بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۵۲۴

۱۰/۱۵

دانشگاه ارومیه

حاصلضرب سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروههای حل‌پذیر

اسمعیل عینعلی

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر هوشنگ بهروش

۱۳۸۹/۴/۸

دانشگاه ارومیه

شهریور ۱۳۸۸

مرکز اطلاعات مدارک علمی ایران
ثبت مدرک

۱۳۸۵۲۴

حق چاپ برای دانشگاه ارومیه محفوظ می باشد

پایان نامه آقای/خانم اسمعیل عینعلی به تاریخ ۸۸/۶/۲۴

شماره ۹۷۰ – ۲ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸/- هیجده ۲۰/ ...

قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر هوشنگ پروانه

۲- استاد مشاور : دکتر –

۳- داور خارجی : دکتر محمد علی اسدی

۴- داور داخلی : دکتر علی سرباز جانفدا

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سعید اسماعیل پاسخ

تقدیم به :

پدر بزرگوار

مادر مهربان

همسرم فداکار

و فرزند عزیزم امیرحسین

تقدیر و تشکر

خدا را سپاس می‌گویم از این که فرصتی دوباره برای آموختن دانستنیهای نو و تمرین تفکر ریاضی وار به من اعطا کرد. از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر هوشنگ بهروش که خالصانه مرا از گنجینه گهربار علم و تجربیات خود بهرمند نموده، و در نهایت صبر و شکیبایی اینجانب را تشویق و راهنمایی کردند تشکر می‌نمایم. همچنین از اساتید محترم و گرانقدر آقایان دکتر علی سرباز جانفدا و دکتر محمد علی اسدی که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، سپاسگزاری می‌نمایم. از همه معلمان و اساتیدی و دوستانی که در دوران تحصیل مرا یاری نمودند، کمال تشکر را دارم.

چکیده

در سال ۲۰۰۰، آیزاکس حدس زیر را بیان کرد.

حدس A : فرض کنیم گروه G حل پذیر و سرشت تحویل ناپذیر آن برابر با حاصلضرب دو سرشت صادق و تحویل ناپذیر باشد. در این صورت G دوری است.

آیزاکس نشان داد که حدس A برای گروههای حل پذیر با طول فتینگ حداکثر ۴ صحیح است و به خصوص برای گروههای زیرحل‌پذیر نیز صحیح می‌باشد.

در این پایان‌نامه، قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم G، M—گروه و سرشت تحویل ناپذیر آن برابر با حاصلضرب دو سرشت صادق و تحویل ناپذیر باشد. در این صورت G دوری است .

به‌علاوه آیزاکس حدس زیر را با حدس A ثابت کرد.

حدس B : فرض کنیم V، FG—مدول ساده و F میدانی با مشخصه p باشد. همچنین فرض کنیم $G = XY$ به طوری که $X, Y \leq G$ و X، Y دارای نقاط ثابت غیر صفر در V باشند. در این صورت G بر V به طور بدیهی عمل می‌کند.

در این رابطه قضیه زیر را ثابت می کنیم.

قضیه: فرض کنیم V، FG—مدول ساده و F میدانی با مشخصه p باشد. همچنین فرض کنیم $G = XY$ به طوری که $X, Y \leq G$ و X، Y دارای نقاط ثابت غیر صفر در V باشند. اگر $G/O_{p,p'}(G)$ پوچتوان باشد، آنگاه G بر V به طور بدیهی عمل می‌کند.

پیشگفتار

در نظریه نمایش گروه، یک گروه به صورت گروهی از ماتریسها مورد مطالعه قرار می گیرد و یکی از ابزارهای اساسی شناخت کامل گروههای متناهی است. نمایش معمولی (نمایش در میدان اعداد مختلط) گروههای متناهی اولین بار توسط فروبنیوس [۱] در سال ۱۸۹۶ بیان شد. براور[۲] در سال ۱۹۴۱ نمایش مدولار (نمایش گروه روی میدانهای متناهی) مطرح نمود.

در نظریه سرشت گروهها، حاصلضرب دو سرشت همیشه سرشت است. سوالی که پیش می‌آید این است که آیا حاصلضرب دو سرشت تحویل ناپذیر نیز، تحویل ناپذیر است. همیشه جواب صحیح نیست. فرض کنیم G گروه متناهی و $\alpha, \beta \in \mathrm{Irr}(G)$ باشد، $\alpha\beta$ تحویل ناپذیر است اگر α، β خطی باشد یا حداقل یکی از آنها خطی باشد.

در سال ۲۰۰۰ آیزاکس حاصلضرب دو سرشت تحویل ناپذیر را در مقاله [۱۱] بیان نمود و حدس زیر را بیان کرد:

فرض کنیم گروه G حل پذیر و سرشت تحویل ناپذیر آن برابر با حاصلضرب دو سرشت صادق و تحویل ناپذیر باشد. در این صورت G دوری است.

آیزاکس نشان داد که حدس بالا برای گروههای حل پذیر با طول فتینگ حداکثر ۴ صحیح است و به خصوص برای گروههای زبرحل‌پذیر نیز صحیح می‌باشد.

در سال ۲۰۰۴ در مقاله [۱] حالت عمومی از حدس آیزاکس بیان شد و در سال ۲۰۰۸ هیروشیما حدس آیزاکس را در حالتی که G یک M—گروه باشد را بیان کرد. به طور خلاصه اساس این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۴] می‌باشد. این پایان‌نامه در ده فصل نوشته شده‌است. در فصلهای ۱،۲،۳،۴ مفاهیم و قضایای مربوط به نظریه گروهها را بیان کرده و در فصلهای ۵،۶،۷،۸ مفاهیم و قضایای مربوط به نظریه‌سرشتها خواهیم پرداخت. در فصل ۹ سرشت براور را تعریف و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم و در فصل آخر قضایای اساسی که در مورد حاصلضرب دو سرشت تحویل‌ناپذیر و صادق است را بررسی می‌کنیم.

---

[۱] Frobenius

[۲] Brauer

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به طور خلاصه قضایا و تعاریف اساسی از نظریهٔ گروهها را که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، را بیان می‌کنیم.

در سرتاسر این پایان نامه همواره G، نشان دهندهٔ یک گروه متناهی می‌باشد.

تعریف ۱.۱ جابه‌جاگر [1] یک زوج مرتب $g_۱$ و $g_۲$ از اعضای G، عبارت است از عضو

$$[g_۱, g_۲] = g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۱ g_۲ \in G.$$

تعریف ۲.۱ فرض کنیم $H, K \leq G$. در این صورت زیرگروه جابه‌جاگر متناظر با H و K عبارت است از

$$[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K \rangle \leq G.$$

یعنی $[H, K]$ زیرگروهی است که به‌وسیله همه جابه‌جاگرهای $[h, k]$ تولید شده است، که $h \in H$ و $k \in K$. زیر گروه خاص $[G, G]$ را که به وسیله تمام جابه‌جاگرهای G تولید می‌شود، با G' نمایش می‌دهیم و گروه مشتق [2] G می‌نامیم.

تعریف ۳.۱ فرض می‌کنیم G گروهی نابدیهی باشد. زیرگروه حقیقی M از G (یعنی $M < G$) را زیر گروه ماکسیمال G می‌نامیم اگر زیر گروهی مانند L وجود نداشته باشد به طوری که $M < L < G$.

تعریف ۴.۱ فرض می‌کنیم G گروهی نابدیهی باشد. زیرگروه حقیقی N از G (یعنی $M < G$) را زیر گروه مینیمال G می‌نامیم اگر زیر گروهی مانند L وجود نداشته باشد به طوری که $M > L > ۱$.

[1] commutator
[2] derived

قضیه ۱.۵ هرگاه $H,K \leq G$ باشند، آنگاه $|H : H \cap K| \leq |G : K|$. هرگاه $|G : K|$ متناهی باشد، آنگاه $|H : H \cap K| = |G : K|$ اگر و فقط اگر $G = HK$.

برهان : [[۷]، فصل ۱، قضیه ۸.۴]. ■

قضیه ۱.۶ فرض کنیم $H,K \leq G$ و با شاخص متناهی باشند. در این صورت $|G : H \cap K|$ متناهی است و $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$. به‌علاوه $|G : H \cap K| = |G : H||G : K|$ اگر و فقط اگر $G = HK$.

برهان : [[۷]، فصل ۱، قضیه ۹.۴]. ■

قضیه ۱.۷ هرگاه $H,K \leq G$ با شاخص متناهی باشند، به طوری که $|G : H|, |G : K|$ نسبت به هم اول باشند، آنگاه $G = HK$.

برهان : بنا به قضیه قبل داریم:

$$|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|.$$

$|G : H|$ و $|G : K|$، $|G : H \cap K|$ را عاد می‌کنند و چون دو شاخص نسبت به هم اول است، در نتیجه $|G : K||G : H|$ ، $|G : H \cap K|$ را عاد می‌کند. بنابراین

$$|G : H \cap K| = |G : H||G : K|.$$

بنا به قضیه قبل حکم ثابت می‌شود. ■

گزاره ۱.۸ (قاعده ددکیند[۱]) هر گاه K،N و H زیر گروههای G باشند، به طوری که $H < N$، آنگاه $HK \cap N = H(K \cap N)$.

برهان : [[۱۸]، قضیه ۳.۷]. ■

[۱] Dedekind

قضیه ۹.۱ هر گاه $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$ باشد، آنگاه $HK \leq G$.

برهان : [[۱۸]، قضیه ۳.۳۸]. ■

نتیجه ۱۰.۱ هرگاه $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ باشد، آنگاه $HK \trianglelefteq G$.

برهان : بنابر قضیه ۹.۱، $HK \leq G$. فرض کنیم $g \in G$، $h \in H$ و $k \in K$. در این صورت

$$g^{-1}hkg = (g^{-1}hg)(g^{-1}kg) \in HK.$$

پس حکم ثابت شد. ■

قضیه ۱۱.۱ (قضیه دوم یکریختی) فرض کنیم $K \trianglelefteq G$. دراین صورت هر زیر گروه G/K به شکل H/K است که $K \leq H \leq G$. علاوه بر این $H/K \trianglelefteq G/K$ اگر و فقط اگر $H \trianglelefteq G$. در این صورت

$$G/K \Big/ H/K \cong G/H.$$

برهان : [[۱۸]، قضیه ۳.۳۰]. ■

قضیه ۱۲.۱ (قضیه سوم یکریختی) فرض کنیم $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت

(۱) $H \cap K \trianglelefteq H$؛

(۲) $H/H \cap K \cong HK/K$.

برهان : [[۱۸]، قضیه ۳.۴۰]. ■

تعریف ۱۳.۱ زیرگروه H از G را مشخصه می‌نامیم هرگاه به ازای هر خودریختی از G مانند φ داشته باشیم $\varphi(H) = H$.

لم ۱۴.۱ اگر $G \trianglelefteq H$ و K در H زیر گروه مشخصه باشد، آنگاه $K \trianglelefteq G$.

برهان : [[۱۸]، قضیه ۱۵.۳]. ■

لم ۱۵.۱ همه زیرگروهها و همه گروههای خارج قسمتی هر گروه دوری، دوری‌اند.

برهان : [[۱۸]، لم ۳۱.۳]. ■

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G و $g \in G$ باشد. در این صورت

$$H^g = \{g^{-1}hg \ : \ h \in H\}.$$

زیر گروهی از G است، که مزدوج H نامیده می‌شود.

تذکر ۱۷.۱ به ازای هر $H \leq G$ و هر $g \in G$، H^g یکریخت با H است.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G و $g \in G$ باشد . در این صورت هر گاه $H^g = H$، می‌گوییم H تحت g پایا است.

۲ عمل گروه

تعریف ۱.۲ G بر مجموعه ناتهی X عمل [۱] می‌کند اگر به‌ازای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ عضو یکتای $xg \in X$ متناظر شود به طوری که به ازای هر $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G$ داشته باشیم:

$$(xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$$

و

$$x1 = x.$$

مثال ۲.۲ فرض کنیم V فضای برداری مخالف صفر روی میدان F باشد. در این صورت گروه ضربی $F^{\times}$ بر V عمل می‌کند.

تعریف ۳.۲ G بر X با تزویج عمل می‌کند، هر گاه به ازای هر $g \in G$، $x \in X$، به‌صورت

$$x.g = x^g = g^{-1}xg,$$

تعریف شود.

قضیه ۴.۲ فرض کنیم G بر X عمل کند. دراین صورت به‌ازای هر $g \in G$ نگاشت $\rho_g : X \longrightarrow X$ با ضابطه $\rho_g : x \mapsto xg$ تعریف می‌شود که جایگشتی از X است. علاوه بر این نگاشت $\rho : G \longrightarrow \sum_X$ که با ضابطه $\rho : g \mapsto \rho_g$ تعریف می‌شود، یک همریختی است که این همریختی را نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل می‌نامیم.

برهان : [[۱۸]، لم ۳.۴]. ■

---

[۱] action

تعریف ۵.۲ فرض کنیم G بر X عمل کند و ρ همریختی متناظر با این عمل باشد، اگر $\mathrm{Ker}\rho = 1$ می‌گوییم این عمل صادق [۱] است و اگر $\mathrm{Ker}\rho = \mathrm{G}$ باشد، می‌گوییم G بر X بدیهی عمل می‌کند به عبارتی دیگر G بر X هر گاه به ازای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ داشته باشیم $xg = x$.

لم ۶.۲ فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل می کند. رابطه $\sim$ را بر X به صورت زیر تعریف می کنیم:
$x_1 \sim x_2$ اگر و تنها اگر $x_1, x_2 \in X$ و یک عضو $g \in G$ وجود داشته باشد، به قسمی که $x_1 g = x_2$، در این صورت $\sim$ یک رابطه هم ارزی بر X است.
برهان : [[۱۸]، لم ۶.۴]. ■

تعریف ۷.۲ فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل می‌کند. در این صورت با استفاده از لم ۶.۲، X نسبت به رابطه هم ارزی $\sim$ در لم ۶.۲، به رده‌های هم‌ارزی مجزا افراز می‌شود. این رده‌های هم‌ارزی، مدارهای [۲] این عمل نامیده می‌شوند. به ازای هر $x \in X$ مدار شامل x را مدار x می‌نامیم: این مدار عبارت است از مجموعه $\mathrm{Orbit}\ x = \{xg : g \in G\}$.

تعریف ۸.۲ فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل می‌کند و همچنین داشته باشیم $x \in X$. قرار می‌دهیم: $\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G : xg = x\}$، که پایدارساز [۳] x در G نامیده می‌شود.

[۱] faithful
[۲] orbit of action
[۳] stabilizer of x in G

تعریف ۹.۲ فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل می‌کند. این عمل ترایا[۱] خوانده می‌شود، اگر دارای تنها یک مدار باشد.

تعریف ۱۰.۲ فرض کنیم G بر X عمل کند. دراین صورت زیر مجموعه نقاط ثابت X به صورت $\mathrm{Fix}_X(G) = \{x \in X : xg = x, \forall g \in G\}$ تعریف می‌شود.

لم ۱۱.۲ $\mathrm{Stab}_G(x)$ زیرگروهی از G است.

برهان : [[۱۸]، ۸.۴]. ∎

لم ۱۲.۲ فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل می‌کند و همچنین $x \in X$. در این صورت

$$|\mathrm{Orbit}\ x| = |G : \mathrm{Stab}_G(x)|.$$

برهان : [[۱۸]، قضیه ۱۱.۴]. ∎

در تعریف ۱.۲، مفهوم عمل یک گروه بر یک مجموعه را معرفی کردیم. در اینجا مفهوم عمل یک گروه بر یک گروه را معرفی، و بوسیله آن حاصلضرب نیم مستقیم[۲] دو گروه را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۲ می‌گوییم H بر K عمل می‌کند، اگر به هر $h \in H$ و $k \in K$، عضو یکتای $k^h \in K$ متناظر شود به‌طوری که، به ازای هر $k, k_1, k_2 \in K$ و $h, h_1, h_2 \in H$،

$$(k^{h_1})^{h_2} = k^{h_1 h_2}, \quad k^1 = k,$$

و

$$(k_1 k_2)^h = {k_1}^h {k_2}^h.$$

[۱] transitive action
[۲] semidirect products

لم ۱۴.۲ فرض کنیم H بر K با تزویج عمل کند و φ همریختی عمل باشد. دراین صورت $\mathrm{Fix}_K(H) = C_K(H)$ و $C_H(K) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

برهان : بنا به تعریف $C_K(H)$ داریم :

$$\begin{aligned} C_K(H) &= \{k \in K \mid kh = hk \ ,\forall h \in H\}, \\ &= \{k \in K \mid h^{-1}kh = k \ ,\forall h \in H\}, \\ &= \{k \in K \mid k^h = k \ ,\forall h \in H\}, \\ &= \mathrm{Fix}_K(H). \end{aligned}$$

و به همین ترتیب $C_H(K) = \mathrm{Ker}(\varphi)$. ■

نتیجه ۱۵.۲ اگر $C_K(H) = K$، آنگاه H بر K بدیهی عمل می‌کند و اگر $C_H(K) = 1$ باشد، آنگاه عمل H بر K صادق است.

قضیه ۱۶.۲ فرض کنیم H بر K عمل می‌کند. در این صورت مجموعه تمام زوجهای مرتب (h,k)، که $h \in H$ و $k \in K$، ساختار یک گروه G را به دست می‌دهد، اگر به ازای هر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$، تعریف کنیم

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, {k_1}^{h_2} k_2).$$

برهان : [[۱۸]، قضیه ۶.۹]. ■

تعریف ۱۷.۲ فرض کنیم H بر K عمل می‌کند. در این صورت گروه G مرکب از تمام زوجهای (h,k) که $h \in H$ و $k \in K$، و ضرب داده شده با تساوی قضیه ۱۶.۲، حاصلضرب نیم مستقیم H در K با عمل مربوطه، نامیده می‌شود.

قضیه ۱۸.۲ فرض کنیم H بر K عمل می‌کند. G را حاصلضرب نیم مستقیم H در K در نظر می‌گیریم. در این صورت $H \leq G$، $K \trianglelefteq G$، $G = HK$ و $H \cap K = 1$.

برهان : [[۱۸]، قضیه ۹.۹]. ■

تعریف ۱۹.۲ در قضیه قبل زیرگروه H را متمم[۱] برای K می‌نامیم.

تعریف ۲۰.۲ فرض کنیم G بر گروه V عمل کند. در این صورت می‌گوییم زیرگروه U از V تحت G پایاست هرگاه به ازای هر $u \in U$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $ug \in U$.

قضیه ۲۱.۲ فرض کنیم A بر G عمل کند و همچنین N زیر گروه نرمال A—پایا از G باشد. در این صورت

(۱) اگر A بر G/N بدیهی عمل کند، آنگاه $[G, A] \leq N$.

(۲) اگر A بر N بدیهی عمل کند، آنگاه A بر $G/C_G(N)$ نیز بدیهی عمل می‌کند.

(۳) اگر A بر N و G/N بدیهی عمل کند، آنگاه $[G, A] \leq Z(N)$، $A \leq C_A(G)$.

برهان : [[۱۴]، قضیه ۲.۱.۸]. ■

تعریف ۲۲.۲ فرض کنیم A بر گروه آبلی V عمل کند، آنگاه می‌گوییم عمل‌تحویل ناپذیر[۲](ساده) است هرگاه ۱ و V تنها زیر گروههای A—پایا از V باشند.

مثال ۲۳.۲ فرض کنیم H زیر گروه نرمال مینیمال آبلی G باشد. در این صورت G بر H تحویل‌ناپذیر عمل می‌کند، زیرا G بر H با تزویج عمل می‌کند و هر زیر گروه G—پایا، نرمال است و چون H نرمال مینیمال می‌باشد. بنابراین تنها ۱ و H زیر گروه G—پایا در H می‌باشند.

[۱] complement
[۲] irreducible

۳ $p-$ گروه

تعریف ۱.۳ گروه آبلی G را گروه آبلی مقدماتی می‌گوییم هرگاه عدد اولی چون p موجود باشد به طوری که به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم، $g^p = ۱$.

تعریف ۲.۳ قرارداد می‌کنیم که π همواره معرّف مجموعه‌ای از اعداد اوّل است.

(۱) عدد صحیح مثبت n را یک $\pi-$ عدد می‌گوییم اگر هر مقسوم علیه اوّل n به π تعلق داشته باشد.

(۲) فرض کنیم $g \in G$ دارای مرتبه‌ای متناهی باشد. g را یک $\pi-$ عضو در G می‌نامیم هرگاه $|g|$ یک $\pi-$ عدد باشد.

(۳) فرض کنیم G گروهی متناهی باشد. G را یک $\pi-$ گروه می‌نامیم اگر $|G|$ یک $\pi-$ عدد باشد.

تعریف ۳.۳ گروه G یک $p-$ گروه نامیده می‌شود هر گاه مرتبهٔ هر عضو آن توانی از عدد اول p باشد. گروهی که p، مرتبهٔ هر عضو آن را عاد نکند را $p'-$گروه می‌نامیم.

قضیه ۴.۳ هر گاه G یک $\pi-$ گروه متناهی باشد، آنگاه همهٔ زیرگروه‌ها و همهٔ گروه‌های خارج قسمتی G، $\pi-$ گروه‌اند.

برهان : بنا به قضیه لاگرانژ مرتبه‌های همهٔ زیرگروه‌ها و همهٔ گروه‌های خارج قسمتی G، $|G|$ را می‌شمارند. ■

قضیه ۵.۳ (سیلو[۱]) فرض G گروهی متناهی باشد به طوری که $|G| = p^m r$، که در آن m عدد صحیح نامنفی بوده و r یک عدد صحیح مثبت است به طوری که p،

[۱] Sylow theorem

r را نمی‌شمارد. در این صورت

(الف) G دارای زیرگروهی از مرتبهٔ p^m است. یک چنین زیرگروهی را یک p– زیرگروه سیلو از گروه G می‌نامیم.

(ب) p– زیرگروههای سیلو از G، یک ردهٔ تزویجی از زیرگروههای G را تشکیل می‌دهند.

برهان : [[۱۸]، قضیه ۹.۵]. ■

قضیه ۶.۳ (کوشی [۱]) هرگاه G یک گروه متناهی باشد به طوری که p، $|G|$ را بشمارد، آنگاه G عضوی از مرتبهٔ p دارد.

برهان : [[۱۸]، قضیه ۱۱.۵]. ■

تعریف ۷.۳ زیرگروه H از G یک زیر گروه هال [۲] نامیده می‌شود، هرگاه

$$(|G:H|, |H|) = ۱.$$

تعریف ۸.۳ فرض کنیم G گروهی از مرتبه n باشد که $n = p^r m$ و $m \nmid p$. زیر گروه از مرتبه m را p–متمم [۳] نامیده و آن را با H_p نشان می‌دهیم.

تبصره ۹.۳ $|G : H_p| = |G|_p$.

تذکر ۱۰.۳ p–متمم یک p'–زیر گروه است. p–زیر گروه هال همان p– زیر گروه سیلو است.

قضیه ۱۱.۳ اگر A، p– گروه و همچنین A بر G عمل کند به طوری که $C_G(A) = ۱$، آنگاه G، p'–گروه است.

برهان : [[۱۴]، قضیه ۹.۱.۸]. ■

[۱] Cauchy theorem
[۲] Hall
[۳] complement