بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

بررسی خواص خود ریختی های مرکزی وزیر گروه های آن

از :

افروز باقری فشخامی

استاد راهنما :

دکتر منصور هاشمی

(شهریور ماه ۱۳۸۸)

تقدیم به

مادر فداکار و همسر دلسوزم

تقدیر وتشکر

شکر خداوند بزرگ را بجا می آورم که عنایتی فرموده است تا بتوانم با مفاهیم جدیدی که ذره ای است از دریای بی کران علمش ، آشنا شوم .

از زحمات بی دریغ ومالامال از مهر خانوادهٔ عزیزم که همواره و در همه حال حامی و مشوق من بوده اند ، سپاسگزاری می کنم .

بر خود وظیفه می دانم از زحمات بی شائبهٔ استادراهنمای محترم آقای دکتر منصور هاشمی که در نمایاندن مسیر تحقیق و پژوهش در تمام مراحل پایان نامه اینجانب را راهنمایی فرمودند و همواره مرا برای رسیدن به فهم و درکی عمیق تر در ریاضیات سوق داده اند ، صاد قانه تشکر می کنم .

از اساتید محترم آقایان دکتر عباس سهله و دکتر احمد عباسی که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند بسیار متشکرم.

در پایان از همهٔ دوستان و عزیزانی که در طول تحصیلات مشوق و یاورم بودند تقدیر و تشکر بعمل می آورم .

فهرست مطالب

چکیده:

بررسی خواص خود ریختی های مرکزی وزیر گروه های آن

افروز باقری

یک خودریختی σ از گروه G ، مرکزی نامیده می شود، اگر σ با هر خودریختی داخلی G جابجا شود ، یا به طور معادل ، اگر برای هر x از G، $x^{-1}\sigma(x)$ در $Z(G)$ قرار گیرد.

در پایان نامه حاضر ،ساختارخودریختی و خود ریختی های مرکزی را مورد بررسی قرار داده ایم ودر فصل پایانی چند قضیه اساسی رادراین مورد ارائه می دهیم

کلید واژه ها:

آبلی، آبلی مقدماتی، پوچتوان، خودریختی، خودریختی مرکزی، خالی از عامل آبلی

Abstract

Review(examination)of properties of central automorphism and its sub group.

Afrouz bagheri

An automorphism σ of a group G is called central if σ commutes with every inner automorphism of G, or equiualenuly, if $x^{-1}\sigma(x)$ lies in the center Z(G) of G for all x in G.

In this thesis, the structure of authomorphism and central authomorphism are examined. The final chapter, we will give a necessary and sufficient condition on a finite group G for the group $Aut_c(G)$ to be elementary abelian and nilpotent.

Key words : Abelian group, Automorphism, Central automorphism , Elementary abelian, Ce-group, Nilpotent, Purly non - abelian.

مقدمه

مقاله هایی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته اند تحت عناوین «p_ گروه های آبلی مقدماتی به عنوان گروه خودریختی مرکزی» و«پوچتوانی و حل پذیری گروه خودریختی مرکزی گروه های متناهی»هستند. (به ترتیب [٤] و[٥] را ملاحظه کنید.)

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است:

فصل اول، مشتمل بر بیان تعاریف و مطالب مقدماتی مربوط به همریختی ها، خودریختی ها، خودریختی های مرکزی، بررسی اجمالی خواص آن می باشد. در ادامه به ارائه ی تعاریف و لم هایی در خصوص گروه های پوچتوان که همگی به عنوان هسته ی اصلی زمینه ساز طرح وبررسی قضایای اساسی تر در فصول بعدی می باشند، می پردازیم.

فصل دوم، به ارائه ی لم ها وقضایای مربوط به خودریختی های مرکزی یک گروه اختصاص دارد و در ادامه بررسی برخی از زیرگروه های آن نیز به این فصل منضم شده است.

سرانجام در

فصل سوم، به بررسی برخی از خواص خودریختی های مرکزی می پردازیم.

فصل اول

تعاریف و مطالب مقدماتی

فصل اول

تعاریف و مطالب مقدماتی

در این فصل برخی از مفاهیم اولیه و پیش نیاز که در فصل های آتی مورد نیاز خواهد بود را می آوریم.

۱-۱ مفاهیم اولیه

۱-۱-۱ تعریف. فرض می کنیم G و G' دو گروه دلخواه باشند. تابع $f: G \to G'$ را یک همریختی می نامیم، اگـر بـه ازای هر دو عضو دلخواه x و y از G، داشته باشیم:

$$f(xy) = f(x).f(y)$$

حال هر گاه همریختی f یک به یک و پوشا باشد، f را یکریختی می نامیم و می نویسیم $G \cong G'$.

۱-۱-۲ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $a, b \in G$. در این صورت جابجاگر a و b که با نماد $[a,b]$ نشان می دهیم را به صورت $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ تعریف مـی کـنـیم. همچنـین $G' = \langle [a,b] \,|\, a,b \in G \rangle$ را زیرگـروه مـشتق G نامیم.

G آبلی است اگر وتنها اگر $G = \langle e \rangle$.

۱-۱-۳ قضیه.

فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت:

الف) G' زیر گروه نرمال G است.

ب) برای هر زیرگروه نرمال H از G گروه $\frac{G}{H}$ آبلی است اگر وتنها اگر $G' \subseteq H$.

۱-۱-٤ تعریف. فرض می کنیم G و H گروه هایی دلخواه باشند. در این صورت مجموعه همریختی ها از G بـه H را بـا $Hom(G,H)$ نمایش می دهیم. همچنین ضرب نقطه ای در $Hom(G,H)$ را به این صورت تعریف می کنیم به ازای هر f و g عضو $Hom(G,H)$، $(fg)(x) = f(x).g(x)$.

۱-۱-۵ تعریف. فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G باشد. H را زیرگروه نرمال G می نامیم، هرگاه به ازای هر x از G، $xH = Hx$. یعنی، H زیرگروه نرمال است اگر و تنها اگر به ازای هر x از G و هر h از H، $x^{-1}hx \in H$ و می‌نویسیم $H \lhd G$.

۱-۱-٦ تذکر . فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد وبه ازای هر $x \in G$ داشته باشیم $\frac{G}{G'} = \langle xG' \rangle \times \frac{K}{G'}$. به علاوه، فرض کنیم z عضوی از $Z(G)$ باشد که $o(z) | o(xG')$. در این صورت $f : \langle xG' \rangle \to Z(G)$ با ضابطه $x^i G' \to z^i$ یک همریختی است.

نمادگاری: همریختی تذکر ۱-۱-٦ را با $f_{x,z}$ نمایش می دهیم.

۱-۱-۷ تعریف . (حاصل ضرب مستقیم) .

فرض می کنیم $\{(G_i, *_i)\}_{i=1}^n$ خانواده ای از گروه ها باشند ($*_i$ عمل دو تایی مربوط به گروه G_i). حاصل ضرب دکارتی آن ها یعنی

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n = \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) | g_i \in G, 1 \le i \le n\},$$

را همراه با عمل دوتایی * به ازای هر $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ و $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ از G، که به صورت زیر تعریف می شود ، را در نظر می گیریم

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n) * (h_1, h_2, \ldots, h_n) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2, \ldots, g_n *_n h_n).$$

می توان دید که $(G,*)$ یک گروه است که $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ، عضو خنثی G و برای هر $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ متعلق به G ، داریم:

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_n^{-1}).$$

$(G,*)$ را حاصل ضرب مستقیم خانواده ی گروه های $\{G_i\}_{i=1}^n$ می نامیم.

۱-۱-۸ تعریف. (حاصل ضرب مستقیم داخلی). هرگاه G یک گروه و $\{H_i\}_{i=1}^n$، خانواده ای از زیرگروه های G باشند، آنگاه G را حاصل ضرب مستقیم داخلی H_i ها $(1 \le i \le n)$، می نامیم هرگاه

الف) به ازای هر $1 \le i \le n$، $H_i \lhd G$،

ب) هر عضو $g \in G$ را بتوان به صورت یکتا به شکل $g = h_1 h_2 \ldots h_n$، نوشت به طوریکه به ازای هر $1 \le i \le n$ $h_i \in H_i$.

۱-۱-۹ قضیه.

هرگاه G حاصل ضرب مستقیم داخلی خانواده زیرگروه ها $\{H_i\}_{i=1}^{n}$ باشد، آنگاه

الف) $H_i \cap H_j = 1$ ، (به ازای هر i و j که $i \neq j$ و $1 \leq i, j \leq n$).

ب) به ازای هر $h_i \in H_i$ و $h_j \in H_j$، که $i \neq j$ و $1 \leq i, j \leq n$، $h_i h_j = h_j h_i$.

۱-۱-۱۰ قضیه.

فرض کنیم G یک p - گروه آبلی باشد. در این صورت G حاصل ضرب مستقیمی از زیرگروه های دوری خود است؛ یعنی، $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ که در آن H_i ها $(1 \leq i \leq n)$ ، منحصر بفردند.

برهان.

به [۱] مراجعه شود.

۱-۱-۱۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد. در این صورت $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$، که در آن $H_i = (1 \leq i \leq n) \langle x_i | x_i^{p^{t_i}} = 1 \rangle$ در این حالت G را از نوع $(p^{t_1}, p^{t_2}, \ldots, p^{t_n})$ گوییم. اگرگروه G از نوع $(p, p, \ldots, p)$ باشد، آنگاه G را p - گروه آبلی مقدماتی[1] می نامیم.

۱-۱-۱۲ مثال. $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ ، یک۲- گروه آبلی مقدماتی است.

۱-۱-۱۳ لم.

فرض کنیم $\prod_{i \in I} A_i$ حاصل ضرب مستقیم گروه های آبلی A_i و $\sum_{i \in I} A_i$ مجموع مستقیم گروه های آبلی A_i باشد.

الف) به ازای هر $k \in I$ ، تابع جانشانی i_k از A_k به $\sum A_i$ یک تکریختی است.

ب) به ازای هر $k \in I$ ، تابع پوشای متعارف از $\prod A_i$ به A_k یک بروریختی است.

برهان. به [۲] مراجعه شود.

۱-۱-۱٤ تعریف. فرض کنید A یک کتگوری و $\{A_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از اشیاء A باشد. زوج $(P, \{\varphi_i\}_{i \in I})$ را یک ضرب خانواده ی $\{A_i\}_{i \in I}$ گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱) P یک شئ A باشد.

۲) $\{\varphi_i : P \to A_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از ریخت های A باشد.

1.elementary abelian p-group

۳) به ازای هر خانواده از ریخت های A چون $\{\gamma_i : C \to A_i\}_{i\in I}$، ریخت یکتایی چون $\gamma : C \to P$، موجود باشد به قسمی که، $\gamma_i = \varphi_i \gamma$.

۱-۱-۱۵ تعریف. فرض کنید A یک کتگوری و $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از اشیاء A باشد. زوج $\left(Q, \{\varphi_i\}_{i\in I}\right)$ را یک هم ضرب خانواده ی $\{A_i\}_{i\in I}$ گویند، هرگاه:

۱) Q یک شئ A باشد.

۲) $\{\varphi_i : A_i \to Q\}_{i\in I}$ یک خانواده از ریخت های A باشد.

۳) به ازای هر خانواده از ریخت های A چون $\{\gamma_i : A_i \to B\}_{i\in I}$، ریخت یکتایی چون $\gamma : Q \to B$، موجود باشد به قسمی که $\gamma_i = \gamma\varphi_i$.

۱-۱-۱۶ لم.

فرض کنیم که $\{B_j\}_{j\in J}$، $\{A_i\}_{i\in I}$، A و B گروه های آبلی باشند، در این صورت :

الف) $Hom_z\left(\sum_{i\in I} A_i, B\right) \cong \prod_{i\in I} Hom_z(A_i, B)$.

ب) $Hom_z\left(A, \prod_{j\in J} B_j\right) \cong \prod_{j\in J} Hom_z(A, B_j)$.

برهان.

به [۲] مراجعه شود.

۱-۱-۱۷ لم.

$Hom(Z_m, Z_n) \cong Z_d$؛ $d = (m,n)$.

برهان.

فرض می کنیم $f : Z_m \to Z_n$. به ازای هر $f \in Hom(Z_m, Z_n)$، tای متعلق به Z_n وجود دارد به طوری که $f(1) = t$. فرض می کنیم $(m,n) = d$. در این صورت، $\frac{n}{d} | n$. اگر $H = \left\langle \frac{n}{d} \right\rangle$، آنگاه $|H| = d$. که در آن H منحصر بفرد است. همچنین

$$|f(1)| = |\langle f(1)\rangle| ; |f(1)| | m.$$

بنابراین، $|f(1)|\,|\,d$. در نتیجه، $f(1)\in H$. حال $\varphi : Hom(Z_m, Z_n)$ را با ضابطه $f \to f(1)$ در نظرمی گیریم. واضح است که φ یکریختی است.■

۱-۱-۱۸ لم.

فرض کنیم G یک گروه باشد و $\frac{G}{G'}=\frac{H}{G'}\times\frac{K}{G'}$. در این صورت هر همریختی f که $f:\frac{H}{G'}\to Z(G)$ به یک همریختی از G به $Z(G)$ توسیع داده می شود.

برهان.

$\overline{f}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\overline{f}:G\to Z(G)$$

$$u=xy\to f(xG')$$

که در آن $y\in K, x\in H$. یعنی داریم:

$$\overline{f}(u)=\overline{f}(xy)=f(xG').$$

نشان می دهیم $\overline{f}$ همریختی است.

$$\begin{aligned}\overline{f}(u.u')&=\overline{f}(xy.x'y')=f(xG'.x'G')=f(xG').f(x'G')\\&=\overline{f}(xy).\overline{f}(x'y')=\overline{f}(u).\overline{f}(u').\end{aligned}$$

بنابراین، $\overline{f}\in Hom(G,Z(G))$.■

تبصره: اگر $f:\frac{H}{G'}\to Z(G)$ همریختی و $\overline{f}$ همریختی متناظر آن در $Hom(G,Z(G))$ باشد، آنگاه به ازای هر $x\in G$، $\overline{f}(x)=f(xG')$. لذا بدون اینکه مشکلی ایجاد شود، می توان به جای $\overline{f}$ از همان علامت f استفاده کرد.

۱-۲ خودریختی ها

۱-۲-۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت هر یکریختی از G به G را یک خودریختی G می نامیم. به علاوه، مجموعه همه خودریختی های G با عمل ترکیب توابع یک گروه را تشکیل می دهد که آن را گروه خودریختی های G می نامیم و با علامت $Aut(G)$ نمایش می دهیم.

۱-۲-۲ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $a \in G$. در این صورت نگاشت $\varphi_a : G \to G$ را با ضابطه $\varphi_a(x) = a^{-1}xa$، یک خودریختی داخلی G گوئیم. همچنین مجموعه خودریختی های داخلی G تشکیل زیر گروهی از $Aut(G)$ را می دهد که آن را گروه خود ریختی های داخلی G می نامیم و با $Inn(G)$ نمایش می دهیم.

۱-۲-۳ لم.

با استفاده از مفاهیم جبر ۱ داریم:

$Inn(G) \lhd Aut(G)$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$. به علاوه، اگر $\frac{G}{Z(G)}$ دوری باشد آنگاه G آبلی است.

۱-۲-٤ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه H از G را یک زیرگروه مشخص G می نامیم، درصورتی که به ازای هر خودریختی G مانند φ، $\varphi(H) \leq H$ که درآن $\varphi(H) = \{\varphi(h) | h \in H\}$. همچنین می توان گفت اگر H زیرگروه مشخص G باشد، آنگاه به ازای هرخودریختی G مانند φ ، $\varphi(H) = H$. هرگاه H زیرگروه مشخص G باشد، می نویسیم $HchG$.

۱-۲-۵ مثال.

هرگاه N زیر گروه نرمال یک گروه متناهی مانند G باشد به طوری که $|N|$ و $|G:N|$ نسبت به هم اول باشند، آنگاه $NchG$.

برهان .

فرض می کنیم $|N| = m$ و $|G:N| = n$. دراین صورت $|G| = mn$. اگر $\tau \in Aut(G)$، آنگاه داریم $|N| = |\tau(N)|$ (زیرا $N \cong \tau(N)$). همچنین $N \lhd G$ بنابراین، $N\tau(N) \leq G$. بادرنظرگرفتن $d = |N \cap \tau(N)|$، داریم:

$$|N\tau(N)| = \frac{|N||\tau(N)|}{|N \cap \tau(N)|} \Big| |G|.$$

یعنی، $\frac{m^2}{d} \Big| n$ بنابراین، $\frac{m}{d} \Big| n$. چون $(m,n) = 1$، درنتیجه، $\left(n, \frac{m}{d}\right) = 1$ یعنی خواهیم داشت $m = d$. در نتیجه، $N = \tau(N)$ و حکم ثابت شد. ■

۱-۲-٦ تعریف. گروه غیر بدیهی G را مشخصاً ساده گوییم، درصورتی که زیرگروههای مشخص آن ۱و G باشند.

۱-۲-۷ قضیه.

فرض کنیم G یک گروه متناهی غیربدیهی باشد. دراین صورت G مشخصاً ساده است اگرو تنها اگر G به حاصلضرب تعدادی متناهی اززیرگروههای ساده خودکه دوبه دویکریخت اند، تجزیه شود.

برهان.

به [۱،قضیه ۵-۲-۵] مراجعه شود.

۱-۲-۸ تعریف. فرض کنیم F یک میدان باشد. در این صورت

$$GL(n,F)=\left\{A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\middle| a_{ij}\in F, \det A\neq 0\right\},$$

با عمل ضرب ماتریس ها تشکیل یک گروه می دهد که آن را گروه خطی عام (از درجه n بر F) می نامیم.

همچنین

$$SL(n,F)=\left\{A\in GL(n,F)\middle| \det A=1\right\},$$

زیرگروهی از $GL(n,F)$ است که گروه خطی خاص نامیده می شود.

۱-۲-۹ قضیه.

فرض کنیم n یک عدد طبیعی مفروض و $|F|=q$ که q توان مثبتی از یک عدد اول است. در این صورت

الف) $|GL(n,q)|=(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$.

ب) $|sL(n,q)|=(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1}) \,/\, q-1$.

برهان.

به [۱، قضیه ۳-۲-۱] مراجعه شود.

۱-۲-۱۰ لم.

فرض کنیم G یک p -گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^n باشد، که در آن p عددی اول است و $n\in N$. در این صورت $Aut(G)\cong GL(n,p)$. به علاوه، با فرض فوق $Aut(G)$ ساده ناآبلی است اگر و تنها اگر $p=2$ ، $n\geq 3$.

برهان.

به [۷] مراجعه شود.

۱-۲-۱۱ قضیه.

فرض کنیم G یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^n باشد. در این صورت

$$|Aut(G)| = (p^n - p^{n-1})(p^n - p^{n-2})..(p^n - 1).$$

برهان.

بنا به قضیه ۱-۲-۱۰، داریم $Aut(G) \cong GL(n,p)$. درنتیجه، باتوجه به قضیه ۱-۲-۹، مرتبه $GL(n,p)$ برابر است با $(p^n - p^{n-1})..(p^n - 1)$. بنابراین، حکم برقرار است. ■

۱-۲-۱۲ قضیه.

فرض می کنیم $G = H \times K$ تجزیه ای از G به حاصل ضرب مستقیم دو زیر گروه نرمالش باشد. در این صورت:

الف) یک تکریختی از $Aut(H) \times Aut(K)$ به $Aut(G)$ موجود است.

ب) اگر G متناهی باشد و $(|H|,|K|) = 1$، آنگاه $Aut(H) \times Aut(K) \cong Aut(G)$.

برهان.

الف) فرض می کنیم $\alpha \in Aut(H)$ و $\beta \in Aut(K)$. نگاشت $\gamma : G \to G$ رابا ضابطه $\gamma(h,k) = (\alpha(h), \beta(k))$ در نظر می گیریم، که $h \in H$ و $k \in K$. ثابت می کنیم $\gamma \in Aut(G)$.

ابتدا نشان می دهیم γ خوش تعریف است.

$$(h,k) = (h',k') \Rightarrow (\alpha(h), \beta(k)) = (\alpha(h'), \beta(k')) \Rightarrow \gamma(h,k) = \gamma(h',k').$$

حال ثابت می کنیم، γ همریختی است.

$$\begin{aligned}\gamma((h,k).(h',k')) &= \gamma(hh',kk') = (\alpha(h)\alpha(h'), \beta(k).\beta(k')) = (\alpha(h), \beta(k)).(\alpha(h'), \beta(k')) \\ &= \gamma(h,k).\gamma(h',k').\end{aligned}$$

در این مرحله یک به یک بودن γ را ثابت می کنیم.

$$\gamma(h,k) = \gamma(h',k') \Rightarrow (\alpha(h), \beta(k)) = (\alpha(h'), \beta(k')),$$

بنابراین، $\alpha(h) = \alpha(h')$ و $\beta(k) = \beta(k')$. پس $k = k'$ و $h = h'$.

به ازای هر $\alpha(h) = h$ و $\beta(k) = k$، وجود دارد $h \in H$ و $k \in K$ به طوری که

$$.\gamma(h,k)=(h,k)=(\alpha(h),\beta(k)).$$

γ پوشاست. پس $.\gamma\in Aut(G)$

اکنون نگاشت $\varphi:Aut(H)\times Aut(K)\to Aut(G)$ را بـا ضـابطه ی $\varphi(\alpha,\beta)=\gamma$ در نظـر مـی گیـریم. ابتـدا خـوش تعریفی φ را ثابت می کنیم. فرض می کنیم $(\alpha,\beta)=(\alpha',\beta')$. در این صورت به ازای هـر $h\in H$ و $k\in K$ ، خـواهیم داشت $(\alpha(h),\beta(k))=(\alpha'(h),\beta'(k))$، این یعنی $\gamma(h,k)=\gamma'(h,k)$. چون h و k دلخواه هستند، داریـم $\gamma=\gamma'$. در نتیجه، $.\varphi(\alpha,\beta)=\varphi(\alpha',\beta')$

(همریختی بودن φ). داریم $\varphi((\alpha,\beta),(\alpha',\beta'))=\varphi(\alpha o\alpha',\beta o\beta')$.نشان می دهیم این عبارت برابربا $\gamma o\gamma'$ است. مانند قسمت قبل h و kی دلخواه از H و K در نظر می گیریم به طوری که

$$\varphi(\alpha o\alpha'(h),\beta o\beta'(k))=(\alpha o\alpha'(h),\beta o\beta'(k)),$$

از طرفی

$$\gamma o\gamma'(h,k)=\gamma(\alpha'(h),\beta'(k))=(\alpha o\alpha'(h),\beta o\beta'(k)).$$

در نتیجه

$$\varphi((\alpha,\beta),(\alpha',\beta'))=\gamma o\gamma'=\varphi(\alpha,\beta)o\varphi(\alpha',\beta').$$

φ یک به یک نیز است؛ زیرا

$$\varphi(\alpha,\beta)=\varphi(\alpha',\beta')\Rightarrow\gamma=\gamma'\Rightarrow(\alpha,\beta)=(\alpha',\beta').$$

یعنی، φ یک تکریختی است. برای اثبات قسمت (ب) کافی است ثابـت کنـیم، φ پوشاسـت. بنـابر لـم۱-۲-۵، $H,KchG$ بنـابراین، بـا فـرض $\gamma\in Aut(G)$ معلـوم مـی شـود کـه $\gamma|_H\in Aut(H)$ ونیـز $\gamma|_K\in Aut(K)$. بـا توجـه بـه مـوارد مذکور $\varphi:(\gamma|_H,\gamma|_K)\to\gamma$، یعنی، φ یک بروریختی ودرنتیجه، یکریختی است.■

۱-۳ خودریختی های مرکزی

۱-۳-۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. دراین صورت هر همریختـی α از G بـه G را یـک درونریختـی G مـی نامیم. مجموعه همه درونریختی های G رابا علامت $End(G)$ نشان مـی دهـیم. اگـر $\alpha\in End(G)$ و $x\in G$، آنگـاه بـه جای $\alpha(x)$ دربعضی موارد از x^α استفاده خواهیم کرد.

۱-۳-۲ تعریف. فرض کنیم α و β دو درونریختی G باشند. در این صورت:

الف) α را خودتوان گوییم هرگاه $\alpha^{2}=\alpha$.

ب) α را پوچتوان گوییم هرگاه عدد طبیعی m موجود باشد به طوری که $\alpha^{m}=0$.

۱-۳-۳ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $\alpha \in End(G)$. در این صورت αرا نرمال[2] گوییم، هر گاه α با هر خود ریختی داخلی G تعویض پذیر باشد. مجموعه همه درونریختی های نرمال G را با علامت $End_{C}(G)$[3] نشان می دهیم.

۱-۳-٤ لم.

فرض کنیم α یک درونریختی نرمال G باشد. در این صورت:

الف) به ازای هر xو y از G، $(x^{-1}yx)^{\alpha}=x^{-1}y^{\alpha}x$.

ب) حاصل ضرب دو درونریختی نرمال G، نرمال است.

ج) حاصل جمع دو درونریختی نرمال G،درصورت وجودنرمال است.

د) درونریختی های 0 و ε و هر دو نرمال اند.

برهان.

الف) چون αدرونریختی نرمال است، پس به ازای هر σ_{x} متعلق به $Inn(G)$ وبه ازای هر y از G، $\alpha\sigma_{x}(y)=\sigma_{x}\alpha(y)$ که معادل است با $(\sigma_{x}(y))^{\alpha}=\sigma_{x}(y^{\alpha})$ یعنی، به عبارت دیگر $(x^{-1}yx)^{\alpha}=x^{-1}y^{\alpha}x$ و حکم ثابت شد.

ب) فرض می کنیم α و β دودرونریختی نرمال باشند به طوریکه $\alpha\beta$ موجودباشد. به ازای هر xو yاز G، داریم:

$$(x^{-1}yx)^{\alpha\beta}=(x^{-1}y^{\alpha}x)^{\beta}=x^{-1}y^{\alpha\beta}x\ .$$

یعنی $\alpha\beta$ به موجب (الف)، نرمال است.

ج) αو βرا مانند قسمت قبل درنظرمی گیریم که $\alpha+\beta$ موجودباشد. به ازای هر x و yاز G، داریم:

$$(x^{-1}yx)^{\alpha+\beta}=(x^{-1}yx)^{\alpha}(x^{-1}yx)^{\beta}=x^{-1}y^{\alpha}xx^{-1}y^{\beta}x=x^{-1}y^{\alpha+\beta}x.$$

د) اثبات این قسمت آسان است.■

۱-۳-۵ لم.

فرض کنیم αیک درونریختی نرمال G باشد و $H \lhd G$. در این صورت $H^{\alpha}\lhd G$.

2.normal
3.Central Automorphism

برهان.

چون H نرمال در G است، برای هر g از G و h از H، $g^{-1}hg \in H$. حال بـرای هـر $\alpha(h) \in \alpha(H)$ و $g \in G$، داریـم $g^{-1}\alpha(h)g = \alpha(g^{-1}hg)$، یعنی، $\alpha(H) \lhd G$.■

۱-۳-۶ لم.

فرض کنیم α یک درونریختی باشد به طوری که $G^{\alpha} = G$. در این صورت α نرمال است اگر و تنها اگر به ازای هر x از G، $x^{\alpha}x^{-1} \in Z(G)$.

برهان.

ابتدا فرض کنیم α نرمال باشد و $y \in G$ و x. داریم:

$$x^{-1}y^{\alpha}x = (x^{-1}yx)^{\alpha} = (x^{\alpha})^{-1}y^{\alpha}x^{\alpha}.$$

و از آنجا $x^{\alpha}x^{-1}y^{\alpha} = y^{\alpha}x^{\alpha}x^{-1}$، پس $x^{\alpha}x^{-1} \in Z(G^{\alpha}) = Z(G)$.

بـــر عـــــکس، هـــــر گــــاه بـــه ازای هـــــر x از G، $x^{\alpha}x^{-1} \in Z(G)$، آنـــــگاه بـــه ازای هـــــر y از G، $(x^{\alpha}x^{-1})y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^{\alpha}x^{-1})$. در نتیجه، $x^{-1}y^{\alpha}x = (x^{\alpha})^{-1}y^{\alpha}x^{\alpha} = (x^{-1}yx)^{\alpha}$، یعنی، α نرمال است.■

۱-۳-۷ تعریف. فرض کنیم α یک خودریختی نرمال باشـد. در ایـن صـورت α را یـک خـودریختی مرکـزی مـی نـامیم. مجموعه همه خودریختی های مرکزی G را با $Aut_C(G)$[4] نشان می دهیم.

۱-۳-۸ تعریف. گروه ناآبلی G را خالی از عامل آبلی (کاملا ناآبلی) گوییم، در صورتی که G عامل مستقیم نابدیهی آبلـی نداشته باشد.

۱-۳-۹ مثال. S_3، یک گروه کاملا نا آبلی است.

۱-۳-۱۰ تعریف. فرض کنیم G یک گروه آبلی و m عددی طبیعی باشد . در این صـورت زیرگـروه هـای G^m و G_m از G را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$G^m = \{g^m | g \in G\},$$

$$G_m = \{g \mid g^m = 1\}.$$

4.central automorphism