دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کابردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

انشعاب هاف و توپولوژیکی نعل اسب در یک سیستم مالی آشوبناک

استاد راهنما

دکتر حسین خیری

استاد مشاور

دکتر فریبا بهرامی

پژوهشگر

زرین منصور کاوکانی

شهریور ۱۳۹۲


بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

یگانه منجی عالم بشریت

و

روان پاک پدر بزرگوارم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه ی زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

و

روان پاک مهربان مادرم

او که دنیا در برابر وسعت آسمان دلش تنگ بود.

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

شکر و سپاس خدای را که بزرگترین امید و یاور در زندگیست.

در آغاز،درود می‌فرستم به روان پاک پدر بزرگوارم و روان پاک مادر عزیزم آن دو فرشته‌ای که سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم و تشکر می‌کنم از برادر و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که بهترین پشتیبان من بودند.

همچنین، وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حسین خیری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از خانم دکتر فریبا بهرامی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر علی‌اصغر جدیری که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و این رساله را در کمال صبر و حوصله مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند، کمال تشکر را دارم.

در پایان، از خانم وجیهه وفایی به خاطر زحمات و راهنمایی‌های ارزنده‌شان کمال تشکر را دارم، هرگز محبت‌های بی دریغشان در دلم جایی برای فراموشی نخواهد داشت.

زرین منصور کاوکانی

مرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی: منصور کاوکانی نام: زرین

عنوان پایان‌نامه: انشعاب هاف و توپولوژی نعل اسب در یک سیستم مالی آشوبناک

استاد راهنما: دکتر حسین خیری
استاد مشاور: دکتر فریبا بهرامی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۱۳۷

کلیدواژه‌ها: سیستم دینامیکی، سیستم آشوبناک، انشعاب هاف، توپولوژی نعل اسب

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی بیان می‌شود. سپس، به بحث در مورد سیستم‌های آشوبناک پرداخته می‌شود. با تحلیل ریاضی نشان می‌دهیم که انشعاب هاف در سیستم مالی در سه نقطه‌ی تعادل $S_{۰,۱,۲}$ اتفاق می‌افتد و انشعاب هاف در $S_۰$ ناتباهیده و فوق بحرانی است. سپس با کمک کامپیوتر وجود نعل اسب آشوبناک را برای سیستم مالی بررسی می‌کنیم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای فاز با گذشت زمان شرح می‌دهد. بنابراین، در صورتی که مدل یک مساله کاربردی، به صورت یک سیستم دینامیکی باشد، با حل آن و دانستن وضعیت متحرک در یک لحظه خاص، می‌توان وضعیت آن را در لحظه‌های قبل و بعد پیش‌بینی کرد. از این رو، درک رفتار کیفی سیستم‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سیستم‌های آشوبناک، نوع خاصی از سیستم‌های دینامیکی غیرخطی هستند که به شرایط اولیه خود بسیار حساس هستند. بیشتر مدل‌های دینامیکی غیرخطی اقتصادی و مالی رفتارهای دینامیکی پیچیده‌ی مختلف مثل آشوب، فرکتال و انشعاب را نشان می دهند.
انشعاب به پدیده‌ای در سیستم‌های دینامیکی اشاره می‌کند که وقتی مقدار پارامتر (پارامتر انشعاب) از مرز عبور می‌کند، ویژگی های دینامیکی سیستم، منجر به تغییر توپولوژیکی یا کیفی ناگهانی می‌شود.

انشعاب هاف که در نقطه‌ی تعادل غیر هذلولوی با یک جفت مقدار ویژه‌ی موهومی محض، اما بدون مقدار ویژه‌ی صفر، اتفاق می‌افتد، می‌تواند برای سیستم‌های مالی یا اقتصادی، آستانه‌ی عدم تعادل باشد که تصمیمات جامعه نمی‌تواند قیمت افزایشی منابع تخصیص نیافته مثل افزایش‌های ناشی از عدم تعادل را موجب شود. چنین آستانه‌ای مجبور به بازسازی سیستم بازار می شود.

نقطه‌ی انشعاب در سیستم‌های مالی یا اقتصادی نقطه‌ای است که سیستم برای عمل کردن در یک سطح پایدار یا قابل قبول، بازسازی شده است. اگرچه مشخصه‌ی آشوبناک سیستم اساساً به وسیله‌ی نمای لیاپانوف و شبیه سازی عددی اثبات شد، گاهی اوقات نمای لیاپانوف به علت دقت محاسبه‌ی متناهی، نادرست است. بنابراین نیاز است که روشهای بیشتری برای مطالعه و اثبات کردن آشوب پیدا کنیم. نظریه ی نعل اسب یا توپولوژی نعل اسب ممکن است روش خوبی باشد. بطوریکه اگر نعل اسب در یک سیستم دینامیکی یافت شود، آن سیستم آشوبناک خواهد بود.

این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۴۰] تنظیم شده است، شامل چهار فصل است و در آن انشعاب هاف و توپولوژی نعل اسب در یک سیستم مالی آشوبناک بررسی می‌شود.

در فصل اول، ابتدا مفاهیم اولیه در مورد سیستم‌های دینامیکی پیوسته از قبیل نقطه ثابت، پایداری نقطه ثابت، تصاویر فاز سیستم‌های خطی و غیرخطی، شار، نقطه حدی، دور حدی و غیره بیان شده است.

در فصل دوم، پس از تعریف آشوب، روش‌هایی برای تشخیص آشوب بیان شده است از جمله، مفهوم انشعاب شرح داده شده است که یکی از مهمترین موضوع‌های مورد مطالعه سیستم‌های دینامیکی است.و رفتار کیفی سیستم لورنز و نگاشت لجستیک بررسی شده است. سپس، به چند مورد از کاربردهای آشوب در علوم مختلف اشاره شده است.

در فصل سوم، انشعاب هاف و اولین ضریب لیاپانوف در سیستم مالی بررسی شده است.

در فصل چهارم نگاشت نعل اسب اسمیل و وجود نعل اسب اسمیل در سیستم مالی بررسی شده است. لازم به ذکر است که همه برنامه‌های لازم با نرم‌افزار $Maple$ ۱۳ نوشته شده است. برنامه‌ها، در یک CD ضمیمه شده است. همچنین، در شبیه‌سازی‌های عددی از روش رانگ-کوتا[1] استفاده شده است.

[1] Runge-Kutta

فصل ۱

سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای حالت $D \subseteq \mathbb{R}^n$ با گذشت زمان شرح می‌دهد. هرگاه زمان با استفاده از مقادیر صحیح سنجیده شود، یعنی $t \in \mathbb{Z}$، سیستم دینامیکی را **گسسته** گویند. اگر زمان به طور پیوسته تغییر کند، یعنی $t \in \mathbb{R}$، سیستم دینامیکی را **پیوسته** گویند.

در حالت کلی، سیستم‌های دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیرخطی. سیستم $\dot{x} = X(x)$، $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را سیستم خطی از مرتبه n گویند هرگاه X یک نگاشت خطی باشد. اگر X یک نگاشت غیرخطی باشد، آن را سیستم غیرخطی گویند. از آنجایی که بیشتر سیستم‌ها را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی حل کرد، لذا همواره یافتن جواب صریح سیستم‌ها برای درک رفتار آن‌ها ممکن نیست. بنابراین، لازم است از ترکیب روش‌های تحلیلی و هندسی برای درک رفتار سیستم‌ها استفاده کرد.

در این فصل، ابتدا به تحلیل سیستم‌های دینامیکی پیوسته می‌پردازیم.

۱.۱ روش‌های هندسی برای درک رفتار جواب سیستم دینامیکی

یک روش مناسب برای توصیف جواب یک سیستم دینامیکی، یافتن فرمولی صریح برای جواب آن است. در حالت کلی، پیدا کردن فرمولی صریح برای جواب، همواره امکان‌پذیر نیست. اما روش‌های دیگری جهت توصیف جواب وجود دارند که درک و استفاده از این روش‌ها بسیار آسان است. قبل از اینکه به توصیف جواب سیستم دینامیکی بپردازیم، باید از وجودی و منحصر بفردی

جواب آن آگاه باشیم. از این رو، لازم است روشی بیان شود که وجودی جواب و منحصر بفردی آن را بدون حل سیستم تضمین کند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ باشد. گویند $X \in C(D)$، هرگاه X تابعی پیوسته باشد. همچنین، گویند $X \in C^k(D)$، $k > \circ$، هرگاه مشتق‌های X تا مرتبه kام موجود و پیوسته باشند.

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه وجودی و منحصر بفردی جواب). *فرض کنید D زیرمجموعه بازی در $\mathbb{R}^{n+1}$ شامل $x_\circ$ باشد. اگر $X \in C(D)$، آنگاه مساله مقدار اولیه*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad x(\circ) = x_\circ,$$

روی I دارای جواب است. همچنین، اگر $\frac{\partial X}{\partial x} \in C(D)$، آنگاه مساله دارای جواب منحصر بفرد روی I است.

برهان. رجوع کنید به [۲۵]. ■

ملاحظه ۳.۱.۱. *در قضیه ۲.۱.۱، I بزرگ‌ترین بازه‌ای است که مساله مقدار اولیه در آن دارای جواب است. بازه I را **بازه ماکزیمال** می‌گویند.*

در این بخش، از تکنیک‌های هندسی جهت توصیف جواب معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = X(t, x) \tag{۱.۱}$$

استفاده می‌کنیم.

جواب $x(t)$ از معادله (۱.۱) به طور هندسی با نمودار $x(t)$ نمایش داده می‌شود. همواره رسم دقیق منحنی‌های جواب برای به دست آوردن رفتار کیفی آن‌ها مقدور نبوده و از طرفی، در حالت کلی نیز لازم نیست. در مثال بعدی، نشان می‌دهیم که می‌توان یک طرح کلی از دسته منحنی‌های جواب را به طور مستقیم از معادله دیفرانسیل به دست آورد.

مثال ۴.۱.۱. برای رسم منحنی‌های جواب معادله دیفرانسیل

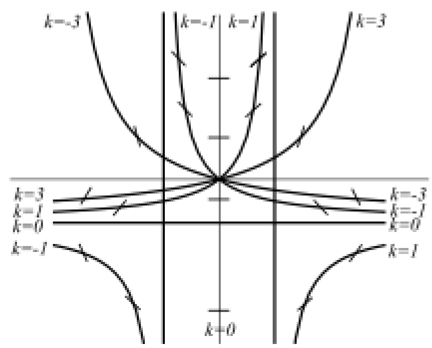
$$\dot{x} = t + \frac{t}{x} \tag{۲.۱}$$

در ناحیه $D = \{(t, x) : x \neq \circ\}$ از صفحه tx مراحل زیر را در نظر می‌گیریم.

۱. معادله دیفرانسیل (۲.۱)، شیب منحنی جواب را در تمام نقاط ناحیه D به دست می‌دهد. منحنی‌های جواب مساله، منحنی $t + \frac{t}{x} = k$ را با شیب ثابت k قطع می‌کنند. این منحنی، **منحنی هم‌شیب** با شیب k نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای k، مجموعه هم‌شیب‌ها به دست می‌آید که دسته‌ای از هذلولی‌های

$$x = \frac{t}{k - t}$$

با مجانب‌های $x = -۱$ و $t = k$ است. یک انتخاب از این هم‌شیب‌ها در شکل ۱.۱ نشان داده شده است.

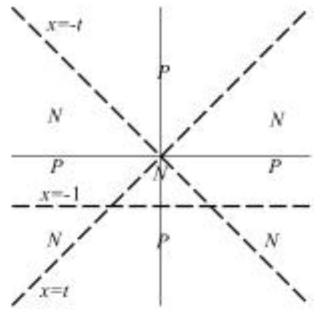


شکل ۱.۱: هم‌شیب‌های انتخاب شده برای معادله $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.

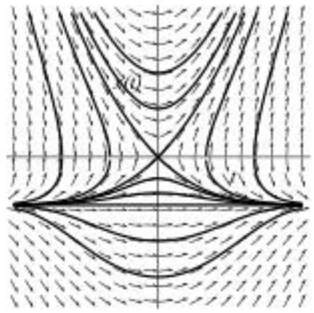
۲. علامت $\ddot{x}$ در D تعیین می‌کند که منحنی‌های جواب، محدب یا مقعر هستند. اگر $\ddot{x} > ۰$ ($\ddot{x} < ۰$)، آنگاه $\dot{x}$ با افزایش t، افزایش (کاهش) می‌یابد و منحنی‌های جواب، محدب (مقعر) می‌شوند. لذا، می‌توان ناحیه D را به زیرمجموعه‌هایی افراز کرد که منحنی‌های جواب، محدب یا مقعر باشند و با مرزهایی که $\ddot{x} = ۰$ است، جدا شوند. برای (۲.۱) داریم

$$\ddot{x} = x^{-۳}(x + ۱)(x - t)(x + t).$$

از این رو، همچنان که در شکل ۲.۱ نشان داده شده است، D به ناحیه‌های P ($\ddot{x} > ۰$) و N ($\ddot{x} < ۰$) افراز می‌شود.



شکل ۱.۲: ناحیه‌های تحدب (P) و تقعر (N) برای جواب‌های $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.



شکل ۱.۳: منحنی‌های جواب معادله دیفرانسیل $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.

۳. برای معادله دیفرانسیل (۱.۲)، هم‌شیب‌ها نسبت به $t = 0$، به طور متقارن قرار می‌گیرند و لذا منحنی‌های جواب نیز متقارن هستند. تابع $X(t, x) = t + \frac{t}{x}$ در رابطه $X(-t, x) = -X(t, x)$ صدق می‌کند. بنابراین، اگر $x(t)$ یک جواب برای $\dot{x} = X(t, x)$ باشد، آنگاه $x(-t)$ نیز یک جواب است. در نتیجه، می‌توان یک طرح کلی از منحنی‌های جواب، برای (۱.۲) به دست آورد. شکل ۱.۳ را ببینید.

با توجه به اینکه $X(t, x)$ و $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{t}{x^2}$ روی D پیوسته هستند، لذا از هر نقطه D، دقیقاً یک منحنی جواب می‌گذرد.

بنابراین، یک طرح کلی، با مراحل گفته شده به دست می‌آید.

همان‌طور که از مثال روشن است، رفتار کیفی جواب‌ها توسط $X(t, x)$ تعیین می‌شود. در ادامه این فصل، برای راحتی، به بررسی رفتار کیفی نوع خاصی از سیستم‌ها به نام سیستم‌های خودگردان می‌پردازیم؛ زیرا هر سیستم غیرخودگردان با اضافه نمودن یک متغیر مانند $x_{n+1} = t$ به یک سیستم خودگردان تبدیل می‌شود.

تعریف ۱.۱.۵. سیستم‌هایی به صورت

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{۱.۳}$$

که متغیر مستقل t فقط در دیفرانسیل dt در سمت چپ بوده و به طور صریح در تابع $X(x)$ در سمت راست ظاهر نمی‌گردد، یک **سیستم خودگردان** نامیده می‌شود.

یکی از بهترین روش‌ها برای درک رفتار کیفی یک سیستم دینامیکی خودگردان، پیدا کردن برخی نقاط خاص سیستم و بررسی رفتار سیستم در همسایگی این نقاط است.

۲.۱ نقاط ثابت و پایداری آن‌ها

تعریف ۱.۲.۱. سیستم خودگردان (۳.۱) را در نظر بگیرید. یک **نقطه ثابت** (نقطه تعادل، نقطه بحرانی)، نقطه‌ای است که در معادله $\dot{x} = X(x) = 0$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

تعریف ۲.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم (۳.۱) را **منفرد** گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_0 وجود داشته باشد به طوری که x_0 تنها نقطه ثابت (۳.۱) در آن همسایگی باشد.

لازم به ذکر است که همواره می‌توان نقطه ثابت x_0 را مبدأ اختیار کرد. این کار به کلیت مساله هیچ خللی وارد نمی‌کند؛ زیرا با تبدیل مختصات $y = x - x_0$ می‌توان x_0 را به مبدأ انتقال داد.

در ادامه بحث، نقاط ثابت را منفرد فرض می‌کنیم مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. نقاط ثابت در بررسی رفتار سیستم‌های دینامیکی از اهمیت خاصی برخوردار است و براساس آن می‌توان نحوه تحول سیستم را درک کرد. رفتار جواب سیستم (۳.۱) در همسایگی هر نقطه ثابت، فقط و فقط به صورت یکی از سه حالت به طور مجانبی پایدار، پایدار خنثی و ناپایدار است.

تعریف ۳.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از (۳.۱) را **پایدار** گویند هرگاه برای هر همسایگی N از x_0 یک همسایگی کوچک‌تر $N' \subseteq N$ از x_0 وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد N' می‌شود، با افزایش t، در N باقی بماند. شکل ۴.۱ را ببینید.

تعریف ۴.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از (۳.۱) را **به طور مجانبی پایدار** گویند هرگاه

۱. پایدار باشد؛

۲. یک همسایگی N از x_0 وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری که وارد N می‌شود با افزایش t، به x_0 میل کند.