nN_r(0)$ باشند. از این رو $nc - x \in nP^\circ \subseteq P^\circ$، یا به‌طور معادل، $x \ll nc$. ○

لم ۸.۱.۱ [۱۸] فرض کنید $P^\circ \neq \emptyset$ و $x, y, z \in E$. در این صورت،

(۱) اگر به ازای هر $c \in P^\circ$ داشته‌باشیم $0 \leq x \ll c$، آن‌گاه $x = 0$.

(۲) اگر به ازای هر $c \in P^\circ$ داشته‌باشیم $x \leq y + c$، آن‌گاه $x \leq y$.

(۳) اگر $x \leq y$ و $y \ll z$، آن گاه $x \ll z$.

(۴) اگر $\circ \leq x \leq y$ و $a \geq \circ$ آن گاه $\circ \leq ax \leq ay$.

(۵) اگر برای $n \in N$، داشته باشیم $\circ \leq x_n \leq y_n$ و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب همگرا به x و y باشند، آن‌گاه، $\circ \leq x \leq y$.

(٦) اگر P مخروطی در فضای باناخ E باشد، $a \in P$ و $\circ < \lambda < ۱$ به‌طوری‌که $a \leq \lambda a$، آن‌گاه $a = \circ$.

(۷)برای هر $\delta > \circ$ و $x \in P^\circ$، $\circ < \gamma < ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|\gamma x\| < \delta$.

(۸) برای هر $c_۱ \gg \circ$ و $c_۲ \in P^\circ$، عضو $d \gg \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $c_۱ \ll d$ و $c_۲ \ll d$.

(۹)برای هر $c_۱ \gg \circ$ و $c_۲ \gg \circ$، عضو $e \gg \circ$ وجو دارد به‌طوری‌که $e \ll c_۱$ و $e \ll c_۲$.

برهان. (۱) چون $P^\circ \neq \emptyset$، پس می‌توان $c \in E$ را با شرط $c \gg \circ$ انتخاب کرد. بنابر لم ٦.۱.۱ به ازای هر $n \geq ۱$، $\frac{c}{n} \in P^\circ$. از طرفی طبق فرض، به ازای هر $n \geq ۱$، $\frac{c}{n} - x \in P^\circ \subseteq P$. چون P بسته است، پس $-x = \lim_{n\to\infty}(\frac{c}{n} - x) \in P$ و چون x مثبت است، خاصیت $P۳$، نتیجه می‌دهد که $x = \circ$.

(۲) به ازای c پیداشده در برهان قسمت (۱) و طبق فرض، برای هر $n \geq ۱$، $\frac{c}{n} + y - x \in P$. چون P بسته است،

$$y - x = \lim_{n\to\infty}(\frac{c}{n} + y - x) \in P.$$

در نتیجه $x \leq y$.

(۳) طبق فرض $y - x \in P$ و $z - y \in P^\circ$. پس $r > \circ$ وجود دارد به طوری که $N_r(z-y) \subseteq P$. نشان می‌دهیم $N_r(z-x) \subseteq P$. فرض کنید $u \in N_r(z-x)$. در این صورت u را می‌توان به شکل

$$u = (y - x) + (u - (y - x))$$

نوشت. به روشنی دیده می‌شود که $u - (y-x) \in N_r(z-y) \subseteq P$. چون $y - x \in P$، طبق خاصیت $P۲$، $u \in P$. بنابراین $z - x \in P^\circ$، یا به‌طور معادل، $x \ll z$.

(۴) چون طبق فرض داریم $x \leq y$، پس نتیجه می‌گیریم که $y - x \in P$. و چون $a \geq ۰$، پس $ay - ax \in P$. در نتیجه $ay \leq ax$.

(۵) طبق فرض $\{y_n - x_n\}$ دنباله‌ای در P است و چون P بسته می‌باشد، پس حد آن ؛ یعنی، $y - x$ نیز عضوی از P است. بنابراین $x \leq y$.

(٦) چون $a \leq \lambda a$، پس $(\lambda - ۱)a \in P$. و از این‌که $\lambda < ۱$، پس $-a = \frac{۱}{۱-\lambda}(\lambda - ۱)a \in P$. بنابراین طبق خاصیت $P۳$، $a = ۰$. (۷) فرض کنید $\delta > ۰$ و $x \in P^\circ$. عدد طبیعی $n > ۱$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{\delta}{n\|x\|} < ۱$. قرار می‌دهیم، $\gamma = \frac{\delta}{n\|x\|} < ۱$. در این صورت $\|\gamma x\| < \delta$.

(۸) $\delta > ۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $c_۱ + N_\delta(۰) \subseteq P^\circ$. که $N_\delta(۰) = \{y \in E : \ \|y\| < \delta\}$ می‌باشد. می‌توان $m > ۱$ را طوری انتخاب کنیم که $c_۲ \in mN_\delta(۰)$. بنابراین $-c_۲ \in mN_\delta(۰)$. پس $mc_۱ - c_۲ \in P^\circ$. حال اگر قرار دهیم $d = mc_۱$، آن‌گاه حکم اثبات می‌شود.

(۹) اثبات مشابه قسمت (۸) می باشد، فقط کافی است $d = \frac{۱}{m}c_۲$. ○

گزاره‌ی ۹.۱.۱ فرض کنید $x \in E$ و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد به‌طوری‌که $x_n \to x$. در این صورت، اگر $\{x_n\} \subseteq P$ و $x = ۰$، آن‌گاه برای هر $c \in P^\circ - \{۰\}$ عدد صحیح $N > ۰$ وجود دارد به طوری‌که رابطه‌ی $x_n \ll c$ به ازای هر $n \geq N$ برقرار است.

برهان. فرض کنید $x = ۰$ و $c \in P^\circ - \{۰\}$ داده شده‌باشند. $r > ۰$ را طوری اختیار کنید که $N_r(c) \subseteq P$. در این صورت طبق خاصیت ارشمیدسی عدد حقیقی، $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\|c\| < m \cdot \frac{r}{۳}$. از طرفی، چون $x_n \to ۰$، پس عدد صحیح مثبتی مانند N هست به‌طوری‌که

$$\|x_n\| < \frac{۱}{m} \cdot \|c\| < \frac{r}{۳} \qquad (n \geq N).$$

نشان می‌دهیم به ازای هر $n \geq N$، $N_{\frac{r}{۳}}(c - x_n) \subseteq P$. فرض کنید $n \geq N$ و $z \in N_{\frac{r}{۳}}(c - x_n)$. در این صورت،

$$\|z - x_n - c\| \leq \|z - (c - x_n)\| + ۲\|x_n\| < \frac{r}{۳} + \frac{۲r}{۳} = r.$$

پس $z - x_n \in P$ و چون $x_n \in P$، در نتیجه $z \in P$. بنابراین برای هر $n \geq N$، $c - x_n \in P^\circ$، یا به‌طور معادل، $x_n \ll c$. ○

۲.۱ مخروط های منظم و نرمال

در این بخش به معرفی مخروط‌های منظم و نرمال و خواص آن‌ها می پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱ مخروط P در E را منظم گوییم هرگاه هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کران‌دار در E همگرا باشد؛ یعنی، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد به‌طوری‌که به ازای یک $y \in E$ داشته‌باشیم $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq y$، آن‌گاه بتوان $x \in E$ را یافت به‌طوری‌که $x_n \to x$.

یا به‌طور معادل مخروط P، منظم است اگر و فقط‌اگر هر دنباله‌ی نزولی و از پایین کران‌دار در E، همگرا باشد. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی در E باشد که از پایین به $y \in E$ کران‌دار است، آن گاه $\{-x_n\}$ در E صعودی و از بالا به $-y$ کران‌دار می‌باشد و چون P منظم است، $x \in E$ وجود دارد به‌طوری‌که $-x_n \to x$. بنابراین $\{x_n\}$ به $-x \in E$ همگرا می‌باشد.اثبات طرف دیگر نیز به همین نحو است.

تعریف ۲.۲.۱ [۱۹]مخروط P را نرمال گوییم هرگاه

$$\inf\{\|x+y\| : x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1\} > 0 \qquad (1)$$

به طورمعادل مخروط P نرمال است، اگر عدد حقیقی و مثبت M وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in E$ که $0 \leq x \leq y$ داشته باشیم،

$$\|x\| \leq M\|y\| \qquad (2)$$

اینفیمم Mهایی را که در (۲) صدق می‌کنند، ثابت نرمال P نامیم. مخروط P، را غیرنرمال گوییم اگر و تنها اگر دنباله‌های $\{x_n\}, \{y_n\} \subset E$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که: $0 \leq x_n \leq x_n + y_n$ و $x_n + y_n \to 0$ ولی $x_n \nrightarrow 0$.

حال نشان می‌دهیم که برای مخروط P، عبارت‌های (۱) و (۲)، معادل‌اند:

($1 \Rightarrow 2$) قرار دهید:

$$A = \{\|x+y\| : x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1\} > 0$$

در این صورت $\inf A$، موجود و نامنفی است و این مقدار را با a نشان می‌دهیم. فرض کنید M ثابت نرمال P باشد. اگر $a = ۰$، آن گاه می‌توان دنباله‌هایی چون $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ را در P پیدا کرد به‌طوری‌که به ازای هر $n \geq ۱$، $\|x_n\| = \|y_n\| = ۱$ و $\|x_n + y_n\| < \frac{۱}{n}$. به وضوح رابطه‌ی $۰ \leq x_n \leq x_n + y_n$ برای هر $n \geq ۱$ برقرار است و با توجه به (۲) داریم،

$$۱ = \|x_n\| \leq M\|x_n + y_n\| < \frac{M}{n} \qquad (n \geq ۱).$$

بنابراین $M > n$ و این یک تناقض است، زیرا نشان می‌دهد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی از بالا کران‌دار می‌باشد.

(۲ $\Rightarrow$ ۱) ابتدا نشان می دهیم اگر (۱) برقرار باشد، آن‌گاه،

$$\inf\Big\{\frac{\|x+y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} :\ x,y \in P,\ x,y \neq ۰\Big\} > ۰. \tag{۳}$$

قرار دهید:

$$B = \Big\{\frac{\|x+y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} :\ x,y \in P,\ x,y \neq ۰\Big\}$$

مشاهده می‌کنیم که $\inf B$ موجود و نامنفی می‌باشد و آن را با b نشان می دهیم. اگر $a > ۰$ و x و y دو عضو ناصفر P باشند، آن‌گاه بدون کم شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $\|x\| = ۱$ و $\|y\| \leq ۱$. در این صورت،

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \Big\|x + \frac{y}{\|y\|} - \frac{۱ - \|y\|}{\|y\|} \cdot y\Big\| \\ &\geq \Big\|x + \frac{y}{\|y\|}\Big\| - ۱ + \|y\| \\ &\geq a - ۱ + \|y\| \\ &\geq a - \|x+y\|. \end{aligned}$$

بنابراین $\|x+y\| \geq \frac{a}{۲} = \frac{a}{۲}\max\{\|x\|,\|y\|\}$. لذا $\frac{a}{۲}$ یک کران پایین برای B است و $b \geq \frac{a}{۲} > ۰$. پس از (۱)، به (۳) رسیدیم. حال نشان می‌دهیم که (۳)، (۲) را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $b > ۰$، ولی رابطه‌ی (۲)، برقرار نباشد. در این صورت دنباله‌هایی مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در P وجود دارند به

طوری‌که به ازای هر $n \geq ۱$، $x_n \leq y_n$ ولی $\|x_n\| > n\|y_n\|$. به روشنی دیده می‌شود که این دو دنباله جملات صفر ندارند. حال قرار دهید،

$$u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{n\|y_n\|}, \quad v_n = -\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{n\|y_n\|} \qquad (n \geq ۱).$$

در این صورت $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ دنباله‌هایی در P می‌باشند که به ازای هر $n \geq ۱$، $\|u_n\| \geq ۱ - \frac{۱}{n}$ و $\|v_n\| \geq ۱ - \frac{۱}{n}$. حال داریم،

$$\frac{۲}{n} = \|u_n + v_n\| \geq b(۱ - \frac{۱}{n}) > ۰ \qquad (n \geq ۱).$$

هرگاه $n \to \infty$، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $b = ۰$ و این یک تناقض است.

گزاره‌ی ۳.۲.۱ [۲۸] هیچ مخروط نرمالی با ثابت نرمال کمتر از ۱ وجود ندارد.

برهان. فرض کنید P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال M باشد. عضو ناصفر x را طبق $P۲$ از تعریف مخروط، در P اختیار کنید. در این صورت، چون $۰ \leq x \leq x$، پس $\|x\| \leq M\|x\|$. بنابراین، $M \geq ۱$. ○

قضیه‌ی ۴.۲.۱ [۲۸] اگر E یک فضای باناخ حقیقی باشد، آن‌گاه هر مخروط منظم‌در E نرمال است.

برهان. فرض کنید P منظم بوده ولی نرمال نباشد. در این صورت دنباله‌هایی چون $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در P وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $n \geq ۱$،

$$۰ \leq x_n \leq y_n, \quad n^۲\|y_n\| < \|x_n\|.$$

واضح است که y_nها همگی ناصفرند. حال قرار دهید،

$$u_n = \frac{x_n}{\|y_n\|}, \quad v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} \qquad (n \geq ۱).$$

در این صورت $\{u_n\}$، $\{v_n\}$ و $\{v_n - u_n\}$ دنباله‌هایی در P هستند به طوری که برای هر $n \geq ۱$، $\|v_n\| = ۱$ و $\|u_n\| < n^۲$. بنابراین سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} \cdot v_n$ در E به‌طور مطلق همگرا است و چون E باناخ است، پس همگرا می‌باشد. اگر $v \in E$ نقطه‌ی همگرایی آن باشد، آن‌گاه از این که مجموع‌های جزیی این سری دنباله‌ای را در مجموعه‌ی بسته‌ی P به وجود می‌آورند، نتیجه می‌گیریم که $v \in P$. روشن است که

$$\circ \leq u_۱ \leq u_۱ + \frac{۱}{۲^۲} \cdot u_۲ \leq u_۱ + \frac{۱}{۲^۲} \cdot u_۲ + \frac{۱}{۳^۲} \cdot u_۳ \leq \cdots \leq \sum_{n=۱}^{m} \frac{۱}{n^۲} \cdot u_n \qquad (m \geq ۱). \quad (۴)$$

اکنون نشان می‌دهیم که v یک کران بالای دنباله‌ی صعودی (۴) است. برای هر $m \geq ۱$ و هر $k > m$،

$$\sum_{n=۱}^{k} \frac{۱}{n^۲} v_n - \sum_{n=۱}^{m} \frac{۱}{n^۲} u_n = \sum_{n=۱}^{m} \frac{۱}{n^۲}(v_n - u_n) + \sum_{n=m+۱}^{k} \frac{۱}{n^۲} v_n \in P.$$

حال اگر m ثابت نگه‌داشته‌شود و $k \to \infty$، آن‌گاه چون P بسته است، نتیجه می‌گیریم که $v - \sum_{n=۱}^{m} \frac{۱}{n^۲} \cdot u_n \in P$؛ یعنی، $\sum_{n=۱}^{m} \frac{۱}{n^۲} \cdot u_n \leq v$. از طرفی، چون طبق فرض P منظم است، پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} \cdot u_n$ در E همگرا است. لذا حد جمله‌ی عمومی آن باید صفر باشد که یک تناقض است. از این رو P نرمال است. ○

گزاره‌ی ۵.۲.۱ [۲۸]فرض کنید $m > ۱$. در این صورت یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K، که $K > m$ وجود دارد.

برهان. فرض کنید $m > ۱$ و E فضای برداری همه ی توابع به فرم $f(x) = ax + b$ روی بازه‌ی $[۱ - \frac{۱}{m}, ۱]$ باشد که $a, b \in \mathbb{R}$. واضح است که E زیرفضایی از $C[۱ - \frac{۱}{m}, ۱]$ است. بنابراین E با $\|.\|_\infty$ به یک فضای نرم‌دار تبدیل می‌شود. مخروط $P = \{ax + b \in E : a \leq \circ, b \geq \circ\}$ را در E در نظر بگیرید. ابتدا نشان می‌دهیم که P منظم و در نتیجه نرمال می‌باشد. فرض کنید $\{a_n x + b_n\}_{n \geq ۱}$، دنباله‌ای صعودی و از بالا کران‌دار در E باشد یعنی عضو $cx + d \in E$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in [۱ - \frac{۱}{m}, ۱]$ داریم:

$$a_۱ x + b_۱ \leq a_۲ x + b_۲ \leq \cdots \leq a_n x + b_n \leq \cdots \leq cx + d$$

در این صورت $\{a_n\}_{n\geq 1}$ و $\{b_n\}_{n\geq 1}$ دو دنباله در $\mathbb{R}$ هستند که:

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq d,$$

و

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq c.$$

بنابراین $\{a_n\}_{n\geq 1}$ و $\{b_n\}_{n\geq 1}$ همگرا هستند. فرض کنید $a_n \to a$ و $b_n \to b$، در این صورت $a_nx + b_n \to ax + b$ و $ax + b \in P$. بنابراین P منظم است. با توجه به گزاره‌ی ۳.۲.۱، $K \geq 1$ وجود دارد به‌طوری‌که از $0 \leq g \leq f$، نتیجه می‌شود که برای هر $f, g \in E$، $\|g\| \leq K\|f\|$. حال نشان می‌دهیم که، $K > m$ می‌باشد. فرض کنید برای $x \in [1 - \frac{1}{m}, 1]$، $f(x) = -mx + m$ و $g(x) = m$. در این صورت $g, f, f - g \in P$. بنابراین $0 \leq g \leq f$ و $m = \|g\| \leq K\|f\| = K$. اگر $f(x) = -(m + \frac{1}{m})x + m$ و $g(x) = m$، آن‌گاه $f \in P$ و $g \in P$ و $f - g \in P$. هم‌چنین $\|g\| = m$ و $\|f\| = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$. بنابراین :

$$m = \|g\| > m\|f\| = m + \frac{1}{m} - 1$$

این نشان می‌دهد که $k > m$ می‌باشد. ○

اکنون برای تفهیم بیشتر مثال‌هایی در این زمینه ارایه می‌دهیم.

مثال ۶.۲.۱ فرض کنید $K \geq 1$ و E فضای بردار حقیقی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها به فرم $ax + b$ روی بازه‌ی $[1 - \frac{1}{K}, 1]$ است.اگر $P = \{ax + b \in E : a \leq 0, b \geq 0\}$ یک مخروط در E و $\|.\|_\infty$، نرم سوپرمم در E باشد. در این صورت P مخروطی منظم و در نتیجه نرمال است و ثابت نرمال آن بزرگتر از یک است.

مثال ۷.۲.۱ فرض کنید E و P همانند مثال ۶.۲.۱ باشد، بنابر مثال ۶.۲.۱، P یک مخروط منظم و نرمال است. $f(x)$ و $g(x)$ را به صورت $f(x) = -2x + 10$ و $g(x) = -6x + 11$ تعریف

کنید. در این صورت

$$g(x) - f(x) = -4x + 1 \in P$$

و $0 \leq f(x) \leq g(x)$، اما $8 = g(\frac{1}{2}) = \|g\|_\infty$ و $9 = f(\frac{1}{2}) = \|f\|_\infty$، پس داریم $\|f\|_\infty \geq \|g\|_\infty$، و بنابر نرمال بودن P از $0 \leq f(x) \leq g(x)$ داریم:

$$\|f\|_\infty \leq M\|g\|_\infty$$

که در این جا M ثابت نرمال است.

حال به مثالی از یک مخروط می‌پردازیم که نرمال می‌باشد ولی منظم نیست؛ یعنی، عکس قضیه ۴.۲.۱ برقرار نمی‌باشد.

مثال ۸.۲.۱ در فضای باناخ $E = C[0, 1]$ با نرم سوپرمم، مخروط $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت P مخروطی نرمال با ثابت نرمال $M = 1$ می باشد. حال به ازای هر $n \geq 1$ و $x \in [0, 1]$، اگر $f_n(x) = x^n$، آن‌گاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای نزولی در E می‌باشد که از پایین به صفر کران‌دار است و نقطه به نقطه به تابع f، همگرا است که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ولی $f \notin E$ و لذا $\{f_n\}$ نمی‌تواند همگرا باشد. یعنی P منظم نیست.

مثال ۹.۲.۱ [۱۹] فضای $E = C^1[0, 1]$ با نرم $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ و مخروط

$$P = \left\{f \in E : f \geq 0\right\}$$

را در نظر می گیریم. برای هر $k \geq 0$، قرار دهید

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^{2k}$$