



دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

انشعاب هاف و توپولوژیکی نعل اسب در یک
سیستم مالی آشوبناک

استاد راهنما

دکتر حسین خیری

استاد مشاور

دکتر فریبا بهرامی

پژوهشگر

زرین منصور کاوکانی

شهریور ۱۳۹۲

سورة التوبة

تقدیم بہ

یگانہ منجی عالم بشریت

روان پاک پدر بزرگوارم
کہ عالمانہ بہ من آموخت تا چگونہ در عرصہ می زندگی، ایستادگی را تجربہ نمایم
روان پاک مہربان مادرم
او کہ دنیا در برابر وسعت آسمان دلش تنگ بود.

خدایا...

به من زیستی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌شماری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگی‌ش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لیخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت. به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بدانند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جان من همه نداشتن هست...

سپاس‌گزاری...

شکر و سپاس خدای را که بزرگترین امید و یاور در زندگیست. در آغاز، درود می‌فرستم به روان پاک پدر بزرگوارم و روان پاک مادر عزیزم آن دو فرشته‌ای که سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم و تشکر می‌کنم از برادر و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که بهترین پشتیبان من بودند. همچنین، وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حسین خیری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از خانم دکتر فریبا بهرامی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر علی‌اصغر جدیری که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و این رساله را در کمال صبر و حوصله مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند، کمال تشکر را دارم. در پایان، از خانم وجیهه وفایی به خاطر زحمات و راهنمایی‌های ارزنده‌شان کمال تشکر را دارم، هرگز محبت‌های بی‌دریغشان در دلم جایی برای فراموشی نخواهد داشت.

زرین منصور کاوکانی

مرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی: منصور کاوکانی	نام: زرین
عنوان پایان‌نامه: انشعاب هاف و توپولوژی نعل اسب در یک سیستم مالی آشوبناک	
استاد راهنما: دکتر حسین خیری استاد مشاور: دکتر فریبا بهرامی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل	
دانشگاه: تبریز	دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۲	تعداد صفحه: ۱۳۷
کلیدواژه‌ها: سیستم دینامیکی، سیستم آشوبناک، انشعاب هاف، توپولوژی نعل اسب	
<p>چکیده</p> <p>در این پایان‌نامه، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی بیان می‌شود. سپس، به بحث در مورد سیستم‌های آشوبناک پرداخته می‌شود. با تحلیل ریاضی نشان می‌دهیم که انشعاب هاف در سیستم مالی در سه نقطه‌ی تعادل $S_{1,2}$ اتفاق می‌افتد و انشعاب هاف در S_3 ناتباهیده و فوق بحرانی است. سپس با کمک کامپیوتر وجود نعل اسب آشوبناک را برای سیستم مالی بررسی می‌کنیم.</p>	

فهرست مطالب

ج	فهرست مطالب
خ	لیست تصاویر
ز	مقدمه
۱	۱ سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه
۱	۱.۱ روش‌های هندسی برای درک رفتار جواب سیستم دینامیکی
۵	۲.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها
۱۱	۳.۱ تصاویر فاز سیستم‌های خطی
۲۰	۴.۱ خطی‌سازی در نقاط ثابت
۲۲	۵.۱ نقاط معمولی
۲۲	۶.۱ شار و سیستم دینامیکی
۲۴	۷.۱ نقاط حدی و دورهای حدی
۲۶	۸.۱ سیستم‌های گسسته
۲۷	۲ آشوب
۲۷	۱.۲ تاریخچه آشوب
۳۱	۲.۲ آشوب و ویژگی‌های نظریه آشوب
۳۳	۱.۲.۲ اثر پروانه‌ای
۳۳	۲.۲.۲ خودسازمان‌دهی یا سازگاری پویا

۳۴	خودمانایی یا خودشباهتی	۳.۲.۲
۳۵	جاذب عجیب	۴.۲.۲
۳۷	روش‌های تشخیص رفتار آشوبناک	۳.۲
۳۷	انشعاب	۱.۳.۲
۴۳	حساسیت به شرایط اولیه	۲.۳.۲
۴۴	مقطع و نگاشت پوانکاره	۳.۳.۲
۵۱	نمای لیاپانوف	۴.۳.۲
۵۴	گذر به آشوب یا دو برابر شدن دوره تناوب	۴.۲
۵۸	فرکتال	۵.۲
۵۹	کاربرد آشوب	۶.۲
۶۳	تحلیل انشعاب هاف در سیستم‌های مالی آشوبناک	۳
۶۴	تعاریف اولیه	۱.۳
۶۵	مینفلد مرکز	۲.۳
۷۰	نظریه‌ی فرم نرمال	۳.۳
۷۲	محک راث-هورویتز	۴.۳
۷۴	شکل نرمال انشعاب هاف	۵.۳
۷۷	اولین ضریب لیاپانوف	۶.۳
۷۸	بررسی انشعاب هاف در سیستم مالی	۷.۳
۸۳	بررسی نقطه‌ی تعادل ه	۱.۷.۳
۸۷	بررسی نقطه‌ی تعادل ۱,۲	۲.۷.۳
۸۹	مثالهای عددی	۳.۷.۳
۹۴	توپولوژی نعل اسب در سیستم مالی آشوبناک	۴
۹۴	مجموعه‌های پایا	۱.۴
۹۵	دینامیک‌های نمادین	۲.۴
۱۰۰	نعل اسب اسمیل	۳.۴

۴۰۴	توپرلوزی نعل اسب در یک سیستم مالی آشوبناک	۱۱۰
۱۲۲	نتایج و پیشنهادها	
۱۲۳	مراجع	
۱۲۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۳۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

لیست تصاویر

- ۱.۱ هم‌شیب‌های انتخاب شده برای معادله $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$ ۳
- ۳.۱ منحنی‌های جواب معادله دیفراسیل $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$ ۴
- ۲.۱ ناحیه‌های تحدب (P) و تعقر (N) برای جواب‌های $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$ ۴
- ۴.۱ همسایگی‌های N و N' در تعریف ۳.۲.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در \mathbb{R}^2 ۶
- ۶.۱ همسایگی‌های N و N' در تعریف ۶.۲.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در \mathbb{R}^2 ۷
- ۵.۱ همسایگی‌های N و N' در تعریف ۴.۲.۱ برای نقطه ثابت مبدأ در \mathbb{R}^2 ۷
- ۷.۱ چهار خط فاز ممکن متناظر با یک نقطه ثابت منفرد. نقطه ثابت مورد نظر در (الف)، جاذب، در (ب) و (ج)، گذر و در (د)، دافع است. ۸
- ۹.۱ منحنی‌های جواب معادله $\dot{x} = \frac{1}{4}(x^2 - 1)$ ۸
- ۸.۱ نمودار تابع $X(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)$ و خط فاز متناظر با آن. ۸
- ۱۱.۱ منحنی‌های جواب معادله (۷.۱) به ازای $a = 3/2$ ۱۱
- ۱۰.۱ نمودار تابع $X(x) = ax(1 - x)$ به ازای $a = 3/2$ و خط فاز متناظر با آن. ۱۱
- ۱۲.۱ مقادیر ویژه حقیقی و متمایز منجر به (الف) گره ناپایدار ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$); (ب) گره پایدار ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$) و (ج) نقطه زینی ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) می‌شود. ۱۵

- ۱۳.۱ وقتی A قطری باشد، مقادیر ویژه برابر $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0)$ منجر به گره ستاره می‌شود: (الف) ناپایدار؛ (ب) پایدار. ۱۶
- ۱۴.۱ وقتی A قطری نباشد، مقادیر ویژه برابر $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0)$ منجر به گره نامتعارف می‌شود: (الف) ناپایدار $(\lambda_0 > 0)$ ؛ (ب) پایدار $(\lambda_0 < 0)$ ۱۷
- ۱۵.۱ مقادیر ویژه مختلط منجر به (الف) کانون ناپایدار $(\alpha > 0)$ ؛ (ب) مرکز $(\alpha = 0)$ و (ج) کانون پایدار $(\alpha < 0)$ می‌شود. ۱۸
- ۱۶.۱ تاثیر تبدیل خطی $x = Py$ روی تصویر فاز سیستم متعارف (۱۲.۱). ۱۹
- ۱۷.۱ تصاویر فاز موضعی در نقطه معمولی x_0 برای سیستم (الف) $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = -x_2$ و (ب) $\dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 1$ ۲۳
- ۱۸.۱ تصویر فاز سیستم (۱۵.۱). ۲۵
- ۱.۲ یک لایه از جسم سیال که از قسمت پایین گرم شده است. ۲۹
- ۲.۲ چهار نوع مختلف جاذب. (الف) جاذب نقطه‌ای؛ (ب) دور حدی؛ (ج) جاذب سطحی مارپیچی و (د) جاذب عجیب. ۳۶
- ۳.۲ نمودار انشعاب برای سیستم (۲.۲)، انشعاب زینی-گره را نشان می‌دهد. منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط‌چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است. ۴۰
- ۴.۲ نمودار انشعاب برای سیستم (۳.۲)، نشان دهنده انشعاب ترنس‌کریتیکال است. منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط‌چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است. ۴۰
- ۵.۲ نمودار انشعاب برای سیستم (۴.۲)، نشان دهنده انشعاب چنگال است. منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط‌چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است. ۴۱
- ۶.۲ نمودار انشعاب برای سیستم (۵.۲)، انشعاب هاف را نشان می‌دهد. منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط‌چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است. ۴۲
- ۷.۲ یک نمودار انشعاب که نشان دهنده انشعاب هاف ساب‌کریتیکال است. منحنی پر، نشان دهنده رفتار پایدار و منحنی خط‌چین، نشان دهنده رفتار ناپایدار است. ۴۲

- ۸.۲ سری‌های زمانی $x_1(t)$ برای سیستم لورنز، حساسیت به شرایط اولیه را نشان می‌دهد. شرایط اولیه، $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$ و $x_1(0) = 1$ ۴۳
- ۹.۲ اولین بازگشت روی مقطع پوانکاره Σ ۴۴
- ۱۰.۲ دو مسیر فاز برای سیستم (۷.۲) که یکی از (۲.۰) و دیگری از (۰/۰۱.۰) شروع می‌شود. ۴۶
- ۱۱.۲ یک آونگ به طور متناوب فشرده شده. ۴۷
- ۱۲.۲ اولین بازگشت نگاشت پوانکاره روی مقطع $\theta = \theta$. در فضای سه بعدی، مسیرها داخل یک تور حرکت می‌کنند. ۴۸
- ۱۳.۲ نگاشت‌های پوانکاره و تصاویر فاز برای سیستم (۱۲.۲) به ازای $k = 0/3$ و $\omega = 1/25$: (الف) و (ب) $\Gamma = 0/2$ (یک-دوره‌ای) و (ج) و (د) $\Gamma = 0/3$ (دو-دوره‌ای). ۴۹
- ۱۴.۲ نگاشت‌های پوانکاره و تصاویر فاز برای سیستم (۱۲.۲) به ازای $k = 0/3$ و $\omega = 1/25$: (الف) و (ب) $\Gamma = 0/37$ (پنج-دوره‌ای)؛ (ج) و (د) $\Gamma = 0/5$ (آشوب) و (ه) و (و) $\Gamma = 0/8$ (یک-دوره‌ای). ۵۰
- ۱۵.۲ واگرایی دو مسیر با شرایط اولیه نزدیک به هم. ۵۱
- ۱۶.۲ نمودار نماهای لیاپانوف سیستم لورنز به ازای مقادیر $0 \leq r \leq 30$ ۵۳
- ۱۷.۲ نمودارهای سری زمانی نگاشت لجستیک (۱۴.۲) به ازای زمان‌های گسسته n و مقدار اولیه $x_0 = 0/2$: (الف) $a = 0/9$: (ب) $a = 2/6$: (ج) $a = 3/2$: (د) $a = 3/52$: (ه) $a = 4$ ۵۵
- ۱۹.۲ نمودار انشعاب برای نگاشت لجستیک (۱۴.۲) به ازای $3/4 \leq a \leq 3/7$ ۵۷
- ۱۸.۲ نمودار انشعاب برای نگاشت لجستیک (۱۴.۲) به ازای $0 \leq a \leq 4$ ۵۷
- ۲۰.۲ نمودار نمای لیاپانوف نگاشت لجستیک (۱۴.۲) به ازای $0 \leq a \leq 4$ ۵۷
- ۲۱.۲ نمونه‌هایی از فرکتال‌ها: (الف) فرکتال طبیعی (برگ سرخس) و (ب) فرکتال ریاضی (مجموعه ژولیا). ۵۹

۱.۳	(آ) انشعاب هاف زیر بحرانی ($\sigma = 1$): (ب) انشعاب هاف فوق بحرانی
۷۶	$(\sigma = -1)$
۲.۳	جاذب سیستم به ازای پارامتر $a = ۲$
۳.۳	تصویر فاز سیستم به ازای پارامتر $a = ۲, b = ۰/۴۴۴۴, c = ۰/۳۵$
۴.۳	تصویر فاز سیستم به ازای پارامتر $a = ۲, b = ۰/۴۴۴۴, c = ۰/۲۴$
۱.۴	تصویر f
۲.۴	تصویر f^{-1}
۳.۴	تکرار دوم f
۴.۴	مستطیل های عمودی و افقی
۵.۴	تکرار دوم f^{-1}
۶.۴	مجموعه ی پایای f
۷.۴	موقعیت مجموعه های پایا
۸.۴	جاذب سیستم به ازای پارامتر $a = ۲$
۹.۴	مستطیل $ A_1 B_1 C_1 D_1 $ و تصویر آن تحت نگاشت p
۱۰.۴	زیر مجموعه ی a_1 و تصویر آن
۱۱.۴	زیر مجموعه ی b_1 و تصویر آن
۱۲.۴	جاذب سیستم به ازای پارامتر $a = ۰/۰۰۰۱$ و سطح مقطع M_2
۱۳.۴	مستطیل $ A_2 B_2 C_2 D_2 $ و تصویر آن تحت نگاشت p
۱۴.۴	زیر مجموعه ی a_2 و تصویر آن
۱۵.۴	زیر مجموعه ی b_2 و تصویر آن

مقدمه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای فاز با گذشت زمان شرح می‌دهد. بنابراین، در صورتی که مدل یک مساله کاربردی، به صورت یک سیستم دینامیکی باشد، با حل آن و دانستن وضعیت متحرک در یک لحظه خاص، می‌توان وضعیت آن را در لحظه‌های قبل و بعد پیش‌بینی کرد. از این رو، درک رفتار کیفی سیستم‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سیستم‌های آشوبناک، نوع خاصی از سیستم‌های دینامیکی غیرخطی هستند که به شرایط اولیه خود بسیار حساس هستند. بیشتر مدل‌های دینامیکی غیرخطی اقتصادی و مالی رفتارهای دینامیکی پیچیده‌ی مختلف مثل آشوب، فرکتال و انشعاب را نشان می‌دهند. انشعاب به پدیده‌ای در سیستم‌های دینامیکی اشاره می‌کند که وقتی مقدار پارامتر (پارامتر انشعاب) از مرز عبور می‌کند، ویژگی‌های دینامیکی سیستم، منجر به تغییر توپولوژیکی یا کیفی ناگهانی می‌شود.

انشعاب هاف که در نقطه‌ی تعادل غیر هذلولوی با یک جفت مقدار ویژه‌ی موهومی محض، اما بدون مقدار ویژه‌ی صفر، اتفاق می‌افتد، می‌تواند برای سیستم‌های مالی یا اقتصادی، آستانه‌ی عدم تعادل باشد که تصمیمات جامعه نمی‌تواند قیمت افزایشی منابع تخصیص نیافته مثل افزایش‌های ناشی از عدم تعادل را موجب شود. چنین آستانه‌ای مجبور به بازسازی سیستم بازار می‌شود. نقطه‌ی انشعاب در سیستم‌های مالی یا اقتصادی نقطه‌ای است که سیستم برای عمل کردن در یک سطح پایدار یا قابل قبول، بازسازی شده است. اگرچه مشخصه‌ی آشوبناک سیستم اساساً به وسیله‌ی نمای لیاپانوف و شبیه سازی عددی اثبات شد، گاهی اوقات نمای لیاپانوف به علت دقت محاسبه‌ی متناهی، نادرست است. بنابراین نیاز است که روشهای بیشتری برای مطالعه و اثبات کردن آشوب پیدا کنیم. نظریه‌ی نعل اسب یا توپولوژی نعل اسب ممکن است روش خوبی باشد. بطوریکه اگر نعل اسب در یک سیستم دینامیکی یافت شود، آن سیستم آشوبناک خواهد بود.

این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۴۰] تنظیم شده است، شامل چهار فصل است و در آن انشعاب هاف و توپولوژی نعل اسب در یک سیستم مالی آشوبناک بررسی می‌شود. در فصل اول، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی پیوسته از قبیل نقطه ثابت، پایداری نقطه ثابت، تصاویر فاز سیستم‌های خطی و غیرخطی، شار، نقطه حدی، دور حدی و غیره بیان شده است.

در فصل دوم، پس از تعریف آشوب، روش‌هایی برای تشخیص آشوب بیان شده است از جمله، مفهوم انشعاب شرح داده شده است که یکی از مهمترین موضوع‌های مورد مطالعه سیستم‌های دینامیکی است. و رفتار کیفی سیستم لورنز و نگاشت لجستیک بررسی شده است. سپس، به چند مورد از کاربردهای آشوب در علوم مختلف اشاره شده است.

در فصل سوم، انشعاب هاف و اولین ضریب لیاپانوف در سیستم مالی بررسی شده است. در فصل چهارم نگاشت نعل اسب اسمیل و وجود نعل اسب اسمیل در سیستم مالی بررسی شده است. لازم به ذکر است که همه برنامه‌های لازم با نرم‌افزار Maple ۱۳ نوشته شده است. برنامه‌ها، در یک CD ضمیمه شده است. همچنین، در شبیه‌سازی‌های عددی از روش رانگ-کوتا^۱ استفاده شده است.

^۱Runge-Kutta

فصل ۱

سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای حالت $D \subseteq \mathbb{R}^n$ با گذشت زمان شرح می‌دهد. هرگاه زمان با استفاده از مقادیر صحیح سنجیده شود، یعنی $t \in \mathbb{Z}$ ، سیستم دینامیکی را گسسته گویند. اگر زمان به طور پیوسته تغییر کند، یعنی $t \in \mathbb{R}$ ، سیستم دینامیکی را پیوسته گویند.

در حالت کلی، سیستم‌های دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیرخطی. سیستم $\dot{x} = X(x)$ ، $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را سیستم خطی از مرتبه n گویند هرگاه X یک نگاشت خطی باشد. اگر X یک نگاشت غیرخطی باشد، آن را سیستم غیرخطی گویند. از آنجایی که بیشتر سیستم‌ها را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی حل کرد، لذا همواره یافتن جواب صریح سیستم‌ها برای درک رفتار آن‌ها ممکن نیست. بنابراین، لازم است از ترکیب روش‌های تحلیلی و هندسی برای درک رفتار سیستم‌ها استفاده کرد.

در این فصل، ابتدا به تحلیل سیستم‌های دینامیکی پیوسته می‌پردازیم.

۱.۱ روش‌های هندسی برای درک رفتار جواب سیستم دینامیکی

یک روش مناسب برای توصیف جواب یک سیستم دینامیکی، یافتن فرمولی صریح برای جواب آن است. در حالت کلی، پیدا کردن فرمولی صریح برای جواب، همواره امکان‌پذیر نیست. اما روش‌های دیگری جهت توصیف جواب وجود دارند که درک و استفاده از این روش‌ها بسیار آسان است. قبل از اینکه به توصیف جواب سیستم دینامیکی بپردازیم، باید از وجودی و منحصر بفردی

جواب آن آگاه باشیم. از این رو، لازم است روشی بیان شود که وجودی جواب و منحصر بفردی آن را بدون حل سیستم تضمین کند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ باشد. گویند $X \in C(D)$ ، هرگاه X تابعی پیوسته باشد. همچنین، گویند $X \in C^k(D)$ ، $k > 0$ ، هرگاه مشتق‌های X تا مرتبه k ام موجود و پیوسته باشند. **قضیه ۲.۱.۱** (قضیه وجودی و منحصر بفردی جواب). فرض کنید D زیرمجموعه باز \mathbb{R}^{n+1} شامل x_0 باشد. اگر $X \in C(D)$ ، آنگاه مساله مقدار اولیه

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

روی I دارای جواب است. همچنین، اگر $\frac{\partial X}{\partial x} \in C(D)$ ، آنگاه مساله دارای جواب منحصر بفرد روی I است.

برهان. رجوع کنید به [۲۵].

ملاحظه ۳.۱.۱. در قضیه ۲.۱.۱، I بزرگ‌ترین بازه‌ای است که مساله مقدار اولیه در آن دارای جواب است. بازه I را بازه ماکزیمال می‌گویند.

در این بخش، از تکنیک‌های هندسی جهت توصیف جواب معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = X(t, x) \quad (1.1)$$

استفاده می‌کنیم.

جواب $x(t)$ از معادله (۱.۱) به طور هندسی با نمودار $x(t)$ نمایش داده می‌شود. همواره رسم دقیق منحنی‌های جواب برای به دست آوردن رفتار کیفی آن‌ها مقدور نبوده و از طرفی، در حالت کلی نیز لازم نیست. در مثال بعدی، نشان می‌دهیم که می‌توان یک طرح کلی از دسته منحنی‌های جواب را به طور مستقیم از معادله دیفرانسیل به دست آورد.

مثال ۴.۱.۱. برای رسم منحنی‌های جواب معادله دیفرانسیل

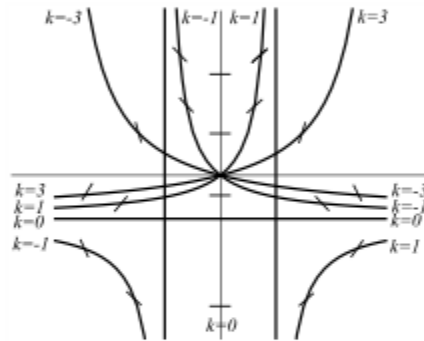
$$\dot{x} = t + \frac{t}{x} \quad (2.1)$$

در ناحیه $D = \{(t, x) : x \neq 0\}$ از صفحه tx مراحل زیر را در نظر می‌گیریم.

۱. معادله دیفرانسیل (۲.۱)، شیب منحنی جواب را در تمام نقاط ناحیه D به دست می‌دهد. منحنی‌های جواب مساله، منحنی $t + \frac{t}{x} = k$ را با شیب ثابت k قطع می‌کنند. این منحنی، منحنی هم‌شیب با شیب k نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای k ، مجموعه هم‌شیب‌ها به دست می‌آید که دسته‌ای از هذلولی‌های

$$x = \frac{t}{k-t}$$

با مجانب‌های $x = -1$ و $t = k$ است. یک انتخاب از این هم‌شیب‌ها در شکل ۱.۱ نشان داده شده است.

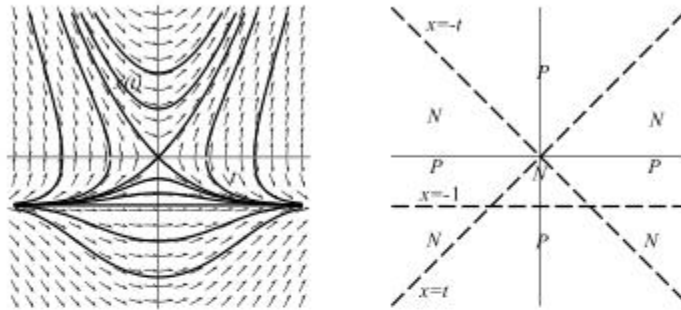


شکل ۱.۱: هم‌شیب‌های انتخاب شده برای معادله $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.

۲. علامت \ddot{x} در D تعیین می‌کند که منحنی‌های جواب، محدب یا مقعر هستند. اگر $\ddot{x} > 0$ ($\ddot{x} < 0$)، آنگاه \dot{x} با افزایش t ، افزایش (کاهش) می‌یابد و منحنی‌های جواب، محدب (مقعر) می‌شوند. لذا، می‌توان ناحیه D را به زیرمجموعه‌هایی افراز کرد که منحنی‌های جواب، محدب یا مقعر باشند و با مرزهایی که $\ddot{x} = 0$ است، جدا شوند. برای (۲.۱) داریم

$$\ddot{x} = x^{-3}(x+1)(x-t)(x+t).$$

از این رو، همچنان که در شکل ۲.۱ نشان داده شده است، D به ناحیه‌های P ($\ddot{x} > 0$) و N ($\ddot{x} < 0$) افراز می‌شود.



شکل ۲.۱: ناحیه‌های تحدب (P) و تعفر (N) برای جواب‌های $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.
 شکل ۳.۱: منحنی‌های جواب معادله دیفراسیل $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.

۳. برای معادله دیفرانسیل (۲.۱)، هم‌شیب‌ها نسبت به $t = 0$ ، به طور متقارن قرار می‌گیرند و لذا منحنی‌های جواب نیز متقارن هستند. تابع $X(t, x) = t + \frac{t}{x}$ در رابطه $X(-t, x) = -X(t, x)$ صدق می‌کند. بنابراین، اگر $x(t)$ یک جواب برای $\dot{x} = X(t, x)$ باشد، آنگاه $x(-t)$ نیز یک جواب است. در نتیجه، می‌توان یک طرح کلی از منحنی‌های جواب، برای (۲.۱) به دست آورد. شکل ۳.۱ را ببینید.

با توجه به اینکه $X(t, x)$ و $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{t}{x^2}$ روی D پیوسته هستند، لذا از هر نقطه D ، دقیقاً یک منحنی جواب می‌گذرد.

بنابراین، یک طرح کلی، با مراحل گفته شده به دست می‌آید.

همان‌طور که از مثال روشن است، رفتار کیفی جواب‌ها توسط $X(t, x)$ تعیین می‌شود. در ادامه این فصل، برای راحتی، به بررسی رفتار کیفی نوع خاصی از سیستم‌ها به نام سیستم‌های خودگردان می‌پردازیم؛ زیرا هر سیستم غیرخودگردان با اضافه نمودن یک متغیر مانند $x_{n+1} = t$ به یک سیستم خودگردان تبدیل می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. سیستم‌هایی به صورت

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

که متغیر مستقل t فقط در دیفرانسیل dt در سمت چپ بوده و به طور صریح در تابع $X(x)$ در سمت راست ظاهر نمی‌گردد، یک سیستم خودگردان نامیده می‌شود.

یکی از بهترین روش‌ها برای درک رفتار کیفی یک سیستم دینامیکی خودگردان، پیدا کردن برخی نقاط خاص سیستم و بررسی رفتار سیستم در همسایگی این نقاط است.

۲.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها

تعریف ۱.۲.۱. سیستم خودگردان (۳.۱) را در نظر بگیرید. یک نقطه ثابت (نقطه تعادل، نقطه بحرانی)، نقطه‌ای است که در معادله $\dot{x} = X(x) = 0$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

تعریف ۲.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم (۳.۱) را منفرد گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_0 وجود داشته باشد به طوری که x_0 تنها نقطه ثابت (۳.۱) در آن همسایگی باشد.

لازم به ذکر است که همواره می‌توان نقطه ثابت x_0 را مبدأ اختیار کرد. این کار به کلیت مساله هیچ خللی وارد نمی‌کند؛ زیرا با تبدیل مختصات $y = x - x_0$ می‌توان x_0 را به مبدأ انتقال داد. در ادامه بحث، نقاط ثابت را منفرد فرض می‌کنیم مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. نقاط ثابت در بررسی رفتار سیستم‌های دینامیکی از اهمیت خاصی برخوردار است و براساس آن می‌توان نحوه تحول سیستم را درک کرد. رفتار جواب سیستم (۳.۱) در همسایگی هر نقطه ثابت، فقط و فقط به صورت یکی از سه حالت به طور مجانبی پایدار، پایدار خنثی و ناپایدار است.

تعریف ۳.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از (۳.۱) را پایدار گویند هرگاه برای هر همسایگی N از x_0 یک همسایگی کوچک‌تر $N' \subseteq N$ وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد N' می‌شود، با افزایش t ، در N باقی بماند. شکل ۴.۱ را ببینید.

تعریف ۴.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از (۳.۱) را به طور مجانبی پایدار گویند هرگاه

۱. پایدار باشد؛

۲. یک همسایگی N از x_0 وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد N می‌شود با افزایش t ، به x_0 میل کند.