وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

بررسی نامساوی کشی - شوارتز درمدول های نیم ضرب داخلی روی C^*-جبرها

توسط:
زیبامیرمحمدولی

استاد راهنما:
دکترنرگس تولایی

استاد مشاور:
دکتر سید علی تقوی

۲۸ شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدرومادرم و تقدیم به
همسر عزیزم رضاعباسی. .

چکیده

بررسی نامساوی کشی -شوارتز درمدول های نیم ضرب داخلی روی C^*-جبرها

به وسیله‌ی:
زیبامیرمحمدولی

هدف ما بررسی نامساوی کشی-شوارتز در مدول‌های پیش هیلبرت روی C^* -جبرها است. ابتدا تعاریف وخواصی از C^* -جبرها، C^* -مدول‌های پیش هیلبرت وماتریس گرام را بیان می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن یک C^* مدول پیش هیلبرت و ساختن نیم‌ضرب‌های داخلی جدید و با استفاده از نیم‌ضرب اولیه آن، نامساوی‌هایی مانند نامساوی استروفسکی ، نامساوی گراس و نامساوی مربوط به ماتریس گرام را بدست می‌آوریم. با انتخاب یک عنصرمخالف صفر از C^* -جبر و با یک روند استقرایی، دنباله‌ای صعودی از عناصر آن C^* -جبر را می‌سازیم که با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز و بکارگیری نتایجی از نظریه عملگرها، وارون آن عنصر از C^* -جبر را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: C^* -مدول پیش هیلبرت، عملگرمثبت، نامساوی گراس، ماتریس گرام، نامساوی استروفسکی، C^* - جبر،نامساوی کشی -شوارتز.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در ریاضیات مفهومC^*- مدول هیلبرت در واقع تعمیمی از مفهوم یک فضای هیلبرت است که اولین بار استفاده از این فضاها توسط **کاپلانسکی**[۱] [۱۱] صورت گرفت و در دهه هفتاد، تحقیقات بر روی C^* -مدول‌های هیلبرت در زمینه نمایشهای القاء شده C^* -جبرها توسط **ریفل**[۲] [۱۷] ادامه یافت. فصل اول شرح اصطلاحات و نمادگذاری‌های به‌کار رفته در خلال پایان‌نامه است که بعداً لازم خواهد شد. در این فصل به یادآوری مطالبی در خصوص C^*-جبرها را می پردازیم.پس از آن با C^* -مدول‌های هیلبرت آشنا می شویم.

در فصل دوم یک رابطه تساوی را در فضای ضرب داخلی حقیقی اثبات می کنیم و با استفاده از مثبت بودن یک طرف تساوی یک نامساوی بدست می‌آوریم که منجر به برقراری نامساوی گراس و استروفسکی در فضای ضرب داخلی حقیقی می‌شود.

در فصل سوم نامساوی استروفسکی را در C^*- مدول هیلبرت بررسی می کنیم و کاربرد آن را در C^* -جبرها مشاهده می کنیم.

مشاهده می کنیم صفر شدن ضرب داخلی دو عنصر معادل صفرشدن حاصل‌ضرب ریشه‌های آن دو عنصر است. خواهیم دید در یک C^*-جبر تحت چه شراطی برای دو عنصر یکه که حاصل ضربشان صفر است جمع ریشه‌های آن‌ها نیز صفر خواهد شد.

در فصل چهارم نامساوی کشی-شوارتز و بعضی از نامساوی‌های مرتبط با آن را دریک مدول نیم ضرب‌داخلی روی C^* -جبر $\mathcal{A}$ رابررسی می کنیم.

در این فصل خواهیم دید که با استفاده از یک نیم ضرب‌داخلی می‌توان نیم‌ضرب‌های دیگری نیز تعریف کرد. با ماتریس گرام آشنا می‌شویم که یک ماتریس مثبت است و مثبت بودن آن معادل با

[۱] Kaplansky

[۲] Rieffel

برقراری نامساوی کشی-شوارتز خواهد شد.

مشاهده می کنیم نامساوی استروفسکی شکل خاصی از نامساوی کشی-شوارتز است بدین منظورکافی است نیم‌ضرب داخلی القایی را روی فضای ضرب داخلی تعریف کرد.

بااستفاده از نامساوی کشی -شوارتز و بکارگیری نتایجی از نظریه عملگرها، وارون یک عنصر ازC^*-جبر را در صورت وجود به دست می آوریم.

فصل ۱

پیش نیاز ها

در فصل پیش رو ابتدا به یادآوری مطالبی در خصوص C^*-جبرها می‌پردازیم. پس از آن C^*-مدول‌های هیلبرت را که در واقع تعمیمی از فضاهای هیلبرت هستند، بررسی می‌کنیم.

۱-۱ فضاهای برداری نرم دار

اگر $\mathcal{X}$و$\mathcal{Y}$دو فضای برداری نرم دار باشند فضای همه نگاشت های خطی از $\mathcal{X}$ به$\mathcal{Y}$ رابا $L\left(\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)$ نشان می دهیم. به آسانی مشاهده می‌شودکه $L\left(\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)$ یک فضای برداری است ونگاشت $\| T \| \longrightarrow T$ یک نرم روی $L\left(\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)$ است که در آن $\| T \|$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\| T \| = Sup\{\| Tx \|; \quad \| x \| = ۱\}$$

گزاره ۱.۱.۱. *اگر $\mathcal{Y}$ کامل باشد، آنگاه $L\left(\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)$ کامل است.*

اثبات. به [۸، قضیه ۵.۴] رجوع شود. □

$B\left(\mathcal{X},\mathcal{Y}\right)$ را فضای همه نگاشت های خطی کران دار از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{Y}$ در نظر می گیریم.

۱-۲ فضای اندازه

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{X}$ مجموعه‌ای مجهز به یک σ -جبر مانند $\mathcal{M}$ باشد. یک اندازه روی $\mathcal{M}$ یا $\left(\mathcal{X},\mathcal{M}\right)$ ، تابعی مانند $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [\circ,\infty]$ است به طوری که:

۱. $\mu(\emptyset)= \circ$

۲. اگر $\{E_i\}_{۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{M}$ باشند آن‌گاه $\mu(\bigcup_{۱}^{\infty} E_i)= \sum_{۱}^{\infty} \mu(E_i)$.
این ویژگی راخاصیت جمعی شمارش پذیر می‌نامند.

چناچه $\mathcal{X}$ یک مجموعه و $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ یک σ -جبر باشد. $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر نامیده می‌شود ومجموعه‌های واقع در $\mathcal{M}$ ،مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند. اگرμ یک اندازه روی $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ باشد، $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ را یک فضای اندازه می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{X}$ مجموعه‌ای ناتهی، $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$. قرار می‌دهیم

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [\circ, \infty]$$

$$\mu(A) =: Card(A) \quad (A \in \mathcal{M})$$

بوضوح یک اندازه روی $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ است که آن را اندازه شمارشی می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک مجموعه وΩ یک σ -جبر از زیر مجموعه‌های $\mathcal{X}$ و $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. یک اندازه طیفی برای $(\mathcal{X}, \Omega, \mathcal{H})$، یک تابع مانند$E : \Omega \longrightarrow B(\mathcal{H})$ است به طوری که

۱.برای هر Δ در Ω، $E(\Delta)$ یک تصویر در$B(\mathcal{H})$ باشد،

۲. $E(\emptyset) = \circ$و$E(\mathcal{X}) = ۱$،

۳. $\forall \Delta_۱, \Delta_۲ \in \Omega; E(\Delta_۱ \cap \Delta_۲) = E(\Delta_۱)E(\Delta_۲)$،

۴. اگر دنباله $\{\Delta_i\}_۱^{\infty}$ مجموعه های مجزا باشد، آن‌گاه $E(\bigcup_۱^{\infty} \Delta_i) = \sum_۱^{\infty} E(\Delta_i)$.

۱-۳ فضاهای L^P

فرض کنیم $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه و $\circ < p < \infty$. $L^p(\mu)$ مجموعه همه توابع اندازه پذیری چون $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که $\parallel f \parallel_p= \left(\int \mid f \mid^p d\mu\right)^{\frac{۱}{p}} < \infty$. اگر f تابعی اندازه پذیر رری $\mathcal{X}$ باشد،تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_\infty = inf\{a \geq \circ : \quad \mu(\{x : \quad \mid f(x) \mid > a\}) = \circ\}$$

با این قرارداد که $inf\emptyset = \infty$.

$\|f\|_\infty$ سوپریمم اساسی $\mid f \mid$ نامیده می شود وگاهی اوقات به صورت

$$\parallel f \parallel_\infty= essup_{x\in\mathcal{X}} \mid f(x) \mid$$

نوشته می شود. اکنون $L^{\infty}(\mathcal{X})$ مجموعه همه توابع اندازه پذیر چون $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که $\|f\|_{\infty} < \infty$.

۱-۴ فضای هیلبرت

مهم‌ترین فضاهای باناخ و از جمله آن‌هایی که می‌توان آنالیز بسیار دقیق را روی آن انجام داد فضاهای هیلبرت هستند که تعمیم مستقیمی از فضاهای اقلیدسی با بعد متناهی می‌باشند. عملگرها در فضای هیلبرت با ضرب داخلی بیان می‌شوند.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید $(\mathcal{X}, +, .)$ یک فضای‌برداری باشد. یک ضرب داخلی روی فضای $\mathcal{X}$ تابعی است مانند $\langle .,. \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ بطوری که در خواص زیر صدق کند.

۱. $\langle x, x \rangle \geq 0$

۲. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

۳. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

۴. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

۵. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$

برای هر $x, y, z \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{C}$. فضای $\mathcal{X}$ همراه با ضرب داخلی فوق را یک فضای **پیش-هیلبرت**[۱] می‌نامیم.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید $(\mathcal{X}, \langle .,. \rangle)$ یک فضای پیش‌هیلبرت باشد، اگر برای هر $x \in \mathcal{X}$ تعریف کنیم

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

در این صورت $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار می‌باشد.

قضیه ۳.۴.۱. ***(نامساوی کشی-شوارتز)*** [۲] *فرض کنید $(\mathcal{X}, \langle .,. \rangle)$ یک فضای پیش‌هیلبرت باشد. در این صورت*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

[۱] pre-Hilbert

[۲] Cauchy-Schwarz

اگر بردار x و بردار y وابسته خطی باشند، در این صورت نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود و خواهیم داشت :

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$$

اثبات. به [۸، قضیه ۵.۱۹] رجوع شود. □

تعریف ۴.۴.۱. فضای پیش‌هیلبرت $(\mathcal{X},\langle.,.\rangle)$ را یک فضای **هیلبرت** گوییم، هرگاه $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد.

مثال ۵.۴.۱. $(\mathbb{C}^k,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ همراه با ضرب داخلی که به صورت زیر تعریف می‌کنیم، یک فضای هیلبرت می‌باشد.

$$\langle (z_1,z_2,...,z_k),(w_1,w_2,...,w_k)\rangle = z_1\overline{w_1}+...+z_k\overline{w_k} = \sum_{i=1}^{k} z_i\overline{w_i}$$

مثال ۶.۴.۱. $(C_b[0,1],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ تحت ضرب داخلی زیر یک فضای پیش‌هیلبرت می‌باشد که فضای هیلبرت نیست.

$$\langle f,g\rangle = \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\, dx} = \|f\|_2$$

می‌دانیم دنباله $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ که $f_n(x) = x^n$ یک دنباله کشی روی بازه‌$[0,1]$ است . فرض کنیم این دنباله همگرادر نرم فوق باشد. در این صورت تابع پیوسته وکراندار f وجود دارد به‌طوری‌که $f_n \longrightarrow f$ لذا داریم

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad a.e$$

ازطرفیf_nوf توابعی پیوسته هستند لذا داریم

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad (x\in[0,1])$$

در نتیجه

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

که نشان می‌دهد

تابعی ناپیوسته است وکه با نحوه انتخاب f در تناقض است.

۱-۵ جبرهای باناخ

فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{C}$ همراه با نگاشت ضربی $ab \longrightarrow (a,b)$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به توی $\mathcal{A}$ که برای هر $a,b,c \in \mathcal{A}$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند، یک جبر نام دارد.

۱. $a(bc) = (ab)c$

۲. $(a+b)c = ac + bc, \quad a(b+c) = ab + ac$

۳. $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b).$

اگر ضرب تعریف شده در بالا جابجایی باشد، یعنی $ab = ba$ برای هر $a,b \in \mathcal{A}$، آنگاه $\mathcal{A}$ را یک جبر جابجایی نامند. عنصر e در جبر $\mathcal{A}$ را عنصر همانی گوییم، هرگاه $e \neq 0$ و برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم:

$$ea = ae = a.$$

عنصر همانی در صورت وجود یکتاست. جبر $\mathcal{A}$ را یکدار گویند، هرگاه دارای عنصر همانی باشد.
فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و $(\mathcal{A}, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. در اینصورت نرم $\|.\|$ روی $\mathcal{A}$ یک نرم جبری نام دارد، اگر

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad (a,b \in \mathcal{A}).$$

در این صورت $(\mathcal{A}, \|.\|)$ یک **جبر نرمدار** نامیده می شود.
جبر نرمدار $(\mathcal{A}, \|.\|)$ را یک **جبر باناخ** گویند، هرگاه تحت نرم $\|.\|$ یک فضای باناخ باشد. جبر نرمدار $(\mathcal{A}, \|.\|)$ را یکدار نامیم، هرگاه $\mathcal{A}$ یکدار بوده و $\|e\| = 1$.

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. زیرفضای I را یک ایده آل چپ (به ترتیب، یک ایده آل راست) $\mathcal{A}$ گویند، هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ و هر $x \in I$، $ax \in \mathcal{A}$ (به ترتیب $xa \in \mathcal{A}$). I را یک ایده آل دو طرفه گویند، هرگاه هم ایده آل چپ و هم ایده آل راست باشد.

مثال ۱.۵.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ غیر یکدار باشد. مجموعه $\mathcal{A}_e = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ همراه با اعمال،

۱. $(x,\lambda)(y,\mu) = (xy + \lambda y + x\mu, \lambda\mu)$

۲. $(x,\lambda) + (y,\mu) = (x+y, \lambda+\mu)$

۳. $\mu(x,\lambda) = (\mu x, \mu\lambda)$

۴. $\|(x,\lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$

که $x, y \in \mathcal{A}$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$، یک جبر باناخ یکدار با همانی $e = (\circ, ۱)$ است که آن‌را یکدارسازی شده $\mathcal{A}$ گویند. اگر $\mathcal{A}$ جابجایی باشد آن‌گاه $\mathcal{A}_e$ نیز جابجایی است. $\mathcal{A} \times \{\circ\}$ یک ایده آل ماکزیمال دوطرفه بسته از $\mathcal{A}_e$ می باشد که معمولاً با $\mathcal{A}$ یکی گرفته می‌شود.

تعریف ۲.۵.۱. اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ باشند، نگاشت $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را یک همریختی گوییم، هرگاه T یک نگاشت خطی باشد که ضرب را نیز حفظ نماید، یعنی:

$$T(ab) = T(a)T(b), \quad (a, b \in \mathcal{A}).$$

هنگامی که $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ دسته‌ای مهم از همریختی‌ها روی $\mathcal{A}$ به دست می‌آید که به آن‌ها تابعک‌های خطی ضربی می‌گوییم و به جای نماد T از نماد φ بهره می‌گیریم. هر تابعک خطی ضربی $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ به طور خودکار پیوسته است و در واقع $\|\varphi\| \leq ۱$.

۱-۶ طیف و شعاع طیفی

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد، عنصر $a \in \mathcal{A}$ را وارونپذیر گوییم، هرگاه عنصر $b \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد بطوری که

$$ab = ba = e$$

$Inv(\mathcal{A})$ به مجموعه‌ی تمام عناصر وارونپذیر $\mathcal{A}$ اشاره می‌کند.
فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار و $a \in \mathcal{A}$. طیف عنصر a را در جبر باناخ $\mathcal{A}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \lambda e - a \notin Inv(\mathcal{A})\}$$

و اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد، شعاع طیفی a را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)} | \lambda |, \qquad (a \in \mathcal{A})$$

قضیه ۱.۶.۱. *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار و $a \in \mathcal{A}$. در این صورت*

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

اثبات. به [۹، قضیه۱.۲.۷] رجوع شود. □

مثال ۲.۶.۱. فرض کنید

$$A = \mathcal{M}_{۲}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

فضایی از تمام ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌هایی در اعداد مختلط باشد. بوضوح $\mathcal{M}_{۲}(\mathbb{C})$ همراه با جمع و ضرب معمولی ماتریس ها یک جبر می‌باشد، اگر نرم عملگری را $\| \cdot \|_{۱}$ در نظر بگیریم یعنی

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_{۱} = \mid a \mid + \mid b \mid + \mid c \mid + \mid d \mid$$

آنگاه $\mathcal{M}_{۲}(\mathbb{C})$ یک جبر باناخ یکدار می‌باشد، براحتی می‌توان نشان داد که طیف و شعاع طیفی برای یک عضو از $\mathcal{M}_{۲}(\mathbb{C})$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{A}}(x) &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - x \notin Inv(\mathcal{A})\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}; det(\lambda I - x) = ۰\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \ \text{مقادیر ویژه x می‌باشند}\} \end{aligned}$$

و شعاع طیفی $r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)} \mid \lambda \mid$ می‌باشد.

قضیه ۳.۶.۱. *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد و $x \in \mathcal{A}$. در این صورت*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) \neq \varnothing$$

اثبات. به [۱۶، قضیه ۱.۲.۵] رجوع شود. $\square$

قضیه ۴.۶.۱. ***(گلفند-ماژور)***[۳] *اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکانی باشد، بطوری که هر عضو غیر صفر آن معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.*

اثبات. به [۱۶، قضیه ۱.۲.۶] رجوع شود. $\square$

قضیه ۵.۶.۱. *$Inv(\mathcal{A})$ یک مجموعه باز می‌باشد.*

اثبات. به [۹، قضیه۱.۴] رجوع شود. $\square$

[۳] Gelfand-Mazure

قضیه ۶.۶.۱. *$\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ یکدار در نظر می‌گیریم. اگر $x \in \mathcal{A}$ و $\|x\| < ۱$. آن‌گاه $e - x \in Inv(\mathcal{A})$ و*

$$(e-x)^{-۱} = e + \sum_{n=۱}^{\infty} x^n$$

اثبات. به [۹، لم ۱.۳] رجوع شود. □

قضیه ۷.۶.۱. *اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in \mathcal{A}$. در این صورت*

۱. $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \;;\; \mid \lambda \mid \leq \|a\|\}$.

۲. *$\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ یک مجموعه‌ی بسته می‌باشد.*

۳. *$\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ یک مجموعه‌ی فشرده می‌باشد.*

۴. $r(a) = \max_{\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)} \mid \lambda \mid$

اثبات. به [۱۶، لم ۱.۲.۴] رجوع شود. □

گزاره ۸.۶.۱. *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد، $x \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$. در این صورت*

۱. $\sigma_{\mathcal{A}}(x^n) = \{\lambda^n \;\; ; \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)\}$

۲. $\sigma_{\mathcal{A}}(p(x)) = p(\sigma_{\mathcal{A}}(x)) = \{p(\lambda) \;\; ; \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)\}$ *برای هر چندجمله‌ای $p(z)$،*

۳. $\sigma_{\mathcal{A}}(\alpha x) = \{\alpha\lambda; \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)\}$.

اثبات. به [۱۶، قضیه ۱.۲.۱] رجوع شود. □

گزاره ۹.۶.۱. *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد، $x \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$. در این صورت*

۱. $r(\alpha x) = \mid \alpha \mid r(x)$

۲. $r(x^n) = r(x)^n$

۳. $r(xy) = r(yx)$

اثبات. به [۱۶، قضیه ۱.۲.۱] رجوع شود. □

تعریف ۱۰.۶.۱. فرض کنیم XوY دو فضای باناخ باسند ، توپولوژی روی $L(X,Y)$ که به وسیله نگاشت $(x \in X) \quad T \longmapsto Tx$ تو لید می‌شود ، توپولوژی عملگری قوی روی $L(X,Y)$ نامیده می شود.

۱-۷ C^*-جبرها

یک **برگشت** بر جبر $\mathcal{A}$ نگاشتی است به‌صورت زیر:

$$\begin{cases} * : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ \qquad x \longmapsto x^\star \end{cases}$$

به‌طوری‌که برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$؛

۱. $(x+y)^\star = x^* + y^*$

۲. $(xy)^* = y^* x^*$

۳. $(x^*)^* = x$

۴. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

.

تعریف ۱.۷.۱. جبر $\mathcal{A}$ یک **$*$-جبر** نامیده می‌شود، اگر دارای یک برگشت باشد. هم‌چنین اگر جبر $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ باشد به‌طوری‌که

$$\forall\, x \in \mathcal{A}\,;\ \|x^*\| = \|x\|.$$

تعریف ۲.۷.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $*$-جبر باناخ باشد.

۱. عنصر a را در $*$- جبر $\mathcal{A}$ خودالحاق یا هرمیتی گوییم، هرگاه $a = a^*$.

۲. عنصر a را نرمال گوییم، هرگاه $aa^* = a^*a$.

۳. عنصر $a \in \mathcal{A}$ را خود توان یا تصویر گوییم، اگر $a = a^۲$.

۴. عنصر $a \in \mathcal{A}$ را تصویر متعامد گوییم، اگر $a = a^* = a^۲$.

عناصر aa^* و a^*a خودالحاق می‌باشند.

تعریف ۳.۷.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $*$-جبر باناخ یکدارباشد عنصر $a \in \mathcal{A}$ را یکانی گوییم، اگر

$$aa^* = a^*a = ۱.$$

اگر $a^*a = ۱$ ، آنگاه a را طول‌پایی گوییم و اگر $aa^* = ۱$، آنگاه a را هم‌طول‌پایی می‌نامیم.

تعریف ۴.۷.۱. یک $*$ -جبر باناخ را یک C^*- جبر گوییم، هرگاه

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (a \in \mathcal{A})$$

یک $*$ -زیر جبر بسته از یک C^*- جبر به‌طور واضح C^*- جبر می‌باشد.
اگر C^*- جبر $\mathcal{A}$ دارای همانی ۱ باشد، آن‌گاه بوضوح $\|1\| = 1$، زیرا $\|1\| = \|1^*1\| = \|1\|^2$.
بطور مشابه، اگر a تصویرمتعامد غیر صفر باشد، آن‌گاه $\|a\| = 1$.

مثال ۵.۷.۱. میدان عددی $\mathbb{C}$ همراه با برگشت زیر یک C^*- جبر یکانی می‌باشد.

$$\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda \longmapsto \overline{\lambda} \end{cases}$$

مثال ۶.۷.۱. فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد، آن‌گاه $C_0(\Omega)$ همراه با برگشت زیر یک C^*- جبر می‌باشد.

$$\begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \\ f \longmapsto \overline{f} \end{cases}$$

اثبات. به [۳، قضیه ۱.۷.۸] رجوع شود. □

مثال ۷.۷.۱. بطور مشابه تمام جبرهای زیر همراه با برگشت فوق C^*- جبر می‌باشند.

۱. $L^\infty(\Omega, \mu)$ جایی که (Ω, μ) فضای اندازه باشد.

۲. اگر Ω یک فضای توپولوژیکی باشد، $C_b(\Omega)$ مجموعه تمام توابع مختلط مقدار پیوسته کراندار روی Ω.

۳. $\ell^\infty(S)$ مجموعه تمام توابع مختلط مقدار روی مجموعه ناتهی S همراه با اعمال جمع وضرب نقطه‌ای و نرم

$$\|f\|_\infty = SUP_{x\in S} \mid f(x) \mid .$$

مثال ۸.۷.۱. اگر $\mathcal{X}$ فضای هیلبرت باشد، آن‌گاه $B(\mathcal{X})$ همراه با نرم عملگری یک C^*- جبر می‌باشد.

مثال ۹.۷.۱. در حالت خاص اگر $\mathcal{X}$ یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. آن‌گاه $B(\mathcal{X}) \cong M_n(\mathbb{C})$ یک C^*-جبر است.

قضیه ۱۰.۷.۱. *اگر a یک عضو خودالحاق از C^*- جبر $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه $r(a) = \|a\|$.*

اثبات. به [۱۶، قضیه ۲.۱.۱] رجوع شود. □

لم ۱۱.۷.۱. *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $*$ یک برگشت روی آن باشد بطوری که*

$$\|a\|^{2} \leq \|a^*a\| \quad (a \in \mathcal{A})$$

در این صورت

۱. $\|a\|^{2} = \|a^*a\| \quad (a \in \mathcal{A})$ ،

۲. $\mathcal{A}$ یک C^*- *جبر می‌باشد،*

۳. *اگر $\mathcal{A}$ یکدارباشد، آن‌گاه* $e = e^*$.

اثبات. به [۱۶، لم ۲.۱.۳] رجوع شود. □

۱–۸ عناصر مثبت C^*-جبرها

در این قسمت یک رابطه مرتب جزیی روی عناصر هرمیتی C^*- جبرها بیان می‌کنیم. نتیجه اصلی این بخش در قالب یک قضیه بیان می‌شود که اگر a عضو دلخواهی از C^*- جبر $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه a^*a مثبت می‌باشد.

تعریف ۱.۸.۱. عنصر a از $*$- جبر $\mathcal{A}$ را مثبت گوییم، هرگاه a هرمیتی باشد و طیف عنصر a زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد، یعنی $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ و با $a \geq 0$ نشان می‌دهیم .

قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A}^+ = \{a \in \mathcal{A} \quad , a \geq 0\}$$

به عنوان مثال فرض کنید Ω مجموعه‌ای نا تهی باشد، در این‌صورت عنصر f از C^*- جبر $L^\infty(\Omega)$ مثبت است اگر و فقط اگر $f(x) \geq 0$ برای تمام $x \in \Omega$.

قضیه ۲.۸.۱. *فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $T \in B(\mathcal{H})$. در این صورت $T \geq 0$ اگر وفقط اگر* $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad (x \in \mathcal{H})$.

اثبات. به [۳، قضیه ۳.۸] رجوع شود. □

قضیه ۳.۸.۱. *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر و $a \in \mathcal{A}^+$. آن‌گاه عنصر یکتای $b \in \mathcal{A}^+$ وجود دارد بطوری که $a = b^{2}$. که آن را ریشه‌ی مثبت دوم a گوییم و با $a^{\frac{1}{2}}$ نمایش می‌دهیم.*
برای هر $a \in A$ ، ریشه‌ی مثبت دوم a^*a را با $|a|$ نمایش می‌دهیم.