دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

هم متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما

دکتر کامران دیوانی آذر

استاد مشاور

خانم بتول گنجی صفار

دانشجو

سمیه شاپوری

شهریور ماه ۱۳۸۸

قدردانی و تشکر

پس از حمد و ثنای یکتای بی‌همتا، برخود لازم می‌دانم تا از زحمات گرانقدر جناب آقای دکتر کامران دیوانی‌آذر که با راهنمایی‌های خویش، این حقیر را در تدوین این پایان‌نامه یاری نمودند، تقدیر می‌نمایم.

همچنین از آقای دکتر شعبان قلندرزاده، خانم دکتر ناهید هادیان دهکردی و نیز خانم بتول گنجی صفار جهت مطالعه این پایان‌نامه و تذکرات مفیدشان تشکر می‌نمایم.

در پایان نیز زحمات و فداکاری‌های پدر و مادر مهربانم به ویژه همسر عزیزم را که همواره با شکیبایی، راهنما و تکیه‌گاهم در این مسیر بوده‌اند، ارج می‌نهم.

چکیده

فرض کنید R یک حلقهٔ موضعی جابجایی یکدار و نوتری از بعد d باشد و I ایده‌آلی از R باشد. فرض کنید M یک Rـ مدول متناهیاً تولید شده از بعد n باشد. ما نشان می‌دهیم که در موارد زیر به‌ازای هر i و j ایده‌آل‌های اول وابسته $\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I}, H^j_I(M))$ متناهی‌اند:

(الف) $\dim M \leq ۳$.

(ب) $\dim R \leq ۴$.

(ج) $\dim \frac{M}{IM} \leq ۲$ و M یک Rـ مدول $S_{n-۳}$ باشد.

(د) $\dim \frac{R}{I} = ۳$ و $\mathrm{Ann}_R M = ۰$، R غیرمنشعب و M یک Rـ مدول $S_{n-۳}$ باشد.

همچنین ثابت می‌کنیم که تحت شرایط فوق به جزء در تعداد متناهی ایده‌آل اول از حلقه R، $H^i_I(M)_p$، I_pـ هم متناهی است.

به علاوه نشان می‌دهیم که اگر R کامل کوهن ـ مکالی نرمال، $\dim \frac{R}{I} \geq ۲$ و $\mathrm{Spec}\frac{R}{I} - \{\frac{m}{I}\}$ غیرهمبند باشد، در این صورت $H^{d-۱}_I(R)$، Iـ هم‌متناهی نیست، که تعمیمی از یکی از نتایج مرجع [9] است.

لازم به ذکر است که در سراسر این پایان‌نامه R، حلقه‌ای جابجایی، یکدار و نوتری است.

کلمات کلیدی: هم متناهی بودن، ایده‌آل اول وابسته، مدول کوهمولوژی موضعی.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱.۱ ملزومات بیان مقدمه

۱.۱.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه موضعی باشد و $P_\circ \supset P_1 \supset \ldots \supset P_d$ طولانی‌ترین زنجیر از ایده‌ال‌های اول حلقه R باشد. در این صورت d را بعد کرول[1] R می‌نامند و با $\dim(R)$ نمایش می‌دهند. فرض می‌کنیم m تنها ایده‌آل ماکسیمال حلقه موضعی R باشد. فرض می‌کنیم $k = \dfrac{R}{m}$، در این صورت $\dfrac{m}{m^2}$ را می‌توان به‌عنوان یک فضای برداری روی میدان K در نظر گرفت.

حال $V(R)$ را مینیمال تعداد مولدهای فضای برداری $\dfrac{m}{m^2}$ در نظر می‌گیریم بنابراین $.V(R) = \dim_k \dfrac{m}{m^2}$

۱) Krull

۲.۱.۱ لم: فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی باشد در این صورت:

$$\dim(R) \leq V(R).$$

اثبات: Rـمدول $\frac{m}{m^۲}$ به‌وسیله m صفر می‌شود. حال بنابر ۶.۱۹ مرجع [20]، $\frac{m}{m^۲}$ دارای ساختار یک فضای برداری روی میدان $\frac{R}{m}$ است. حال به‌وسیله ۹.۳ مرجع [20]، بعد $\frac{R}{m}$ـفضای برداری $\frac{m}{m^۲}$ با مینیمال تعداد مولدهای m یکسان است.

از طرفی m، ایده‌آل ماکسیمال و لذا mـاولیه حلقه R است و بنابراین و با توجه به مطالب گفته شده در ابتدای اثبات و بنابر ۵.۱۸ مرجع [20]، $\dim R$ مینیمال تعداد مولد یک ایده‌آل mـاولیه R است و لذا حکم ثابت می‌شود.

۳.۱.۱ تعریف: حلقه موضعی R را منظم گویند، هرگاه $\dim(R) = V(R)$.

۴.۱.۱ تعریف: فرض کنید M، Rـمدول ناصفر باشد. بعد کرول M، کوچکترین کران بالای طول‌های زنجیرهایی از ایده‌آل‌های اول در $\mathrm{Supp}_R M$ می‌باشد. اگر چنین کران بالایی موجود نباشد بعد کرول M، بی‌نهایت است. اگر M، R مدول متناهیاً تولید شده باشد، بعد کرول M با بعد کرول حلقه $\frac{R}{\mathrm{Ann}_R M}$ مساوی است، اما اگر M، متناهیاً تولید شده نباشد، لزوماً بعد کرول حلقه $\frac{R}{\mathrm{Ann}_R M}$ با بعد کرول M برابر نیست.

همچنین ما قرارداد می‌کنیم که بعد کرول مدول صفر، برابر منهای یک است.

۵.۱.۱ تعریف: فرض کنید R حلقه‌ای ناصفر باشد. دنباله متناهی از $n+۱$ ایده‌آل اول حلقه R به‌صورت زیر را زنجیر اول از طول n می‌نامیم:

$$P_۰ \supset P_۱ \supset \ldots \supset P_n.$$

۶.۱.۱ تعریف: فرض کنید P ایده‌آل اول از حلقه R باشد، کوچکترین کران بالای مجموعهٔ طول زنجیرهای اول که در آنها $P_\circ = P$، را ارتفاع P می‌نامند و با $hgt(P)$ نمایش می‌دهیم.

۷.۱.۱ تعریف: فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از حلقه R باشد. ارتفاع ایده‌آل I برابر با مینیمم ارتفاع های ایده‌ال‌های اول شامل I تعریف می‌شود:

$$hgt(I) = \inf\{hgt(P) | P \supseteq I\}.$$

۸.۱.۱ نکته: بدیهی است که به‌وسیله تعریف و مواردی که گفته شد، به‌ازای هر ایده‌آل اول P از حلقه R:

$$hgt(P) = \dim(R_P)$$

و همچنین به‌ازای هر ایده‌آل I از حلقه R داریم:

$$\dim(\frac{R}{I}) + hgt(I) \leq \dim(R).$$

۹.۱.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه، M یک Rـمدول و $a_\backslash, a_۲, \ldots, a_r$ دنباله‌ای از اعضای R باشد. فرض می‌کنیم $I =< a_۱, \ldots, a_r >$. زیرمدول $\sum_{i=۱}^{r} a_i M$ از M را با نماد IM نشان می‌دهیم.

اگر شرایط زیر برقرار باشد، $a_۱, a_۲, \ldots, a_r$ را یک Mـدنباله منظم یا برای سادگی، Mـدنباله می‌نامیم:

الف) برای هر $۱ \leq i \leq r$، a_i غیرمقسوم‌علیه صفر روی $\frac{M}{< a_۱, a_۲, \ldots, a_{i-۱} > M}$.

ب) $M \neq (a_۱, \ldots, a_r)M$.

هرگاه ایده‌الی مانند J از حلقه R موجود باشد که تمامی a_iها به J تعلق داشته باشد، $a_۱, a_۲, \ldots, a_r$

را یک Mـدنباله منظم در J گوئیم. به‌علاوه اگر هیچ bی در J موجود نباشد که $a_1, a_2, \ldots, a_r, b$ یک Mـدنباله منظم باشد، در این صورت $a_1, a_2, \ldots, a_r$ را Mـدنباله منظم ماکزیمال می‌نامیم.

۱۰.۱.۱ تعریف: فرض کنید I ایده‌الی از حلقه R باشد و M یک Rـمدول باشد. طول Mـدنباله‌های ماکزیمال در I را با $\mathrm{depth}(I, M)$ نشان می‌دهیم.

۱۱.۱.۱ لم: فرض کنید، I ایده‌الی از حلقه R باشد و M، Rـمدول باشد. در این صورت:

$$\mathrm{depth}(I, M) = \min\{i |\, \mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I}, M) \neq 0\}.$$

اثبات: مرجع [16].

۱۲.۱.۱ قرارداد: هرگاه (R, m) یک حلقه موضعی باشد، $\mathrm{depth}(m, M)$ را با $\mathrm{depth}(M)$ نمایش می‌دهیم.

۱۳.۱.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک Rـمدول ناصفر با تولید متناهی باشد. در این صورت:

$$\mathrm{grade}(M) := \inf\{i |\, \mathrm{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}(= \mathrm{depth}(\mathrm{Ann}_R M, R)).$$

۱۴.۱.۱ تعریف: حلقه R را کانتری گویند هرگاه به‌ازای هر دو ایده‌آل اول P و Q از حلقه R که $Q \supset P$، $hgt(P/Q)$ متناهی باشد و $hgt(P/Q)$ مساوی طول بزرگترین زنجیر اکید از ایده‌آل‌های اول بین P و Q باشد.

(توجه: چون حلقه R نوتری می‌باشد، شرط متناهی بودن $hgt(P/Q)$ همواره برقرار است.)

۱۵.۱.۱ قضیه: اگر R دامنه صحیح نوتری باشد، شرایط زیر هم معادلند:

الف) R، کاتنری است.

ب) به‌ازای هر دو ایده‌آل اول P و Q از حلقه R که $Q \subset P$ داریم:

$$hgt(P) = hgt(Q) + hgt(P/Q).$$

ج) به‌ازای هر دو ایده‌آل اول P و Q به طوری که $Q \subset P$ و $hgt(P/Q) = ۱$ داریم:

$$hgt(P) = hgt(Q) + ۱$$

اثبات: رجوع شود به قضیه ۳۴.۱ در مرجع [16].

۱۶.۱.۱ لم: i) اگر حلقه R، کاتنری و S یک زیرمجموعه بسته ضربی آن باشد، در این صورت حلقهٔ $S^{-۱}R$ نیز کاتنری است.

ii) اگر حلقهٔ R کاتنری باشد، آنگاه هر حلقه خارج‌قسمتی آن نیز کاتنری است.

اثبات: i) هر ایده‌آل اول حلقه $S^{-۱}R$، به‌صورت $S^{-۱}P$ است که در آن P ایده‌آل اولی از حلقه R است و $P \cap S = Q$. حال با توجه به مطلب فوق و همچنین این که R، کاتنری است، اثبات لم فوق بسیار آسان است.

ii) واضح است.

۱۷.۱.۱ تعریف: حلقه R را عموماً کاتنری گویند هرگاه هر Rـجبر متناهیاً تولید شده کاتنری باشد.

۱۸.۱.۱ لم و تعریف: فرض کنید (R,m,k) یک حلقه موضعی نوتری باشد. حالت‌های زیر امکان دارد: (در کلیه حالت‌های زیر منظور از $ch(R)$، مشخصه حلقه R است.)

الف) $ch(R) = P = ch(k)$ (که P عددی اول است).

ب) $ch(R) = ۰ = ch(k)$.

ج) $ch(R) = P^n, ch(k) = P$ $۱ < n \in \mathbb{N}$.

د) $ch(R) = ۰, ch(k) = P$.

در دو حالت الف و ب می‌گوئیم حلقه R، هم مشخصه است و در دو حالت ج و د می‌گوئیم حلقه R، غیر هم مشخصه است.

اثبات: ادعای فوق در مرجع [23] موجود است.

۱۹.۱.۱ تعریف: فرض کنید حلقه موضعی (R,m,k)، غیر هم مشخصه باشد و فرض کنید $chk = P$، که P عددی اول است. حلقه R را منشعب گوئیم اگر $P \in m^۲$ و اگر $P \notin m^۲$، حلقه R را غیرمنشعب می‌گوئیم. در حالتی که حلقه R، هم مشخصه باشد، حلقه R را غیر منشعب می‌نامیم.

۲۰.۱.۱ یادآوری: فرض کنید R یک حلقه نوتری باشد و M یک Rـمدول باشد. رشته دقیق

$$E^۰ \xrightarrow{d^۰} E^۱ \xrightarrow{d^۱} E^۲ \longrightarrow \ldots E^۱ \xrightarrow{d^i} E^{i+۱} \longrightarrow \ldots$$

را یک تحلیل انژکتیو مینیمال برای M گویند، هرگاه به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، E^i پوشش انژکتیو $Imd^{i-۱}$ باشد و $E^۰$ پوشش انژکتیو M باشد.

بنابر قضیه ۱۸.۵ مرجع [17] هر مدول انژکتیو E را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع مستقیم

مدول‌های انژکتیو تجزیه ناپذیر (یعنی تنها جمعوند مستقیم آنها مدول صفر باشد) نوشت:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \quad (\text{انژکتیو متلاشی نشدنی است } E_\lambda).$$

بنابر قضیه ۱۸.۴ قسمت الف مرجع [17]، هر مدول انژکتیو I تجزیه نشدنی است اگر و تنها اگر به‌ازای یک ایده‌آل اول P از R، $I = E_R(\frac{R}{P})$، که در آن $E_R(\frac{R}{P})$، پوشش انژکیتو مینیمال $\frac{R}{P}$ است. لذا هر مدول انژکتیو را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_R(\frac{R}{P_\lambda}).$$

۲۱.۱.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد و M یک Rـمدول باشد. iـامین عدد باس[1] M نسبت به ایده‌آل اول P با $\mu^i(P, M)$ نمایش داده می‌شود. اگر $E^i = \underset{\lambda \in \wedge}{\oplus} E(\frac{R}{p_\lambda})$، iـامین جمله تحلیل مینیمال انژکتیو M باشد، در این صورت:

$$\mu^i(P, M) = card\{\lambda \in \wedge \mid p_\lambda = P\}.$$

۲۲.۱.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه نوتری باشد و M یک Rـمدول باشد. ایده‌آل اول P از حلقه R را یک ایده‌آل اول وابستهٔ M می‌نامیم، اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد:

الف) $x \in M$ موجود باشد که $\mathrm{Ann}_R(x) = P$.

ب) M دارای زیرمدولی باشد که با $\frac{R}{P}$ ایزومورف باشد.

مجموعه تمامی ایده‌ال‌های اول وابستهٔ M را با $\mathrm{Ass}_R(M)$ یا $\mathrm{Ass}(M)$ نمایش می‌دهیم.

---

۱) Bass

۲۳.۱.۱ تعریف: فرض کنید M یک Rـمدول باشد، ساپورت M را با $\mathrm{Supp}_R(M)$ یا $\mathrm{Supp}(M)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{P \in \mathrm{Spec}R | \exists\ x \in M\ ;\ \mathrm{Ann}_R(x) \subseteq P\}.$$

۲۴.۱.۱ تعریف: مدول M را همبعد گویند، هرگاه به‌ازای هر ایده‌آل اول P که در $\mathrm{Supp}_R(M)$ مینیمال باشد، $\dim M = \dim \frac{R}{P}$.

۲۵.۱.۱ تعریف: فرض کنید R حلقه موضعی نوتری باشد. Rـمدول ناصفر متناهیاً تولید شده M را کوهن مکالی گوئیم هرگاه، $\mathrm{depth}\, M = \dim M$.

اگر R خودش به‌عنوان Rـمدول کوهن مکالی باشد، R را حلقه کوهن مکالی می‌نامیم. Rـمدول کوهن ـمکالی M را کوهن ـ مکالی ماکزیمال گویند، هرگاه $\dim M = \dim R$.

۲۶.۱.۱ نکته: در حالت کلی، اگر R حلقه نوتری دلخواه باشد، Rـ مدول ناصفر با تولید متناهی M کوهن مکالی است اگر به‌ازای هر ایده‌آل ماکسیمال $m \in \mathrm{Supp}(M)$، M_m یک R_mـ مدول کوهن مکالی باشد.

۲۷.۱.۱ تعریف: حلقه R را نرمال گوئیم اگر کلیه موضعی‌سازی‌های R، دامنه بسته صحیح باشند.

۲۸.۱.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد. روی $X = \mathrm{Spec}R$ یک توپولوژی به‌صورت زیر وجود دارد که در آن را توپولوژی زارسکی[1] R گویند. بسته‌های آن به‌صورت زیرند که در آن I

۱) Zariski

ایده‌آل‌های حلقه Rاند:

$$V(I) = \{P \in X \mid I \subseteq P\}.$$

۲۹.۱.۱ تعریف: تحت شرایط تعریف قبل، متمم هر مجموعه $V(I)$ باز است. زیرفضای Y از $\mathrm{Spec}R$ را همبند نامند هرگاه نتوان آن را به‌صورت اجتماع دو زیر مجموعهٔ باز مجزای غیرتهی آن نوشت، در غیر این صورت Y، مجموعه‌ای ناهمبند است.

۳۰.۱.۱ تعریف: Rـمدول متناهیاً تولید شده M روی حلقه نوتری R، در شرط سر[1] (S_n) صدق می‌کند، هرگاه به‌ازای هر ایده‌آل مانند P از حلقه R، داشته باشیم:

$$\operatorname{depth} M_P \geq \min\{n, \dim M_P\}$$

۲.۱ مقدمه

فرض کنید R حلقه‌ای موضعی و نوتری باشد. فرض کنید I ایده‌الی از حلقه R و M یک Rـمدول متناهیاً تولید شده باشد. می‌دانیم که به‌ازای هر $i > ۰$ مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$ در حالت کلی نوتری نیستند. به هر حال نتایج به‌دست آمده در سال‌های اخیر نشان داد که تحت برخی از شرایط اصلی، مدول‌های کوهمولوژی موضعی در برخی از خواص اساسی با مدول‌های نوتری مشترکند. به طور مثال اگر R حلقه‌ای غیر منشعب موضعی منظم باشد، در این صورت به‌ازای هر $i \geq ۰$ ایده‌ال‌های اول وابسته $H_I^i(M)$ متناهی‌اند. هنیکه[2] و شارپ[3] این مسأله را در مشخصه مثبت در مرجع [9] ثابت کردند

۱) Serre
۲) Huneke
۳) Sharp

و در مشخصه صفر نیز به‌وسیله لیوبزنیک[۱] در مراجع [12] و [13] ثابت شد.

در سال ۱۹۷۰ هارتشورن[۲] در مقاله [7] مثالی ارائه کرد که نشان داد حتی اگر R منظم نباشد ممکن است اعداد باس $H_I^i(M)$ نامتناهی باشند. تا همین اواخر، این مسأله که «آیا به‌ازای هر حلقه نوتری دلخواه R و ایده‌آل دلخواه I از حلقه R، تعداد ایده‌ال‌های اول وابسته $H_I^i(M)$ متناهی‌اند؟» به‌عنوان یک مسأله باز باقی مانده بود. به هر حال مثال‌هایی در مراجع [11] و [21] ارائه شد که نشان داد، مدول‌های کوهمولوژی موضعی با ایده‌ال‌های اول وابسته نامتناهی نیز وجود دارند.

در این پایان نامه نشان می‌دهیم هنگامی که $\dim R$ و $\dim \dfrac{M}{IM}$ کوچک هستند، به‌ازای هر $i \geq ۰$، ایده‌ال‌های اول وابسته $H_I^i(M)$ متناهی‌اند. در حقیقت، ما نتیجه‌ای را ثابت می‌کنیم که به مراتب قوی‌تر از نتایج به‌دست آمده تا به حال است و آن این است که به ازای هر i و j مجموعهٔ ایده‌ال‌های اول وابسته $\operatorname{Ext}_R^i(\dfrac{R}{I}, H_I^j(M))$ متناهی‌اند.

به‌علاوه ما نشان دادیم که موضعی‌سازی‌های $H_I^i(M)$، به‌جزء در تعداد متناهی ایده‌آل از حلقه R، هم‌متناهی است. تعداد بسیاری از نتایج گفته شده را در فصل پایانی این پایان‌نامه گنجانده‌ایم.

۱.۲.۱ قضیه: فرض کنید R حلقه موضعی منظم باشد، I ایده‌الی از آن و M یک Rـمدول متناهیاً تولید شده از بعد n باشد. فرض کنید یکی از شرایط زیر حفظ شوند:

الف) $\dim M \leq ۳$

ب) $\dim R \leq ۴$

ج) $\dim \dfrac{M}{IM} \leq ۲$ و M در شرط $S_{n-۳}$ صدق کند.

د) $\dim \dfrac{R}{I} = ۳$ و $\operatorname{Ann}_R M = ۰$ و R حلقه‌ای غیر منشعب باشد و M، $S_{n-۳}$ باشد.

---

۱) Lyubeznik

۲) Hartshorne

در این صورت به ازای هر i و j، ایده‌ال‌های اول وابسته، $\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I}, H^j_I(M))$ متناهی هستند. به‌علاوه به‌جزء تعداد متناهی، به‌ازای هر ایده‌آل اول P، $H^j_I(M)_P$، I_Pـ‌هم‌متناهی است.

مثال‌هایی که در فصل پنجم بیان شده است، نشان می‌دهد که برخی از شرایط قضیه ۱.۲.۱ برای به طور موضعی هم متناهی بودن $H^j_I(M)$، ضروری است. همچنین مثال‌های کاتزمان[۱] نشان داد که متناهی بودن ایده‌ال‌های اول وابسته $H^j_I(M)$، برای Rـ‌مدول دلخواه M روی حلقه موضعی منظم شش بعدی حفظ نمی‌شود. این مسأله که آیا مدول کوهمولوژی موضعی روی حلقه موضعی منظم پنج بعدی، دارای ایده‌ال‌های اول وابسته نامتناهی است، هنوز باز باقی مانده است.

پر اهمیت‌ترین مطلب در این پایان نامه، هم متناهی بودن است، این مفهوم به‌وسیله هارتشورن در مرجع [8] تعریف شد و مطالعه بیشتر به‌وسیله هنیکه و کِو[۲] در مرجع [9] صورت گرفت. بسیاری از نتایج این پایان‌نامه در زمینه هم متناهی بودن، به‌وسیله مطالعه دقیق دو مرجع فوق صورت گرفته است. Rـ‌مدول N، Iـ‌هم‌متناهی گفته می‌شود هرگاه $\mathrm{Supp}_R(N) \subseteq V(I)$ و $\mathrm{Ext}^i_R(\frac{R}{I}, N)$ برای هر $i \geq ۰$، متناهیاً تولید شده باشد.

(در سراسر این پایان‌نامه،مجموعه تمامی ایده‌ال‌های اول شامل I را با $V(I)$ نمایش می‌دهیم.)

هارتشورن ثابت کرد که اگر Rحلقه موضعی منظم کامل و Rـ‌مدول M متناهیاً تولید شده باشد در این صورت اگر I اصلی باشد و یا $\dim \frac{R}{I} \leq ۱$، آنگاه به‌زای هر i، مدول‌های کوهمولوژی $H^i_I(M)$، Iـ هم متناهی هستند. پس از این در مرجع‌های [22] و [5] و [12] نشان داده شد که این نتایج برای حلقه‌های موضعی نوتری دلخواه حفظ می‌شوند. هارتشورن و بعدها هنیکه و کِو مثال‌هایی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^i_I(M)$ که Iـ‌هم‌متناهی نبودند، ارائه کردند. تکنیکی که در بسیاری از اثبات‌های ما استفاده می‌شود این است که ابتدا $x \in R$ را چنان انتخاب می‌کنیم که به‌ازای هر i، $H^i_I(M)_x$،

۱) Katzman

۲) Koh

I_xـهم‌متناهی باشد و مجموعه ایده‌ال‌های اول وابسته $H_I^i(M)_x$، شما را نامتناهی باشد. در فصل چهارم نشان داده شده است که چه زمانی این عضو وجود دارد.

در فصل پنجم، قضیه ۱.۲.۱ و همچنین قضیه زیر راکه تعمیمی از قضیه ۳.۶ قسمت (ii) مرجع [9] است، ثابت شده است.

۲.۲.۱ قضیه: فرض کنید (R, m) حلقه موضعی کامل کوهن مکالی نرمال از بعد d باشد. فرض کنید که I ایده‌الی از حلقه R باشد که $\dim \frac{R}{I} \geq ۲$ و $\operatorname{Spec}\frac{R}{I} - \{\frac{m}{I}\}$ غیر همبند باشد. در این صورت $\operatorname{Hom}_R(\frac{R}{I}, H_I^{d-۱}(R))$، متناهیاً تولید شده نیست. در نتیجه $H_I^{d-۱}(R)$، Iـهم‌متناهی نیست.

در سراسر این پایان‌نامه هر جا لغت «حلقه» بکار برده شده منظور حلقه جابجایی یکدار است. و هرجا گفته شده «حلقه موضعی» منظور این است که حلقه نوتری نیز می‌باشد. برای مطالعه بیشتر و آشنایی با اصطلاحات این پایان‌نامه می‌توانید به مرجع‌های [3] و [17] مراجعه کنید.

فصل دوم

مقدمات همولوژی

۱.۲ تعاریف و قضایای همولوژی

۱.۱.۲ تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد یک همبافت عبارت است از دنباله‌ای از Rـ مدولها و Rـ همریختی‌ها به صورت زیر است:

$$C_\circ : \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

که در آن $n \in \mathbb{N}_\circ$ و داریم $d_n d_{n+1} = \circ$. این شرط هم‌ارز $\mathrm{Im}(d_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(d_n)$ است و از این پس هر جا که از نماد (C, d) استفاده کردیم منظور همبافتی به صورت فوق است.

۲.۱.۲ تعریف: فرض کنید M یک Rـ مدول دلخواه باشد همبافتی به صورت زیر را درنظر بگیرید:

$$C_\circ : \ldots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_\circ \longrightarrow M \longrightarrow \circ$$

از همبافت فوق همبافتی می‌سازیم که در آن جمله M حذف شده است و آن را همبافت حذف شده از $C_\circ$ می‌نامیم و به صورت زیر است:

$$C_M : \ldots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_\circ \longrightarrow \circ$$

۳.۱.۲ تعریف: فرض کنید M یک Rـ مدول دلخواه باشد یک تحلیل انژکتیو برای Rـ مدول M یک دنباله دقیق طولانی از Rـ مدولها و Rـ همریختی‌ها به صورت زیر است:

$$E_\circ : \circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} E^\circ \xrightarrow{d^\circ} E^1 \xrightarrow{d^1} \ldots$$

که در آن برای هر $n \in \mathbb{N}_\circ$، E^n، Rـ مدولی انژکتیو است.

۴.۱.۲ قضیه: فرض کنید M یک Rـ مدول دلخواه باشد، در این صورت M دارای یک تحلیل انژکتیو است.

اثبات: رجوع شود به مرجع [19] قضیه ۳.۲۸.

۵.۱.۲ تعریف: یک توسیع اساسی از Rـمدول M، Rـ مدولی مانند E است که $M \subset E$ به طوری که برای هر Rـ زیرمدول غیرصفر مانند S از E داشته باشیم $S \cap M \neq \circ$. بعلاوه اگر $M \subsetneqq E$، ما E را یک توسیع اساسی سره از Rـ مدول M می‌نامیم.

۶.۱.۲ قضیه: Rـ مدول M انژکتیو است اگر و فقط اگر M توسیع اساسی سره نداشته باشد.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۳.۲۹ مرجع [19].

۷.۱.۲ قضیه: فرض کنید E یک Rـ مدول دلخواه باشد که شامل Rـ مدول M است، شرایط زیر برای آن معادلند:

(الف) E توسیع اساسی ماکسیمال M است.

(ب) E، Rـ مدولی انژکتیو است و E توسیع اساسی از Rـ مدول M است.

(ج) E توسیع انژکتیو مینیمال M است.

اثبات: رجوع شود به مرجع [19] قضیه ۳.۳۰.

۸.۱.۲ تعریف: فرض کنید M یک Rـ مدول دلخواه باشد، یک تحلیل پروژکتیو برای R ـ مدول M عبارت است از یک دنباله دقیق طولانی از Rـ مدولها و Rـ همریختی‌ها به صورت زیر است:

$$P_\circ : \dots P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_\circ \xrightarrow{d_\circ} M \longrightarrow \circ$$

که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، P_n، Rـ مدولی پروژکتیو است.

۹.۱.۲ تعریف: فرض کنید (C, d) یک همبافت باشد، nـامین مدول همولوژی C عبارت است از:

$$H_n(A) = \frac{\mathrm{Ker}(d_n)}{\mathrm{Im}(d_{n+۱})}.$$

همان گونه که در تعریف همبافت‌ها ذکر کردیم، به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، داریم: $\mathrm{Im}(d_{n+۱}) \subset \mathrm{Ker}(d_n)$، لذا مدول خارج‌قسمتی به درستی تعریف شده است.