بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی‌ارشد

رشته ریاضی کاربردی

یک روش انتگرال‌گیری عددی تصادفی برای آنالیز عددی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم

استاد راهنما

دکتر ناصر آقازاده

پژوهشگر

محمدرضا قلی‌پور

مهر ۱۳۹۲

تبریز - ایران

ای آنکه یادش مایه شرافت یادکنندگان است، و ای آنکه سپاسش سبب رستگاری شکرگزاران است، و ای آنکه طاعتش موجب رهایی فرمانبرداران است، بر محمّد(ص) و آل او درود بفرست، و دلهای ما را از هر یادی به یاد خود، و زبانمان را از هر سپاسی به سپاس خود، و اعضایمان را از هر طاعتی به طاعت خود مشغول بدار.

پس اگر برای ما فراغت از کاری مقدر ساختی، آن را فراغتی توأم با سلامتی قرار ده که در پی آن هیچ وبال و مظلمه‌ای دامنگیر ما نگردد، و در آن هیچ خستگی به ما نرسد، تا نویسندگانِ گناه با نامه‌ای تهی از یاد کردارِ بد از نزد ما بازگردند و نویسندگان خوبی‌ها در حالی ما را ترک گویند که به خاطر کردار نیکی که از ما نوشته‌اند، شادمانند.

و چون روزگار زندگانی ما بگذرد، و رشته عمرمان از هم گسیخته شود، و آن دعوت حتمی تو که اجابت کردنش قطعی است، در رسد، پس بر محمّد(ص) و آل او درود بفرست، و پایان آنچه را نویسندگان اعمال ما بطور کامل ثبت و ضبط می‌کنند، توبه‌ای پذیرفته شده قرار ده، که پس از آن ما را بر گناهی که مرتکب شده‌ایم و معصیتی که مبتلا شده‌ایم بازخواست نکنی، و آن روزی که خبرهای بندگان خویش را برملا می‌سازی، پوششی را که بر گناهان ما افکنده‌ای در برابر دیده شاهدان و حاضران، برنداری، که همانا تو بر کسی که تو را بخواند مهربان، و آن که تو را ندا کند، اجابت کننده‌ای.

ستایش خداوندی را که اول است بی آنکه پیش از او اولی باشد، و آخر است بی آنکه پس از وی آخری باشد.

از فرمایشات حضرت امام سجّاد (ع)

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

و مَن لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **ناصر آقازاده**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

چکیده:

در این پایان‌نامه روش جدید انتگرال‌گیری عددی تصادفی (RIQ) یا به اصطلاح روش بدون شبکه‌بندی برای جواب‌های عددی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم بسط داده شده است. روش RIQ بر روی تکنیک انتگرال‌گیری عددی تعمیم یافته (GIQ) پایه‌ریزی شده است و با تابع درونیابی کریجینگ مرتبط است، بطوریکه روش RIQ به عنوان یک بسط از روش GIQ مورد توجه قرار گرفته است. در روش GIQ دامنه محاسباتی منظم لازم است، بطوریکه نقاط گرهی میدان در امتداد یک خط مستقیم پراکنده شده‌اند. اما در روش RIQ نقاط گرهی میدان می‌توانند بطور تصادفی یا بطور یکنواخت پخش گردند. این با گسسته سازی معادله‌ی انتگرالی حاکم با روش GIQ روی یک مجموعه از نقاط گرهی مجازی که روی خطوط مستقیم قرار می‌گیرد و سپس درونیابی مقادیر تابع در نقاط گرهی مجازی روی تمام نقاط گرهی میدان که بطور تصادفی و یا بطور یکنواخت پراکنده شده‌اند، بدست می‌آید. در چنین حالتی معادله انتگرالی بطور تقریبی به یک دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می‌شود که می‌تواند به آسانی حل شود.
کلید واژه‌ها: معادلات انتگرال ولترای نوع دوم- روش بدون شبکه‌بندی- روش انتگرال‌گیری عددی تصادفی

فهرست مطالب

فصل ۱
تعاریف و پیشنیازها

تعریف ۱: معادله انتگرالی معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد. مسلماً در چنین معادله‌ای جملات دیگری نیز می‌توان یافت. برای مثال، برای $a \leq s \leq b$ و $a \leq t \leq b$، معادلات زیر معادلات انتگرالی هستند.

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\ g(t)\ dt \tag{۱.۱}$$

$$g(s) = f(s) + \int_a^b K(s,t)\ g(t)\ dt \tag{۲.۱}$$

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\ [g(t)]^2\ dt \tag{۳.۱}$$

که در آنها تابع $g(s)$ تابعی مجهول است در حالیکه تمامی توابع دیگر معلوم هستند. این توابع ممکن است توابع مختلط با متغیرهای حقیقی s و t باشند.

معادلات انتگرالی را می‌توان در بسیاری از زمینه‌های مکانیک و ریاضی فیزیک یافت. همچنین این معادلات، به عنوان فرمول‌هایی برای نمایش جواب‌های معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شوند. در واقع، با در نظر گرفتن شرایط مرزی می‌توان یک معادله دیفرانسیلی را با یک معادله انتگرالی جابجا کرد. بدین ترتیب هر جواب از معادله انتگرالی بطور خودکار در این شرایط مرزی صدق می‌کند. همچنین معادلات انتگرالی یکی از مفیدترین ابزارها در بسیاری از شاخه‌های آنالیز محض هستند مانند قضیه‌های آنالیز تابعی و فرایندهای تصادفی.

همچنین می‌توان معادلات انتگرالی را در نظر گرفت که در آنها تابع مجهول تنها تابعی از یک متغیر نیست بلکه به چند متغیر وابسته است. برای مثال معادله زیر چنین است:

$$g(s) = f(s) + \int_{\Omega} K(s,t)\ g(t)\ dt \qquad (۴.۱)$$

که در آن s و t بردارهای n- بعدی و Ω ناحیه فضای n- بعدی است. بطور مشابه دستگاه‌هایی از معادلات انتگرالی را می‌توان در نظر گرفت که چندین تابع مجهول داشته باشند.

یک معادله انتگرالی خطی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر عملگرهای خطی در آن روی توابع مجهول بکار گرفته شوند. معادلات (۱.۱) و (۲.۱) خطی هستند در حالیکه (۳.۱) غیر خطی است. در حقیقت معادلات (۱.۱) و (۲.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L[g(s)] = f(s) \qquad (۵.۱)$$

که L عملگر مناسب انتگرالی است. پس برای هر ثابت c_1 و c_2 داریم

$$L[c_1 g_1(s) + c_2 g_2(s)] = c_1 L[g_1(s)] + c_2 L[g_2(s)] \qquad (۶.۱)$$

این ضابطه عمومی برای یک عملگر خطی است.

عمومی ترین شکل یک معادله انتگرالی خطی به صورت زیر است

$$h(s)g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\ g(t)\ dt \qquad (۷.۱)$$

که در آن حد بالا ممکن است متغیر یا ثابت باشد. توابع f و h و K توابعی معلوم هستند در حالیکه g تابعی مجهول است و باید تعیین شود و λ یک پارامتر ناصفر حقیقی یا مختلط است. تابع $K(s,t)$ هسته [۱] نامیده می‌شود. موارد خاص زیر از معادله (۷.۱) اهمیت بیشتری دارد.

[۱] Kernel

(i) **معادلات انتگرالی فردهلم**[۱]. در تمامی معادلات انتگرالی فردهلم، حد بالای انتگرال‌گیری یا b، ثابت است.

(*) در معادله انتگرالی فردهلم نوع اول، $h(s) = 0$ لذا،

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt = 0 \tag{۸.۱}$$

(**) در معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم، $h(s) = 1$ لذا

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt \tag{۹.۱}$$

(***) معادله انتگرالی فردهلم همگن مرتبه دوم حالت خاصی از (**) است. در این حالت $f(s) = 0$

$$g(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt \tag{۱۰.۱}$$

(ii) **معادلات انتگرالی ولترا**[۲]. معادلات انتگرالی ولترای مرتبه اول، دوم و همگن دقیقاً مثل بالا تعریف می‌شوند به جز اینکه حد بالا در این حالت را s قرار می‌دهیم یعنی $b = s$.

تعریف ۲: به چندجمله‌ای $P_n(x)$ از درجه کمتر یا مساوی n که از $(n+1)$ نقطه دو به دو مجزای $(x_0, y_0 = f(x_0)),\ (x_1, y_1 = f(x_1)),\ \dots,\ (x_n, y_n = f(x_n))$ عبور می‌کند و به صورت زیر است چند جمله‌ای درونیاب لاگرانژ[۳] می گویند

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

که در آن $L_i(x)$ یک چند جمله ای از درجه‌ی n است و به شکل زیر بیان می‌گردد

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

[۱] Fredholm Integral Equations
[۲] Volterra Integral Equations
[۳] Lagrange Interpolation Polynomial

تعریف ۳. چندجمله‌ای چبیشف [۱] از درجه ی $n \geq 0$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$T_n(x) = cos(n \arccos(x)); \quad x \in [-1, 1]$$

و یا

$$T_n(x) = cos(n\theta) \qquad x = cos\theta; \quad \theta \in [0, \pi]$$

رابطه‌ی بازگشتی چند جمله ای چبیشف به صورت زیر است:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n \geq 1$$

اولین ده چندجمله‌ای نوع اول چبیشف به صورت زیر می‌باشند:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

[۱] Chebyshev Polynomial

تعریف ۴: تابع f را تابعی هموار[۱] گوییم هرگاه تا مرتبه‌ی دلخواه مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۵: تابع f را بطور پیوسته هموار[۲] گوییم هرگاه تا مرتبه‌ی دلخواه مشتق‌پذیر باشد و مشتقاتش نیز پیوسته باشد.

تعریف ۶. ماتریس A را ماتریس معین مثبت[۳] گوییم، در صورتي که براي هر بردار $X \neq 0$ رابطه $X^T AX > 0$ برقرار باشد.

تعریف ۷: متغیر تصادفی [۴] تابعی با مقادیر عددی است که بوسیله آن به نقطه‌ای از فضای نمونه، که مجموعه‌ی تمام برآمدهای مقدماتی یا پیشامدهای ساده است، یک عدد حقیقی نسبت داده می‌شود. پیشامدهای ساده لزوما عددی نیستند. برای مثال، در پرتاب سکه، فضای نمونه به صورت $\{H, T\}$ یا {خط و شیر} است، که در آنها دو پیشامد ساده را بوسیله صفات آنها و نه با عدد، توصیف کرده‌ایم. متغیرهای تصادفی معمولا با حروف بزرگ مانند X و Y نشان داده می شوند.

تعریف ۸. در نظریه احتمال و کاربردهای آن مانند آمار و رمزنگاری [۵]یک تابع تصادفی[۶] (RF) تابعی است که به صورت تصادفی از بین فضای نمونه‌ای توابع انتخاب شده است. همچنین می توان گفت اگر متغیر تابعی، متغیر تصادفی باشد به آن تابع، تابع تصادفی می گویند.

تعریف ۹. امید ریاضی [۷] متغیر تصادفی X عبارتست از:

$$E(X) = \sum x_i f(x_i)$$

که مقادیر X یعنی x_iها متمایزند.

---

[۱] Smooth
[۲] Continuously Smooth
[۳] Positive Definite
[۴] Random Variable
[۵] Cryptography
[۶] Random Function
[۷] Expectation

تعریف ۱۰. واریانس [۱] متغیر تصادفی X عبارتست از:

$$Var(X) = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E(X^2) - \mu_X^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

که μ_x میانگین مقادیر Xیا همان امید ریاضی X است.

تعریف ۱۱. انحراف معیار [۲] متغیر تصادفی X عبارتست از:

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

انحراف معیار X با σ یا σ_X نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۲. کوواریانس [۳] بین متغیرهای تصادفی X و Y عبارتست از:

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

علامت و مقدار $E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$ نشان دهنده‌ی جهت و میزان همبستگی بین X و Y است.

تعریف ۱۳. ضریب همبستگی[۴] بین متغیرهای تصادفی X و Y عبارتست از:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

تعریف ۱۴. واریانسی که وابسته به فاصله است را واریوگرام [۵] می‌نامند و آن را با نماد $2\gamma(h)$ نشان می‌دهند که معمولا به جای واریوگرام از سمیواریوگرام [۶] با نماد $\gamma(h)$ استفاده می‌کنند. در واقع واریوگرام میانگین مربعات تفاضل دو مقدار را به عنوان تابعی از نمو بین آنها نشان می‌دهد. واریوگرام، پایه بسیاری از محاسبات زمین آماری [۷]است. مقدار واریوگرام از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}Var[Y(x+h) - Y(x)]$$

[۱] Variance
[۲] Standard Deviation
[۳] Covariance
[۴] Correlation Coefficient
[۵] Variogram
[۶] Semivariogram
[۷] Geostatistics

تعریف ۱۵. یک مشتق فضایی[۱] اندازه‌گیری‌ای است از چگونگی تغییر یک کمیت در فضا که این متفاوت با مشتق زمانی است که چگونگی تغییر کمیت در زمان را اندازه می‌گیرد.

مشتقات فضایی مرتبه‌ی اول تابع f عبارتند از: $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ و مشتقات فضایی مرتبه‌ی دوم تابع f عبارتند از: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. در حالی که مشتقات زمانی مرتبه‌ی اول و دوم تابع f به ترتیب عبارتند از: $\frac{\partial f}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

حال برای مثال، اگر سر یک قطعه فلز را در آب یخ و سر دیگرش را در آب جوشان قرار دهیم، می‌توانیم دمای قطعه فلز را در طول آن اندازه‌گیری کنیم. دما در هر نقطه از فلز متفاوت خواهد بود. مقدار تغییر این دما در طول فلز را مشتق فضایی می‌گویند.

تعریف ۱۶. تابع شکل[۲]، تابعی است که جواب بدست آمده از بین مقادیر نقاط شبکه‌بندی را درونیابی می‌کند. بنابراین توابع مناسب باید برای این منظور استفاده شوند و معمولاً چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین به عنوان تابع شکل استفاده می‌شوند. از توابع شکل برای بدست آوردن جواب نزدیک ($\tilde{u}(x)$) به جواب دقیق ($u(x)$) استفاده می‌شود که به صورت ترکیب خطی توابع معلوم نوشته می‌شود. برای مثال اگر N_i توابعی معلوم باشند خواهیم داشت:

$$u(x) \cong \tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i N_i(x)$$

بعضی توابع شکل مرسوم در زیر آمده است.

۱) توابع تک جمله‌ای [۳] :

$$N_i(x) = x^i$$
$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

[۱] Spatial Derivative
[۲] Shape Function
[۳] Monomial Functions

۲) توابع نمایی [۱] :

$$N_i(x) = e^{b_i x}$$

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{b_i x}$$

تعریف ۱۷. در زمینه روش‌های شبیه‌سازی عددی، روش‌های بدون شبکه‌بندی [۲] روش‌هایی هستند که در آنها به شبکه‌بندی نقاط داده‌های دامنه نیازی نیست. این روشها امکان شبیه‌سازی مسائل دیگری را که هزینه و تلاش و وقت بیشتری می‌برند، فراهم می آورند. عدم نیاز به شبکه‌بندی دامنه محاسباتی، خصوصیت اصلی این روش است.

[۱] Exponential Functions
[۲] Meshless Methods

فصل ۲

روش‌های مورد نیاز

۱.۲ روش مشتق‌گیری عددی(DQ)

برای تابع $f(x,t)$ روش مشتق گیری عددی [۱] برای مشتق مرتبه mام در نقطه ی iام به صورت زیر داده شده است.

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\begin{Bmatrix} f(x_1,t) \\ f(x_2,t) \\ \vdots \\ f(x_N,t) \end{Bmatrix} \cong \left[D_{ij}^{(m)}\right]\begin{Bmatrix} f(x_1,t) \\ f(x_2,t) \\ \vdots \\ f(x_N,t) \end{Bmatrix}, \quad i,j=1,2,...,N \qquad (۱.۲)$$

که در آن $f(x_i,t)$ مقدار تابع در نقطه شبکه‌ای x_i است و $D_{ij}^{(m)}$ ضرایب وزن مرتبه ی mام مشتق گیری این مقدار تابعی است. مناسبترین تکنیک، انتخاب مساوی نقاط شبکه‌ای فضایی است، اما در عمل وقتی که نقاط فضایی به طور مساوی انتخاب شدند، نتایج عددی دقیق نبودند. پیدایش این روند انتخاب یک توزیع نقطه شبکه‌ای و تاثیر توابع آزمایشی مهم را در راندمان و دقت نتایج، در بعضی موارد نشان می‌دهد. انتخاب نقاط شبکه‌ای همیشه به طور خیلی مهم بر دقت جوابها تاثیر می‌گذارد. نقاط فضایی با فاصله‌های نامساوی روی هر دامنه‌ای برای محاسبات این فصل توزیع چبیشف- گاوس- لوباتو [۲] را به صورت زیر دارد:

$$x_i=\frac{1}{2}\left[1-cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N-1}\right)\right], \quad i=1,2,...,N \qquad (۲.۲)$$

[۱] Differential Quadrature Method
[۲] Chebyshev- Gauss- Lebatto Distribution

ضرایب وزن مشتق گیری عددی را می‌توان با استفاده از تکنیک‌های متعددی بدست آورد. برای برطرف کردن شرایط ضعیف عددی در تعیین ضرایب وزن، $D_{ij}^{(m)}$، چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ زیر معرفی می‌شود:

$$f(x,t) \cong \sum_{i=1}^{N} \frac{M(x)}{(x-x_i)M_1(x_i)} f(x_i,t) \qquad (۳.۲)$$

که در آن

$M(x) = \prod_{j=1}^{N}(x-x_j)$

$M_1(x_i) = \prod_{j=1,\ j\neq i}^{N}(x_i-x_j)\ , \quad i=1,2,...,N$

با جایگذاری معادله (۳.۲) در معادله (۱.۲) معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{M_1(x_i)}{(x_i-x_j)M_1(x_j)}\ , \quad i,j=1,2,...,N, \quad i\neq j \qquad (۴.۲)$$

و

$$D_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1,\ j\neq 1}^{N} D_{ij}^{(1)}\ , \quad i=1,2,...,N \qquad (۵.۲)$$

وقتی که نقاط گرهی انتخاب شدند، ماتریس ضرایب وزن را می‌توان با استفاده از معادلات (۴.۲) و (۵.۲) بدست آورد.

قابل ذکر است تعداد توابع آزمایشی از بالاترین مرتبه مشتق در معادله حاکم فراتر می‌رود. ضرایب وزن مشتقات مرتبه بالاتر را می‌توان با استفاده از ضرب ماتریسی به صورت زیر بدست آورد:[۱] -[۴]

$$D_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N} D_{ik}^{(1)}\ D_{kj}^{(1)}\ , \quad i,j=1,2,...,N \qquad (۶.۲)$$

$$D_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{N} D_{ik}^{(1)}\ D_{kj}^{(2)}\ , \quad i,j=1,2,...,N \qquad (۷.۲)$$

$$D_{ij}^{(4)} = \sum_{k=1}^{N} D_{ik}^{(1)}\ D_{kj}^{(3)}\ , \quad i,j = 1,2,...,N \tag{۲.۸}$$

۲.۲ مشتق گیری عددی تعمیم یافته (GDQ)

روش GDQ [۱] توسط شو[۲] روی تکنیک مشتق‌گیری عددی بسط داده شده است. این روش، مشتق فضایی یک تابع را نسبت به مختصات فضا در یک نقطه شبکه‌ای مفروض تقریب می زند که این تقریب به صورت یک مجموع خطی وزندار از تمامی مقادیر تابعی روی همه نقاط شبکه‌ای موجود در کل دامنه است. محاسبه ضرایب وزن بوسیله GDQ بر مبنای آنالیز تقریب یک چند جمله‌ای مرتبه بالا و آنالیز یک فضای برداری خطی پایه ریزی شده است. ضرایب وزن مشتق مرتبه اول بوسیله فرمول و ساختار جبری ساده و ضرایب وزن مشتقات مرتبه دوم و مراتب بالاتر بوسیله یک رابطه بازگشتی محاسبه می‌گردد. جزئیات روش GDQ را می‌توان در [۵] پیدا کرد. بعضی نتایج دو بعدی در زیر تشریح شده‌اند. برای یک تابع هموار $f(x,y)$، روش مشتق گیری عددی تعمیم یافته، مشتق مرتبه n آن را نسبت به x و مشتق مرتبه m آن را نسبت به y در نقطه شبکه‌ای (x_i,y_j) به‌صورت زیر گسسته می‌کند:

$$f_x^{(n)}(x_i,y_j) = \sum_{k=1}^{N} w_{ik}^{(n)}.f(x_k,y_j), \quad n = 1,2,...,N-1 \tag{۲.۹الف}$$

$$f_y^{(m)}(x_i,y_j) = \sum_{k=1}^{m} \bar{w}_{jk}^{(m)}.f(x_i,y_k), \quad m = 1,2,...,M-1 \tag{۲.۹ب}$$

$$i = 1,2,...,N\ \ , \quad j = 1,2,...,M$$

که در آن N و M تعداد نقاط شبکه‌ای به ترتیب در مسیرهای x و y هستند، $w_{ik}^{(n)}$ و $\bar{w}_{jk}^{(m)}$ ضرایب وزن هستند که بوسیله روابط زیر تعیین می‌شوند:

[۱] Generalized Differential Quadrature Method
[۲] Shu

ضرایب وزن برای مشتق مرتبه اول

$$w_{ij}^{(1)} = \frac{A^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j).A^{(1)}(x_j)}, \quad i,j = 1,2,...,N,\ j \neq i \qquad \text{(۱۰.۲الف)}$$

$$\bar{w}_{ij}^{(1)} = \frac{B^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j).B^{(1)}(y_j)}, \quad i,j = 1,2,...,M,\ j \neq i \qquad \text{(۱۰.۲ب)}$$

که در آن

$$A^{(1)}(x_i) = \Pi_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N}(x_i - x_j)$$

$$B^{(1)}(y_i) = \Pi_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{M}(y_i - y_j)$$

ضرایب وزن برای مشتقات مرتبه دوم و بالاتر

$$w_{ij}^{(n)} = n.\left(w_{ii}^{(n-1)}.w_{ij}^{(1)} - \frac{w_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j}\right), \quad i,j = 1,2,...,N, \ \ j \neq i,\ n = 2,3,...,N-1 \qquad \text{(۱۱.۲الف)}$$

$$\bar{w}_{ij}^{(m)} = m.\left(\bar{w}_{ii}^{(m-1)}.\bar{w}_{ij}^{(1)} - \frac{\bar{w}_{ij}^{(m-1)}}{y_i - y_j}\right), \quad i,j = 1,2,...,M, \ \ j \neq i,\ m = 2,3,...,M-1 \qquad \text{(۱۱.۲ب)}$$

وقتی که $j = i$، در اینصورت ضرایب وزن بوسیله روابط زیر بدست می‌آیند:

$$w_{ii}^{(n)} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} w_{ij}^{(n)}, \quad i = 1,2,...,N,\ n = 1,2,...,N-1 \qquad \text{(۱۲.۲الف)}$$

$$\bar{w}_{ii}^{(m)} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{M} \bar{w}_{ij}^{(m)}, \quad i = 1,2,...,M,\ m = 1,2,...,M-1 \qquad \text{(۱۲.۲ب)}$$

از معادلات بالا واضح است که ضرایب وزن مشتقات مرتبه دوم و بالاتر را میتوان کاملاً از مشتقات مرتبه اول تعیین کرد. وقتی که توزیع نقطه شبکه‌ای در بعضی شکل‌های خاص گرفته می‌شود،