بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک – گرایش ذرات بنیادی

بررسی مشتقات مرتبه بالا در کنش تاکیون

استاد راهنما: **دکتر محمدرضا گروسی**

نگارش: **حنیف گلچین**

شهریور ۸۷

تقدیم به:

پدر و مادرم

تشکر و قدردانی

خدا را شاکرم که توفیق آشنایی و کار با دکتر گروسی را به من ارزانی داشت. بر خود لازم می‌دانم که از این استاد گرامی به دو جهت تشکر کنم؛ نخست به خاطر راهنمایی‌های بسیار مفیدشان که بی شک ناشی از تسلط ایشان بر موضوع می‌باشد و دوم به خاطر ساعت هایی از وقت ارزشمندشان، که به من اختصاص دادند که گاه به سه ساعت و نیم در یک جلسه می‌رسید.

از اساتید محترم گروه فیزیک، به ویژه دکتر اسلامی و دکتر قدسی که برای حضور در جلسه دفاع قبول زحمت فرمودند، سپاسگزاری می‌کنم.

از دوست عزیز آقای دکتر کاظم بی‌تقصیر، هم به خاطر راهنمایی در انجام بسط سری فوق هندسی و هم به خاطر مهمان نوازی بزرگوارانه‌شان، تشکر می‌کنم.

از دوست گرامی آقای احسان هاتفی به خاطر راهنمایی هایشان متشکرم.

از آقایان احسان استاجی، مجتبی جزایری و اصغر قربانی دانشجویان رشته ریاضی برای راهنمایی‌های مفیدشان در حل مسائل ترکیبیات و همچنین از آقای مهدی کماندار دانشجوی رشته مهندسی مخابرات برای کمک در نوشتن یک برنامه کامپیوتری سپاسگزاری می‌کنم.

از تمامی دانشجویان فیزیک ذرات بنیادی دانشگاه فردوسی و به ویژه آقایان سید یحیی میرافضلی، محسن اکبری و علی خیراندیش تشکر، و برای آنها آرزوی موفقیت می‌کنم.

چکیده

دی-غشاهای غیرBPS اجسامی ناپایدار در نظریه ریسمان هستند. ناپایداری این اجسام توسط میدان تاکیونی توصیف می شود. با داشتن کنش تاکیون می توان این دی-غشاها را بدون وارد شدن در نظریه ریسمان مورد مطالعه قرار داد. کنش موثر این دی-غشاها توسط کنش DBI تاکیونی داده می‌شود که این کنش شامل مشتق مرتبه اول میدان تاکیونی است در این پایان نامه دستورالعملی برای تعمیم کنش DBI تاکیونی به مراتب بالاتر ارائه شده است. در اینجا محاسبات فقط برای پراکندگی چهار تاکیون انجام شده است اما در مرجع [۸] نشان داده شده که این دستورالعمل برای موارد دیگر هم درست کار می‌کند.

فهرست

نگاه اجمالی به مطالب پایان نامه ۱

پیشگفتار ۲

فصل اول– مقدمه‌ای بر نظریه ریسمان ۴

۱-۱ کنش ذره نقطه ای آزاد ۵

۱-۲ کنش ریسمان نسبیتی آزاد ۶

۱-۳ معادلات حرکت و D-غشا ها ۱۱

۱-۴ انتخاب پارامتریزیشن ۱۲

۱-۵ قیدها و معادلات حرکت ۱۵

۱-۶ جواب معادله حرکت ۱۶

۱-۷ مختصات light-cone ۱۸

۱-۸ جواب معادله حرکت ریسمان غیرکوانتمی در مختصات light-cone ۱۹

۱-۹ کوانتش ذره نقطه ای ۲۲

۱-۱۰ کوانتش ریسمان باز ۲۴

۱-۱۱ مولدهای لورنتس وتعداد ابعاد فضا-زمان ۳۱

۱-۱۲ حالتهای نوسانی ریسمان کوانتمی ۳۳

۱-۱۳ D_p-غشاها و ریسمانهای باز بین D_p-غشاهای موازی ۳۶

۱-۱۴ تاکیونها ۴۱

۱-۱۵ مختصری درباره نظریات ابرریسمان ۴۴

فصل دوم- محاسبه مرتبه‌های اول و دوم برای پراکندگی چهار تاکیون ۵۰

۲-۱ بسط غیرآبلی ماتریس پراکندگی چهار تاکیون در نظریه ریسمان ۵۱

۲-۲ محاسبه مرتبه اول بسط ماتریس پراکندگی در نظریه میدان ۵۵

۲-۳ محاسبه مرتبه دوم بسط در نظریه میدان ۵۹

فصل سوم- جملات مرتبه بالا در جفت شدگی چهار تاکیون ۶۳

۳-۱ بسط مرتبه سوم دامنه پراکندگی چهار تاکیون و مقایسه آن با مرتبه دوم ۶۴

۳-۲ بسط مراتب بالا برای دامنه پراکندگی چهار تاکیون ۶۵

۳-۳ جملات مراتب بالا در نظریه میدان برای جفتیدگی چهار تاکیون ۶۷

فصل چهارم- نتیجه‌گیری و پیشنهاد ۷۴

پیوست ۱ بسط تابع گاما به وسیله Maple ۷۷

پیوست ۲ تلاشهای انجام شده ۷۹

مراجع ۸۴

نگاه اجمالی به مطالب پایان نامه

در فصل اول این پایان نامه سعی شده مطالب مقدماتی که یک دانشجوی علاقه‌مند باید از نظریه ریسمان بداند آورده شود. بسیاری از مفاهیم فصل اول در فصول بعد به کار رفته‌اند. پس از این مقدمه نسبتا طولانی که می‌توان آن را خلاصه ای از کتابهای درسی تلقی کرد، در فصل دوم، بسط غیرآبلی دامنه پراکندگی چهار تاکیون را در نظریه ریسمان انجام داده و با استفاده از کنش DBI تاکیونی مراتب اول و دوم این بسط را تولید کرده‌ایم. در فصل سوم، تعمیم جفت شدگی چهار تاکیون در کنش DBI تاکیونی به مراتب بالاتر (هر مرتبه دلخواه) را بدست آورده‌ایم. و نشان داده‌ایم که با مراتب بالاتر بسط دامنه نظریه ریسمان مطابقت دارد؛ این کاری است که برای اولین بار صورت گرفته است. در پیوست۱ نحوه انجام بسط توابع گاما در دامنه پراکندگی نظریه ریسمان آمده است و در پیوست۲ نتایج اولیه‌ای که قبل از پیدا کردن روش نهایی بدست آمدند، گنجانده شده است.

در انتها نیز صفحه اول مقاله چاپ شده در مجله Nuclear Physics B را که فصل سوم این پایان نامه بخشی از آن است، آورده‌ایم.

پیشگفتار

در اواخر دهه ۱۹۶۰ و اوایل ۱۹۷۰ بعضی از فیزیکدانانی که برهمکنشهای قوی را مطالعه می‌کردند به این نتیجه رسیدند که ذرات حامل نیروی قوی دارای بعد هستند و خصوصیاتی ریسمان گونه دارند (آزمایشها نشان می‌دادند که هرچه اسپین ذره حامل نیروی قوی بزرگتر باشد جرم آن بیشتر است). بنابراین نظریه ریسمان در ابتدا به صورت نظریه ای که برهمکنش هادرونها را توصیف می‌کرد به وجود آمد. طبیعتا در آن هنگام عقیده بر این بود که طول این ریسمانها از مرتبه برد برهمکنشهای قوی است یعنی در حدود $۱۰^{-۱۶}$ متر.

البته در همان ابتدا چند مشکل پیدا شد مثلا دومین مد نوسانی ریسمان معادل ذره‌ای است با جرم صفر و اسپین ۲ که چنین ذره‌ای در برهمکنشهای قوی مشاهده نمی شود (چنین ذره ای تنها می‌تواند جاذبه داشته باشد). تلاشهای زیادی که برای حذف این ذره از نظریه صورت گرفت بی‌نتیجه ماند. بعدها نظریه دانان ریسمان به خاطر شباهتی که این ذره به گرایتون (ذره حامل برهمکنش گرانشی) دارد امیدوار شدند که شاید نظریه ریسمان نظریه‌ای کوانتمی برای گرانش ودر حقیقت همان نظریه وحدت بخش نیروها باشد. اما این بار طول ریسمان از مرتبه طول پلانک یعنی $۱۰^{-۳۵}$ متر(البته درچهار بعد)، و انرژی‌ای که برای دسترسی به این فاصله لازم است از مرتبه $۱۰^{۱۹}$GeV می باشد (در این فاصله تاثیر نیروی گرانشی از مرتبه بقیه نیروهاست).

نظریه ریسمان می‌گوید که ذرات بنیادی مثل کوارکها و لپتونها چیزی جز مدهای مختلف نوسانی ریسمانها نیستند *یعنی ذره بنیادی ریسمان است*. در این تئوری ریسمانها در دو نوع باز و بسته یافت می‌شوند که ریسمانهای باز به موجودات بنیادی دیگری به نام D-غشا مقید شده‌اند و بر روی آن زندگی می‌کنند اما ریسمانهای بسته در تمام فضا می‌توانند حرکت کنند.

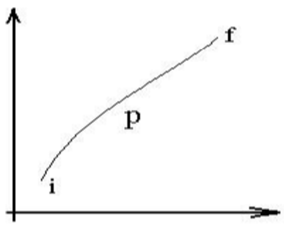
مدل استاندارد ذرات بنیادی شامل برهمکنش گرانشی نیست همچنین در این مدل ۱۹ پارامتر وجود دارد که مقدار آنها را تنها از آزمایش می‌توان بدست آورد از جمله ثابت ساختار ریز ($\alpha = ۱/۱۳۷$)، نسبت جرم میوآن به الکترون ($m_\mu / m_e = ۲۰۷$)، بار الکترون و ... اما امکان محاسبه تمام این پارامترها در تئوری ریسمان وجود دارد. تنها پارامتر نظریه ریسمان مجذور طول ریسمان است که با α' نمایش داده می‌شود.

فصل اول

مقدمه ای بر نظریه ریسمان

۱-۱ کنش ذره نقطه ای آزاد

معادلات حرکت برای ذرات نقطه ای از کمینه کردن کنش (که به صورت انتگرال زمانی لاگرانژی ذره تعریف می شود) بدست می آید این انتگرال گیری بر روی مسیر حرکت ذره که به آن جهانخط ذره می گوییم انجام می شود یعنی:



$$\delta(S=\int_p L dt)=0 \rightarrow \text{معادلات حرکت} \qquad (۱-۱)$$

کنش یک ذره نقطه ای نسبیتی آزاد به شکل $S=mc\int ds$ می‌باشد؛ ds طول ویژه است که ناوردای لورنتز می باشد و برابر است با سرعت نور ضربدر زمان ویژه:

$$-ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2 \Rightarrow ds=cdt\sqrt{1-v^2/c^2}$$

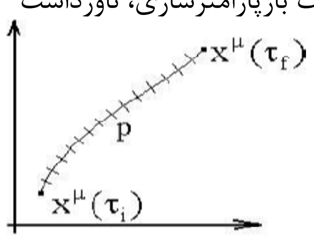
در فضا-زمان چهار بعدی معرفی بردارهای پادوردا[1] و هموردا[2] و متریک مینکوفسکی به ترتیب به شکل:

$$x^\mu=(x^0,x^1,x^2,x^3),\quad x_\mu=(-x^0,x^1,x^2,x^3),\quad \eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad (۲-۱)$$

خواهیم داشت:

$$-ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (۳-۱)$$

برای محاسبه انتگرال، جهانخط ذره را پارامتریزه می کنیم یعنی $x^\mu=x^\mu(\tau)$ اما از طرفی توجه داریم که کنش ذره مستقل از نحوه پارامتریزه کردن است بنابراین کنش ذره تحت بازپارامترسازی، ناورداست[3] توجه داریم که زمان(مولفه صفرم چاربردار x^μ) هم پارامتریزه می‌شود یعنی $t=t(\tau)$.



[1] contravariant

[2] covariant

[3] reparameterization invariant

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}(d\tau)^2 \qquad (۴-۱)$$

بنابراین کنش ذره نقطه ای وقتی که مسیر حرکت بر حسب τ پارامتریزه شده باشد برابر است با:

$$S = -mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}\,d\tau \qquad (۵-۱)$$

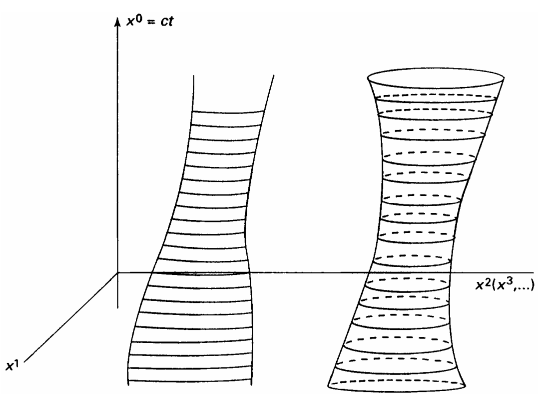
حال نشان می دهیم که کنش بالا تحت پارامتریزیشن ناورداست:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{d\tau'}{d\tau} \Rightarrow S = -mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{dx^\nu}{d\tau'}}\,\frac{d\tau'}{d\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow S = -mc\int_{\tau'_i}^{\tau'_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{dx^\nu}{d\tau'}}\,d\tau'$$

معادلات حرکت از کمینه کردن (۱-۵) بدست می آیند که البته در اینجا هدف پیدا کردن آنها نیست.

۱-۲ کنش ریسمان نسبیتی آزاد

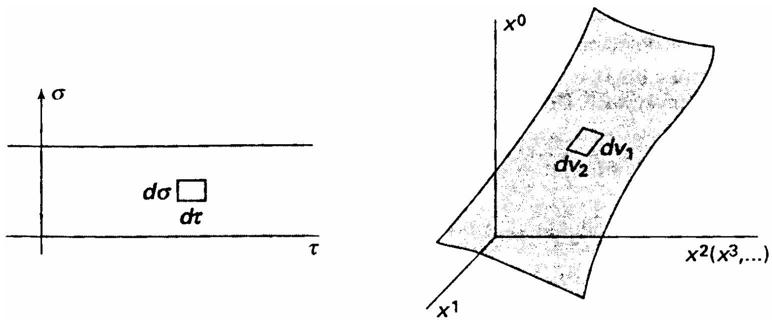


حرکت ریسمانها در فضا-زمان ایجاد یک رویه دو بعدی می‌کند که به آن جهانسطح[1] می‌گوییم. جهانسطح یک ریسمان بسته (باز) شکلی است شبیه لوله (نوار)؛ به شکل روبرو نگاه کنید.

کنش ریسمانهای آزاد با مساحت ویژه این جهانسطح متناسب است. روشن است که جهانسطح ریسمان با گذر زمان تولید می شود یعنی در هر لحظه از زمان ما ریسمان را می بینیم نه یک سطح؛ بنابراین برای پارامتریزه کردن چنین سطحی به یک پارامتر مکان گونه (σ) و یک پارامتر زمان گونه (τ) نیاز داریم. بنابراین جهانسطح ریسمان را اینگونه پارامتریزه می‌کنیم: $X^\mu = X^\mu(\tau,\sigma)$ که به معنی آن است

[1] world-sheet

که هر نقطه در فضای پارامتری $\sigma-\tau$ توسط $X^{\mu}(\tau,\sigma)=\left(X^{0}(\tau,\sigma),X^{1}(\tau,\sigma),...,X^{d}(\tau,\sigma)\right)$ به روی جهانسطح نگاشته می‌شود (شکل زیر).



در اینجا از حرف بزرگ برای ایجاد تمایز بین مختصه فضا-زمانی و مختصه ریسمان استفاده شده است (X^{μ}مختصه ریسمان و x^{μ} مختصه فضا-زمانی).

برای ساختن المان مساحت جهان سطح یک ریسمان نسبیتی به این صورت پیش می‌رویم: مستطیل کوچکی به اضلاع $d\sigma$ و $d\tau$ در فضای پارامتری انتخاب می کنیم. طبق شکل بالا این مستطیل به متوازی الاضلاعی روی جهانسطح ریسمان که اضلاع آن dv_1 و dv_2 می‌باشند، نگاشته می‌شود. مساحت این متوازی الاضلاع برابر است با: (θزاویه بین dv_1و dv_2است)

$$dA=|dv_1||dv_2|\text{Sin}\theta=|dv_1||dv_2|\sqrt{1-\text{Cos}^2\theta}=\sqrt{|dv_1|^2|dv_2|^2-|dv_1|^2|dv_2|^2\text{Cos}^2\theta}$$

$$=\sqrt{(dv_1\cdot dv_1)(dv_2\cdot dv_2)-(dv_1\cdot dv_2)^2} \qquad (۶-۱)$$

ضرب نقطه ای در اینجا ضرب نقطه ای نسبیتی است زیرا می خواهیم المان مساحت، تحت تبدیلات لورنتس ناوردا باشد. همچنین داریم $dv_1^{\mu}=\dfrac{\partial X^{\mu}}{\partial\tau}d\tau$ و $dv_2^{\mu}=\dfrac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma}d\sigma$ بنابراین:

$$dA=\sqrt{\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\tau}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma}\frac{\partial X_{\nu}}{\partial\sigma}\right)-\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\tau}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\sigma}\right)^2}\,d\tau d\sigma \qquad (۷-۱)$$

عبارت اخیر منظورمان از ضرب نقطه ای نسبیتی را روشن می سازد. می توان نشان داد که عبارت زیر رادیکال منفی است بنابراین باید مساحت را اینگونه بنویسیم:

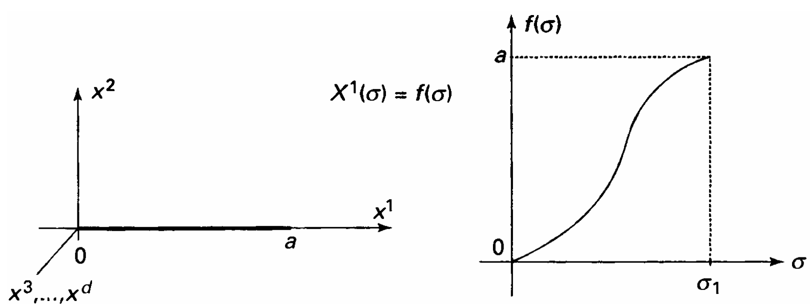
$$dA=\sqrt{\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\tau}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\sigma}\right)^2-\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\tau}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma}\frac{\partial X_{\nu}}{\partial\sigma}\right)}\,d\tau d\sigma=\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial X}{\partial\sigma}\right)^2-\left(\frac{\partial X}{\partial\tau}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial\sigma}\right)^2}\,d\tau d\sigma$$

$$= \sqrt{\left(\dot{X}\cdot X'\right)^{2} - \left(\dot{X}\right)^{2}\left(X'\right)^{2}}\, d\tau d\sigma \qquad (۸-۱)$$

حال که المان مساحت را ساختیم می توانیم کنش را بنویسیم. می دانیم که دیمانسیون کنش $ML^{2}T^{-1}$ است(حداقل از فرمولبندی فاینمن می دانیم که دیمانسیون کنش و $\hbar$ مساوی است و دیمانسیون $\hbar$ برابر است با $ML^{2}T^{-1}$) اما دیمانسیون المان مساحت، L^{2} است بنابراین به فاکتوری با دیمانسیون MT^{-1} نیاز داریم. چنین فاکتوری می تواند عبارتی با دیمانسیون نیرو تقسیم بر سرعت باشدکه $\frac{T_0}{c}$ اینگونه است. T_0 کشش(tension) ریسمان است بنابراین کنش را به این صورت پیشنهاد می‌کنیم:

$$S = \frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^{2} - (\dot{X})^{2}(X')^{2}} \qquad (۹-۱)$$

می خواهیم این پیشنهاد را بررسی کنیم یعنی می خواهیم بدانیم که آیا واقعا T_0 باید کشش ریسمان باشد؟ برای این منظور ریسمانی در حالت سکون و به طول a که در راستای محور x^1 قرار گرفته را در نظر می گیریم؛ پس مختصات نقاط ابتد وانتهای این ریسمان به ترتیب $x^1 = 0$ و $x^1 = a > 0$ می باشد و مختصه مربوط به بقیه جهتها برای نقاط ابتدا و انتها صفر است(شکل زیر) یعنی داریم:



$$X^1(\tau,\sigma) = f(\sigma), \quad X^2(\tau,\sigma) = X^3(\tau,\sigma) = \ldots = X^d(\tau,\sigma) = 0 \qquad (۱۰-۱)$$

$f(\sigma)$ یک تابع صعودی است که شرط زیر را برآورده می کند:

$$f(0) = 0 \;\; , \;\; f(\sigma_1) = a \qquad (۱۱-۱)$$

حال برای مختصه X^0 انتخابی به صورت $X^0 = c\tau$ انجام می دهیم. که به معنی آن است که $t = \tau$

مفهوم فیزیکی چنین انتخابی این است که منحنیهای τ ثابت روی جهانسطح برابرند با ریسمان در یک زمان مشخص. به این انتخاب، *پیمانه استاتیک*[1] می گویند. بنابراین داریم:

$$X^{\mu}=\left(c\tau, f(\sigma), \vec{0}\right) \Rightarrow \dot{X}^{\mu}=\left(c, 0, \vec{0}\right) \quad , \quad X'^{\mu}=\left(0, f'(\sigma), \vec{0}\right) \tag{۱۲-۱}$$

توجه داریم که $f'(\sigma)=\frac{df}{d\sigma}>0$ زیرا برای برآورده شدن (۱-۱۱) تابع f باید صعودی باشد. بنابراین کنش پیشنهادی به صورت مقابل است:

$$\begin{aligned} S &= \frac{T_0}{c}\int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{0-(-c)^2(f')^2} = T_0\int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{df}{d\sigma}\right) = T_0\int_{t_i}^{t_f} dt \left(f(\sigma_1)-f(0)\right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} T_0 a\, dt \end{aligned} \tag{۱۳-۱}$$

در اینجا به تفسیر نتیجه بدست آمده می پردازیم. می دانیم کنش برابر است با انتگرال زمانی لاگرانژی و در اینجا $L=T-V=-V$ (ریسمان ساکن است) بنابراین داریم

$$S=\int_{t_i}^{t_f}(-V)\, dt \tag{۱۴-۱}$$

مقایسه عبارت اخیر با نتیجه ما نشان می دهد که $V=-T_0 a$. اما می دانیم که برای یک ریسمان با کشش T_0 عبارت $T_0 a$ برابر است با انرژی ای که باید صرف شود تا طول a از این ریسمان ساخته شود. از طرفی برای ریسمان ما انرژی کل همان انرژی سکون یعنی V است بنا براین اگر کنش پیشنهادی را در (-1) ضرب کنیم همه چیز سازگار خواهد شد (انرژی پتانسیل مثبت خواهد شد). به این ترتیب نشان دادیم که T_0 باید tension باشد وکنش ریسمان به شکل زیر خواهد بود که به آن کنش Nambu-Goto می گوییم:

$$S=-\frac{T_0}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X})^2(X')^2} \tag{۱۵-۱}$$

این کنش دو ویژگی مهم دارد: ناوردایی تحت بازپارامترسازی وهمچنین ناوردایی تحت تبدیلات لورنتس که در ادامه به اینها برمی‌گردیم.

---

[1] static gauge

پیشتر گفتیم آزمایشگرانی که با هادرونها سروکار داشتند بین جرم (انرژی) و اسپین این ذرات رابطه ای به شکل $J/\hbar \propto E^2$ یافته بودند ثابت این تناسب α' است که به آن پارامتر شیب[1] می‌گویند. با فرض اینکه هادرونها ریسمانهای صلب چرخنده باشند می توان اسپین آنها را حساب کرد که برابر است با $J = \frac{1}{2\pi T_0 c} E^2$ بنابراین در نظریه ریسمان α' عبارتست از:

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c} \quad , \quad T_0 = \frac{1}{2\pi \alpha' \hbar c} \tag{۱۶-۱}$$

در دستگاه واحدهای طبیعی $(\hbar = c = 1)$ خواهیم داشت $T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ بنابراین شکل کنش به صورت زیر خواهد بود:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \tag{۱۷-۱}$$

α' تنها پارامتر نظریه ریسمان است و دیمانسیون مجذور طول دارد. طول ریسمان (ℓ_s) و α' با هم ارتباط دارند. برای اثبات این مطلب ریسمان صلب چرخنده ای به طول ℓ_s در نظر می گیریم که حول مرکزش می چرخد. می‌دانیم که انتهای ریسمان با سرعت نور می چرخد بنابراین فرکانس چرخش، برابر است با $\omega = 2c/\ell_s$؛ از طرفی در[۱] نشان داده شده است که انرژی کل ریسمان چرخنده صلب از حاصلضرب $\pi/2$ طول ریسمان در T_0 بدست می آید. از طرف دیگر یک نوسانگر هماهنگ داریم بنابراین:

$$\frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{\pi}{2} T_0 \ell_s \;\Rightarrow\; \frac{\hbar c}{\ell_s} = \frac{\ell_s}{4\alpha' \hbar c} \;\Rightarrow\; \ell_s = 2\hbar c \sqrt{\alpha'} \tag{۱۸-۱}$$

کنش Nambu-Goto را هنوز می توان به شکل ساده تری نوشت؛ داشتیم که

$$-ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{۱۹-۱}$$

اندیسهای α و β روی مقادیر ۱و۲ می‌چرخند $(\xi^1 = \tau \,,\, \xi^2 = \sigma)$. متریک وابسته[2] که متریک جهانسطح است را به این صورت معرفی می کنیم:

---

[1] slope parameter

[2] induced metric

$$\gamma_{\alpha\beta}=\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\xi^\beta}=\frac{\partial X}{\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial X}{\partial\xi^\beta}=\begin{pmatrix}(\dot{X})^2 & \dot{X}\cdot X'\\ \dot{X}\cdot X' & (X')^2\end{pmatrix} \tag{۲۰-۱}$$

بنابراین می توان کنش Nambu-Goto را به این شکل نوشت:

$$S=-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\sqrt{-\gamma}\quad,\quad \gamma=\det(\gamma_{\alpha\beta}) \tag{۲۱-۱}$$

می‌توان نشان داد کنشی به این شکل تحت بازپارامترسازی ناورداست؛ این موضوع در [۱] آمده است.

۳-۱ معادلات حرکت و D-غشا ها

حال که کنش پیدا شد می‌توانیم معادلات حرکت را از کمینه کردن آن بدست آوریم. با معرفی چگالی لاگرانژی به صورت:

$$\mathcal{L}\left(\dot{X}^\mu,X^{\mu\prime}\right)=-\frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-\dot{X}^2X'^2} \tag{۲۲-۱}$$

می توان کنش را به شکل روبرو نوشت: $S=\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_0^{\sigma_1}d\sigma\,\mathcal{L}\left(\dot{X}^\mu,X^{\mu\prime}\right)$

$$\Rightarrow\delta S=\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_0^{\sigma_1}d\sigma\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu}\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}}\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma}\right] \tag{۲۳-۱}$$

که وردشها را به شکل $\delta\dot{X}^\mu=\delta\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\right)=\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau}\quad,\quad\delta X^{\mu\prime}=\delta\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}\right)=\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma}$ نوشته ایم.

برای سادگی و همچنین جلوگیری از تکرار نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{P}^\tau_\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu}=-\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu-X'^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{\left(\dot{X}\cdot X'\right)^2-\dot{X}^2X'^2}}\quad,\quad\mathcal{P}^\sigma_\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}}=-\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu-\dot{X}^2X'_\mu}{\sqrt{\left(\dot{X}\cdot X'\right)^2-\dot{X}^2X'^2}} \tag{۲۴-۱}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\delta S=\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_0^{\sigma_1}d\sigma\left[\frac{\partial}{\partial\tau}(\delta X^\mu\mathcal{P}^\tau_\mu)+\frac{\partial}{\partial\sigma}(\delta X^\mu\mathcal{P}^\sigma_\mu)-\delta X^\mu(\frac{\partial\mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial\tau}+\frac{\partial\mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial\sigma})\right] \tag{۲۵-۱}$$

جمله اول در طرف راست رابطه بالا برحسب τ یک دیفرانسیل کامل است و پس از انتگرال گیری متناسب با $\delta X^\mu(\tau_f,\sigma)$ و $\delta X^\mu(\tau_i,\sigma)$ خواهد بود. طبق اصل وردش، ما همیشه طوری وردش می‌دهیم

که در ابتدا و انتها تغییری نداشته باشیم یعنی $\delta X^{\mu}(\tau_i,\sigma)=\delta X^{\mu}(\tau_f,\sigma)=0$ همچنین با شرط نیومن در ابتدا و انتهای ریسمان باز یعنی $\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}(\tau,0)=\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}(\tau,\sigma_1)=0$، جملات اول ودوم رابطه بالا صفر خواهند بود و شرط کمینه بودن کنش منجر می‌شود به:

$$\delta S=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial \mathcal{P}^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau}+\frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma}=0 \qquad (۲۶\text{-}۱)$$

این، معادله حرکت ریسمان نسبیتی (باز و بسته) است.

در اینجا بد نیست که شرایط مرزی انتهای ریسمان باز را بررسی کنیم. جمله دوم در (۱-۲۵) می‌تواند به صورت نیومن $\left(\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}=0\right)$ در بعضی جهات، و دیریشله $\left(\delta X^{\mu}=0\right)$ در جهات دیگر صفر شود به عبارت دیگر نقاط ابتدا و انتهای ریسمان باز در جهتهای مختلف فضا می توانند آزاد یا مقید باشند مثلا در فضای سه بعدی اگر مختصات x وy دو انتهای ریسمان، آزاد و مختصه z ابتدا و انتها یک مقدار ثابت c باشد آنگاه دو انتهای ریسمان روی صفحه z=c قرار خواهد گرفت ویا اگر مختصه x دو انتها، آزاد و y و z دو مقدار ثابت c و d را دارا باشند آنگاه دو انتهای ریسمان روی خط (y=c,z=d) قرار دارد. در این صورت می‌توان موجودی تعریف کرد به صورت مکان هندسی نقاطی که دو انتهای ریسمان در آن قرار می‌گیرند. به این موجود D -غشا (D-brane) می‌گویند. در مورد اولِ مثال بالا، D-غشا یک صفحه است و برای مورد دوم، یک خط. همچنین امکان دارد که دو انتهای ریسمان در تمام مختصات فضا آزادی حرکت داشته باشند که در این صورت یک D-غشاء فضا پرکن[1] داریم. D-غشاها بسته به ابعادی که دارند با یک اندیس مشخص می‌شوند مثلا صفحه، یک $D_2-\text{brane}$ است و خط، یک $D_1-\text{brane}$ و ... . در نظریه ریسمان D-غشاها موجوداتی بنیادی هستند.

۱-۴ انتخاب پارامتریزیشن

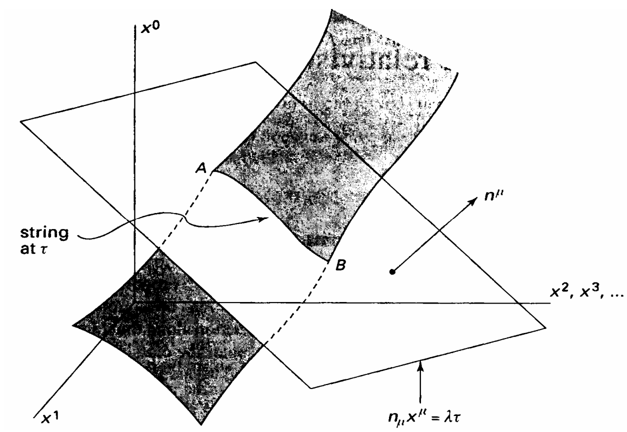
قبلا به پیمانه استاتیک اشاره شد که در آن $\tau=t$ بود، به عبارت دیگر $X^{0}(\tau,\sigma)=c\tau$. در حالت کلی

[1] space-filling

می توان τ را به صورت ترکیب خطی ای از بقیه مختصات ریسمان نوشت یعنی:

$$n_\mu X^\mu(\tau,\sigma)=\lambda\tau \qquad (۲۷-۱)$$

که اگر انتخاب کنیم $n_\mu=(1,0,0,...,0)$ به پیمانه استاتیک می رسیم یعنـی در پیمانـه اسـتاتیک n^μ در جهت X^0 است، به شکل نگاه کنید:



بنابراین ابرصفحه عمود بر n^μ یک ابرصفحه زمان-ثابت است اما در حالت کلی که در ادامه آن را دنبال می کنیم، اینگونه نیست. پارامتریزیشن τ را به این صورت انجام می دهیم: بردار دلخواه n_μ را انتخاب می‌کنیم وصفحه عمود بر آن را با جهانسطح ریسمان قطع می‌دهیم، منحنی بدست آمده همان پارامتریزیشن τ است. می توان نشان داد که برای ریسمان باز در راستاهایی که آزادی حرکت وجود دارد (درون D-غشا) تکانه p^μ پایسته است اما در تمام راستاها اینگونه نیست؛ با این وجود n^μ را طوری انتخاب می‌کنیم که $n\cdot p$ پایسته باشد. حال با استفاده از این کمیت ناوردا شرط پیمانه ای (۱-۲۷) را به این صورت می نویسیم:

$$n\cdot X(\tau,\sigma)=\tilde{\lambda}(n\cdot p)\tau \qquad (۲۸-۱)$$

اما در این رابطه $\tilde{\lambda}$ چیست؟ برای پاسخگویی به این سوال دوباره به سراغ تحلیل ابعادی می رویم. کمیت $n\cdot X$ دیمانسیون طول و $n\cdot p$ دیمانسیون تکانه دارد، τ هم که از جنس زمان است بنابراین دیمانسیون $\tilde{\lambda}$ به صورت $M^{-1}T$ است که برابر با دیمانسیون سرعت تقسیم بر نیرو می‌باشد. بنابراین طبیعی خواهد بود که $\tilde{\lambda}$ را به این صورت بسازیم: $\tilde{\lambda}=c/T_0=2\pi\alpha'\hbar c^2$ که در آن از (۱-۱۶) استفاده کردیم. پس $\tilde{\lambda}$ متناسب با α' است. در نهایت برای ریسمان باز و در دستگاه واحدهای طبیعی داریم