بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

الگوریتم‌های نقطه درونی برای حل مسائل بهینه سازی نیمه معین محدب مرتبه‌ی دو

استاد راهنما

دکتر حسین منصوری

استاد مشاور

دکتر مریم زنگی‌آبادی

پژوهشگر

شهلا جعفری

شهریور ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه شهرکرد است.

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

و

استاد گرانقدرم دکتر حسین منصوری

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می داری.

تو می دانی و همه می دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته ام می درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه هایم احساس می کنم. نمی توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله های ضعیف و افتاده، پنهان کرده ام دریاب، دریاب.

تو می دانی و همه می دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، قناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، روزی کن.

[1] مناجاتي از دكتر علي شريعتي.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حسین منصوری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

و هم چنین از خانم دکتر مریم زنگی آبادی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر علیرضا امینی هرندی و جناب آقای دکتر قاسمی که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند تشکر می کنم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خواهر و برادران و خواهرزاده ی عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

شهلا جعفری

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

در این رساله به آنالیز و بررسی مسائل بهینه سازی نیمه معین محدب مرتبه‌ی دو می‌پردازیم و الگوریتم‌های نقطه درونی را براي حل آن ارائه می‌دهیم. این رساله شامل چهار فصل می‌باشد. در فصل اول به معرفی مسائل بهینه سازی نیمه معین محدب مرتبه‌ی دو به عنوان توسیعی از مسائل نیمه معین پرداخته و یک روش نقطه درونی اولیه-دوگان بر اساس تابع هسته‌ای، برای حل آن ارائه می‌دهیم. در فصل دوم توابع هسته‌ای را معرفي کرده و برخی از ویژگی‌های مهم و کاربردی آن‌ها را بیان می‌کنیم. در فصل‌های سوم و چهارم روش‌های جدید نقطه درونی شدنی و نشدنی اولیه-دوگان برای حل مسئله ارائه می‌دهیم و اثبات خواهیم کرد که پیچیدگی روش‌های شدنی و نشدنی به ترتیب $O(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon})$ و $O(n\log\frac{n}{\epsilon})$ است که منطبق بر بهترین تعداد تکرار شناخته شده است.

کلمات کلیدی : بهینه سازی نیمه معین محدب مرتبه دو، روش نقطه درونی اولیه-دوگان، روش شدنی، روش نشدنی، توابع هسته‌ای، پیچیدگی الگوریتم، روش گام کوتاه، روش گام بلند.

فهرست مطالب

مقدمه

مسائل بهینه سازی نیمه معین (SDO)، مسائل بهینه سازی محدب روی اشتراک مجموعه‌ی آفین و مخروط ماتریس‌های نیمه معین مثبت است. در دهه‌ی گذشته مسائل (SDO) یکی از مهم‌ترین مسائل تحقیق در برنامه ریزی ریاضی بوده است. عوامل مهمی در افزایش این علاقه وجود دارد. مثلا این‌که، مسائل (SDO) در رشته‌های متنوعی از قبیل سرشماری آماری، طراحی ساختاری، مهندسی الکترونیک و بهینه سازی ترکیبی [۱، ۲۸] کاربرد دارد. الگوریتم‌های موثر مانند روش‌های نقطه درونی ($IPMs$) باعث افزایش جستجوها و بررسی بیشتر این مسائل شدند. بسیاری از روش‌های نقطه درونی که برای مسائل بهینه سازی خطی (LO) طراحی شده‌اند برای حل مسائل (SDO) هم کاربرد دارند [۱۸، ۲۷، ۲۵، ۲۹]. یک پیشرفت مهم در این زمینه توسط نسترو[۲] و تود[۳] انجام شد [۱۵، ۱۴] . آن‌ها نشان دادند که روش‌های نقطه درونی اولیه-دوگان کارایی نظری خود را زمانی‌که محدودیت‌های نامنفی در (LO) با مخروط‌های محدب جای‌گزین می‌شوند حفظ خواهند کرد، به این معنی که این روش‌ها برای حل مسائل (SDO) هم مفید واقع خواهند شد. کورتانک[۴] و زنگ[۵] [۹]، لی یانگ[۶] و تاوو[۷] [۱۰] و زنگ [۳۱] رابطه‌ی بین بهینه سازی خطی نیمه معین اولیه و دوگان این مسائل را مورد بررسی قرار دادند. یک نکته‌ی جالب این است که تقریبا تمام روش‌های نقطه درونی از یک مسیر معروف به مسیر مرکز استفاده کرده و در امتداد آن به تقریب خوبی از جواب بهینه می‌رسند [۲۸، ۵]. در این رساله یک کلی سازی از مسائل (SDO) که مسائل نیمه معین مثبت محدب مرتبه‌ی دو ($CQSDO$) نامیده می‌شوند را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به فرم و نحوه معرفی این مسائل که بعدا خواهد آمد، واضح است که این مسائل در حالت‌های خاص می‌توانند به فرم مسائل (SDO) یا حتی به فرم مسائل نیمه معین مکمل خطی فرمول بندی شوند [۷، ۸، ۲۴]. مسائل ($CQSDO$) کاربردهای زیادی از جمله مساله‌ی نزدیک‌ترین فاصله‌ی ماتریسی یوکلیدین[۸] [۲] و نزدیک‌ترین ماتریس وابستگی [۲۰] دارند. نایی[۹] و یوان[۱۰] یک الگوریتم نقطه درونی با پیچیدگی

[۲] Nesterov
[۳] Todd
[۴] Kortanek
[۵] Zhang
[۶] Li, Yang
[۷] Teo
[۸] Euclidean
[۹] Nie
[۱۰] Yuan

از مرتبه‌ی $O(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon})$ را برای حل $(CQSDO)$ بیان کردند [۱۶]. آن‌ها هم‌چنین یک الگوریتم نقطه درونی پیش‌گو-اصلاح‌کننده را با استفاده از گام مرکزی نیوتن با کران تکرار $O(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon})$ در [۱۷] ارائه داده‌اند. توو[۱۱] نیز یک الگوریتم اولیه-دوگان پیش‌گو-اصلاح‌کننده را در [۲۳] بیان می‌کند. او هم‌چنین اجراهای متفاوتی از الگوریتم‌اش برای انواع مختلفی از مسائل $(CQSDO)$ با nایی حدود ۱۶۰۰ را نمایش داده و کارایی الگوریتم را به اثبات می‌رساند.

از میان روش‌های نقطه درونی متفاوتی که ارائه شده‌اند، روش‌های اولیه-دوگان از نقطه نظر محاسباتی موثرترین روش شناخته شده‌اند، اما با این وجود باز هم یک اختلاف کوچک بین رفتار عملی و تئوری الگوریتم وجود دارد. به عنوان مثال از نظر تئوری روش‌های گام کوتاه در مقایسه با روش‌های گام بلند از کارایی بهتری برخوردار هستند در حالی که در عمل این‌گونه نیست. اخیرا توابع هسته‌ای بسیاری برای بهتر کردن باند تکرار در روش‌های گام بلند برای مسائل خطی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند تا با استفاده از آن‌ها باند تکرار گام بلند را از $O(n\log\frac{n}{\epsilon})$ به $O(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon})$ کاهش دهند، که این کار تفاوت بین روش گام کوتاه وگام بلند را کاهش می‌دهد. متناظر با هر تابع هسته‌ای یک تابع مانع معرفی می‌کنیم که در آنالیز الگوریتم‌های نقطه درونی بسیار موثر هستند. توابع مانع نه تنها برای به دست آوردن جهت‌های جدید جستجو به کار می‌روند، بلکه به عنوان تابع اندازه بین تکرار فعلی و μ-مرکز که بعدا راجع به آن کاملا توضیح خواهیم داد، در نظر گرفته می‌شود. نظریه‌ی استفاده از توابع مانع در روش‌های نقطه درونی اولین بار توسط پنگ[۱۲] بیان و استفاده شد [۱۸]. او الگوریتم اولیه-دوگان نقطه درونی را بر اساس تابع مانع خود-منتظم برای مسائل خطی و نیمه معین را با بهترین کران تکرار $O(\sqrt{n}\log n\log\frac{n}{\epsilon})$ برای روش گام کوتاه و $O(n\log\frac{n}{\epsilon})$ برای روش گام بلند ارائه داد. سپس بای[۱۳] کلاسی از روش‌های نقطه درونی اولیه-دوگان برای حل مسائل خطی بر اساس توابع هسته‌ای غیر-خود-منتظم بیان نمود [۴، ۳]. در این رساله ما یک تابع هسته‌ای پارامتری معرفی کرده و بر اساس آن روش اولیه-دوگان نقطه درونی را برای حل مسئله $(CQSDO)$ ارائه می‌دهیم. کران تکرار این الگوریتم برای روش گام کوتاه به صورت $O(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon})$ و در روش گام بلند به صورت $O(\sqrt{n}\log n\log\frac{n}{\epsilon})$ است.

در ادامه به بررسی تغییرات جبری و لگاریتمی روی سیستمی که داریم می‌پردازیم و یک روش جدید نقطه درونی شدنی و یک روش جدید نقطه درونی نشدنی برای حل مسائل $(CQSDO)$ ارائه می‌دهیم.

[۱۱] Toh
[۱۲] Peng
[۱۳] Bai

فهرست نمادها

فصل ۱

الگوریتم اولیه-دوگان نقطه درونی برای حل مسائل بهینه سازی محدب نیمه معین مرتبه دو

۱.۱ مقدمات

در این فصل مسئله ی $(CQSDO)$[۱] رامعرفی کرده وبرای حل آن یک الگوریتم نقطه درونی اولیه-دوگان ارائه می دهیم که در آن از توابع هسته ای پارامتری استفاده شده است. می دانیم که روند کار در روش های نقطه درونی این است که از یک نقطه ی اکیدا شدنی، یعنی نقطه‌ای که در قیدهای مساله به طور اکید صدق می‌کند، شروع می کنند و یک μ اولیه مشخص کرده و در هر مرحله یک گام نیوتن برمی دارند و به یک نقطه جدید می رسند که به نقطه ی بهینه نزدیک تر است. این نقطه را μ-مرکز گویند و بعد پارامتر μ را با روش‌هایی که در ادامه گفته خواهند شد به هنگام می‌کنند و دوباره یک گام بر می‌دارند. دقت می‌کنیم که در هر تکرار نقطه‌ی ما باید در یک همسایگی مورد نظر از μ-مرکز قرار بگیرد. در هر مرحله بررسی می‌کنیم که آیا در فاصله‌ی دلخواه از نقطه‌ی بهینه قرار داریم یا نه، اگر در فاصله‌ی مد نظر قرار داشتیم، الگوریتم را متوقف می‌کنیم وگرنه باز هم ادامه می‌دهیم. مسیری که در این روند طی می شود را مسیر مرکز گوییم. در چنین روش‌هایی دقیقا به نقطه ی بهینه نمی رسیم، بلکه به نقطه‌ای می‌رسیم که به اندازه ی ϵ از نقطه ی بهینه فاصله دارد که این اختلاف به دلیل چشم پوشی از یک جمله ی غیر خطی در طول الگوریتم است. در هر گام نیاز داریم که جهت حرکت و فاصله از مسیر مرکز را بدانیم به همین منظور تابع هسته‌ای پارامتری را معرفی می‌کنیم که برای تعیین جهت های حرکت و اندازه گیری فاصله ی بین تکرار داده شده و μ-مرکز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ابتدا چند تعریف مهم را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. ماتریس A را نیمه معین مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم: $x^T A x \geq ۰$.

---
[۱] Convex Quadratic Semi-Definite Optimization

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $\mathbf{S}$ یک زیر مجموعه از $\mathbb{R}^n$ باشد. $\mathbf{S}$ یک فضای آفین است هر گاه برای هر $k > ۰$ و برای هر دسته بردار $v_۱, v_۲, \cdots, v_k$ از $\mathbf{S}$ و هر دسته اسکالر $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_k$ که در شرط $\sum_{i=۱}^{k} \lambda_i = ۱$ صدق می کند، آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{k} \lambda_i v_i$ هم در $\mathbf{S}$ باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید که L یک فضای اقلیدسی n بعدی روی K باشد، یعنی $L = K^n$، در این صورت:

$$x = \begin{pmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L,$$

را یک بردار می‌نامند. ترانهاده یا الحاق یا ترانهاده‌ی الحاقی بردار x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x^* = (x_۱, \cdots, x_n),$$

و داریم $x = {}^*(x^*)$. در این صورت ضرب داخلی استاندارد برای دو بردار $x, y \in L$ که $x = (x_۱, \cdots, x_n)^*$ و $y = (y_۱, \cdots, y_n)^*$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle x, y\rangle := y^* x = \sum_{i=۱}^{n} y_i x_i.$$

ضرب داخلی یک نرم روی L القا می‌کند به صورت: $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$.

تعریف ۴.۱.۱. اگر F یک ماتریس $m \times n$ باشد، ترانهاده‌ی ماتریس F ماتریسی $n \times m$ است که به طور یکتا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle x, F^* u\rangle = \langle Fx, u\rangle \quad \forall x \in K^n, u \in K^m.$$

تعریف ۵.۱.۱. ماتریس M را خود الحاق نامند اگر $M = M^*$. و اگر ماتریس خود الحاق M عضوی از $\mathbb{R}^{m\times m}$ باشد،M را متقارن می‌نامند و اگر M عضوی از $\mathbf{C}^{m\times m}$ باشد، M را هرمیتی نامند. مجموعه‌ی ماتریس‌های خود الحاق $m \times m$ را با $\mathbf{S}^m$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ نیمه معین مثبت را با $\mathbf{S}^n_+$ و مجموعه‌ی ماتریس‌های معین مثبت را با $\mathbf{S}^n_{++}$نمایش می‌دهند. بنابراین اگر رابطه‌ی ترتیبی که به وسیله‌ی نماد نیمه معین مثبت روی فضای $\mathbf{S}^n$ القا می‌شود را برای $A, X \in \mathbf{S}^n$ به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$A \succeq X \iff A - X \in \mathbf{S}^n_+,$$

$$A \succ X \iff A - X \in \mathbf{S}^n_{++}.$$

تعریف ۷.۱.۱. ماتریس مربعی A را نامنفرد یا معکوس‌پذیر گوییم اگر و تنها اگر ماتریس B چنان موجود باشد که:

$$AB = BA = I,$$

که در آن I ماتریس همانی است. ماتریس B وارون ماتریس A نامیده می‌شود و آن را با A^{-1} نشان می‌دهیم. ماتریس A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

تعریف ۸.۱.۱. دو ماتریس $A_{(n\times n)}$ و $B_{(n\times n)}$ متشابه هستند اگر ماتریس نامنفرد $P_{(n\times n)}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$B = P^{-1}AP.$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد. در این صورت λ را مقدار ویژه‌ی ماتریس A گویند، هرگاه:

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

و بردار x را بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ گویند هرگاه:

$$Ax = \lambda x.$$

قضیه ۱۰.۱.۱. *(قضیه‌ی تجزیه‌ی ماتریس‌های متقارن) ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ متقارن است اگر و تنها اگر یک ماتریس چون $U \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری‌که $U^TU = I$ و $U^TAU = \Lambda$ که در آن I ماتریس همانی و Λ ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه‌ی ماتریس A می‌باشند.*

برهان. اثبات در مرجع [۵] ذکر شده است. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد. در این صورت، σ را مقدار منفرد ماتریس A گویند هرگاه:

$$\sigma(A) = \lambda((AA^T)^{\frac{1}{2}}).$$

تعریف ۱۲.۱.۱. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مربعی A را با $\mathbf{Tr}(A)$ نمایش می‌دهیم به عبارت دیگر:

$$\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

که a_{ij} نشان‌دهنده‌ی درایه‌ی (i,j) ماتریس A است. عملگر $\mathbf{Tr}$ یک عملگر خطی است.

لم ۱۳.۱.۱. *فرض کنید $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشند. آن‌گاه موارد زیر برقرارند:*

۱- $\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$ که $\lambda_i(A)$، i-امین مقدار ویژه‌ی ماتریس A است.

۲- $\mathbf{Tr}(A) = \mathbf{Tr}(A^T)$.

۳- $\mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(BA)$.

۴- *اگر A و B متشابه باشند، آن‌گاه،* $\mathbf{Tr}(A) = \mathbf{Tr}(B)$.

لم ۱۴.۱.۱. *اگر دو ماتریس A و B متشابه باشند آن‌گاه مقادیر ویژه‌ی آن دو با هم برابر هستند.*

تعریف ۱۵.۱.۱. دو ماتریس دلخواه $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{i,j})$ در $\mathbb{R}^{m\times n}$ را در نظر می‌گیریم، ضرب داخلی استاندارد (فروبنیوس) ماتریس‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \bullet B = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}b_{ij} = \mathbf{Tr}(A^T B).$$

نرم وابسته به این ضرب داخلی نرم فروبنیوس می‌باشد:

$$\|A\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 = \mathbf{Tr}(A^T A).$$

به وضوح بری هر ماتریس متقارن $A \in \mathbf{S}^n$ داریم:

$$\|A\|^2 = \mathbf{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A^2) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A)^2.$$

لم ۱۶.۱.۱. *نرم فروبنیوس خاصیت ضربی دارد یعنی:*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

لم ۱۷.۱.۱. *موارد زیر برای ماتریس متقارن $X \in \mathbf{S}^n$ هم‌ارز هستند:*

۱) X *نیمه معین مثبت است.*

۲) *مقادیر ویژه‌ی X نامنفی هستند.*

۳) *ماتریس C وجود دارد به‌طوری‌که* $X = C^T C$.

۴) X *می‌تواند به صورت $X = Q\Lambda Q^T$ بیان شود، که Q یک ماتریس متعامد است یعنی،* $QQ^T = Q^T Q = I$ *که I ماتریس همانی است و Λ ماتریس قطری با درایه‌های قطری نامنفی است.*

قضیه ۱۸.۱.۱. *فرض کنید $\mathbf{S}^n_{++}$ فضای متشکل از ماتریس‌های معین مثبت باشد. اگر ماتریس $Q \in \mathbf{S}^n_{++}$ و $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ پادمتقارن باشد، آن‌گاه $\det(Q+M) > 0$. به‌علاوه اگر برای هر $i = 1, 2, \cdots n$ داشته باشیم $\lambda_i(Q+M) \in \mathbb{R}$ ، آن‌گاه:*

$$0 < \lambda_{\min}(Q) \leq \lambda_{\min}(Q+M) \leq \lambda_{\max}(Q+M)\lambda_{\max}(Q).$$

برهان. ابتدا توجه داریم که $Q+M$ نامنفرد است زیرا:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \qquad x^T(Q+M)x = x^T Q x > 0,$$

که تساوی فوق را از پادمتقارن بودن M نتیجه گرفتیم. چون ماتریس tM برای هر $t \in \mathbb{R}$ پادمتقارن باقی می‌ماند، داریم:

$$\psi(t) := \det(Q + tM) \neq 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

تابع ψ یک تابع پیوسته است که هیچ جا صفر نیست و برای $t = ۰$ اکیدا مثبت است، بنابراین $\det(Q) > ۰$. این نشان می‌دهد که $\det(Q + M) > ۰$.
برای اثبات قسمت دوم لم، فرض می‌کنیم $۰ < \lambda$ به‌گونه‌ای است که $\lambda > \lambda_{\max}(Q)$. بنابراین $Q - \lambda I \prec ۰$. با بحثی مشابه بحث فوق $(Q + M) - \lambda I$ نامنفرد است. به عبارت دیگر:

$$\det((Q + M) - \lambda I) \neq ۰.$$

از عبارت فوق می‌توان نتیجه گرفت که λ نمی‌تواند مقدار ویژه‌ی ماتریس $Q + M$ باشد. با روشی مشابه می‌توان ثابت کرد که ماتریس $Q + M$ نمی‌تواند مقدار ویژه‌ای کمتر از $\lambda_{\min}(Q)$ داشته باشد. بنابراین نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

لم ۱۹.۱.۱. *فرض کنید $A, B \in \mathbf{S}^n_+$، آن‌گاه نامساوی‌های زیر برقرار می‌باشند:*

$$\lambda_{\min}(A)\lambda_{\max}(B) \leq \lambda_{\min}(A)\mathbf{Tr}(B) \leq \mathbf{Tr}(AB) \leq \lambda_{\max}(A)\mathbf{Tr}(B) \leq n\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(B).$$

برهان. چون ماتریس A نیمه معین مثبت است، از لم بخش قبل نتیجه می‌گیریم که یک ماتریس متعامد P وجود دارد که $A = P\Lambda P^T$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(P\Lambda P^T B) = \mathbf{Tr}(\Lambda P^T BP) \geq \lambda_{\min}(A)\mathbf{Tr}(P^T BP) &= \lambda_{\min}(A)\mathbf{Tr}(B) \\ &\geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\max}(B).\end{aligned}$$

که دو نامساوی سمت چپ اثبات می‌شود و اثبات نامساوی‌های سمت راست به طور مشابه انجام می‌شود. □

مسئله‌ی برنامه ریزی نیمه معین (SDO)[۲] توسیعی از مسئله‌ی برنامه ریزی خطی است، یعنی یک (SDO) می‌تواند به صورت یک (LO)با ماتریس متغیرها و یک ضرب داخلی متفاوت دیده شود. مسائل (SDO) در فرم استاندارد به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{array}{lll}(P) \quad \min & \langle C, X\rangle & \\ & \langle A_i, X\rangle = b_i, & i = ۱, ۲, \cdots, m, \\ & X \succeq ۰, & \end{array}$$

که در آن $\mathbf{C}$ یک ماتریس هرمیتی $n \times n$ و X یک ماتریس $n \times n$ از متغیرهاست. ماتریس‌های ضرایب A_i، ماتریس‌های هرمیتی داده شده هستند و b_i ها اسکالرهای داده شده هستند. (P) را مسئله‌ی برنامه‌ریزی استاندارد یا مسئله‌ی برنامه ریزی نیمه معین اولیه می‌نامیم. متناظر با مسئله‌ی

[۲] Semi-Definite Optimization

(P) مسئله‌ی برنامه ریزی نیمه معین دوگان (D) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{array}{llll}
(D) & \max & \langle b, y\rangle & \\
& \text{s.t} & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S = C, & i = 1, 2, \cdots, m, \\
& & S \succeq 0. &
\end{array}
$$

حال مسئله‌ی $(CQSDO)$ را که در این پایان نامه مورد بحث قرار داده‌ایم به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$
\begin{array}{llll}
(P) & \min & C \bullet X + \frac{1}{2} X \bullet \Omega(X) & \\
& \text{s.t} & A_i \bullet X = b_i, & i = 1, 2, \cdots, m, \\
& & X \succeq 0, &
\end{array}
$$

که دوگان این مسئله به صورت زیر است:

$$
\begin{array}{llll}
(D) & \max & b^T y - \frac{1}{2} X \bullet \Omega(X) & \\
& \text{s.t} & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i - \Omega(X) + S = C, & i = 1, 2, \cdots, m, \\
& & S \succeq 0, &
\end{array}
$$

که $\Omega(X) : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ یک تابع خطی خود الحاق نیمه معین مثبت متقارن است که برای هر $A, B \in \mathbf{S}^n$ داریم:

$$\Omega(A) \bullet B = A \bullet \Omega(B), \qquad \Omega(A) \bullet A \geq 0.$$

در این رساله، ما مدل خاصی از تابع Ω که به فرم زیر است را در نظر می‌گیریم:

$$\Omega(X) = \sum_{i=1}^{l} H_i^T X H_i,$$

که H_iها ماتریس‌هایی در $\mathbb{R}^{n\times n}$ و l یک عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی n^2 است. این نوع خاص در منبع [۱۴] بررسی شده است. می‌توان دریافت که $\Omega(X)$ متقارن و نیمه معین مثبت است یعنی:

$$\Omega(X) = \Omega(X)^T, \qquad \Omega(X) \bullet X \geq 0, \qquad X \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

بررسی متقارن بودن $\Omega(X)$:

$$\Omega(X)^T = (\sum_{i=1}^{l} H_i^T X H_i)^T = \sum_{i=1}^{l} (H_i^T X H_i)^T = \sum_{i=1}^{l} H_i^T X^T (H_i^T)^T = \sum_{i=1}^{l} H_i^T X H_i$$

بررسی نیمه معین مثبت بودن $\Omega(X)$:

$$\begin{aligned}\Omega(X)\bullet X &= Tr(\Omega(X)^T X) = Tr(\sum_{i=1}^{l} H_i^T X H_i X) = \sum_{i=1}^{l} Tr(H_i^T X H_i X)\\ &= \sum_{i=1}^{l} Tr\big(X^{\frac{1}{2}} H_i^T X^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} H_i X^{\frac{1}{2}}\big) = \sum_{i=1}^{l} \|X^{\frac{1}{2}} H_i X^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

در تمام طول کار دو فرض زیر را در نظر می‌گیریم:

۱)ماتریس‌های $(A_i \quad i = 1, 2, \cdots m)$ مستقل خطی هستند.

۲)مسائل (P) و (D) در شرط نقطه درونی صدق می‌کنند، یعنی $X^\circ \succ 0$ و $S^\circ \succ 0$ و $y^\circ > 0$ وجود دارند که در قیود مساله به طور اکید صدق می‌کنند. یعنی شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}A_i \bullet X^\circ &= b_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \qquad X^\circ \succ 0,\\ \sum_{i=1}^{m} y_i^\circ A_i - \Omega(X^\circ) + S^\circ &= C, \qquad i = 1, 2, \cdots, m, \qquad S^\circ \succ 0.\end{aligned}$$

واضح است که مسائل $(CQSDO)$ زمانی‌که $\Omega(X) = 0$ به مسائل (SDO) کاهش پیدا می‌کنند.
در این پایان‌نامه مجموعه‌ی جواب‌های مساله‌ی اولیه و دوگان $(CQSDO)$ را به ترتیب، توسط نمادهای $\mathcal{P}$ و $\mathcal{D}$ نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &:= \Big\{X \ : \ \mathbf{Tr}(A_i X) = b_i \ , \ i = 1, \cdots, m \ , \ X \succeq 0\Big\},\\ \mathcal{D} &:= \Big\{(y, S) \ : \ \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S - \Omega(X) = C \ , \ S \succeq 0 \ , \ y \in \mathbb{R}^m\Big\}.\end{aligned}$$

هم‌چنین مجموعه‌های بهین آن دو را به ترتیب با نمادهای $\mathcal{P}^*$ و $\mathcal{D}^*$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^* &:= \Big\{X \in \mathcal{P} \ : \ \mathbf{Tr}(CX) + \frac{1}{2} X \bullet \Omega(X) = p^*\Big\},\\ \mathcal{D}^* &:= \Big\{(y, S) \in \mathcal{D} \ : \ b^T y - \frac{1}{2} X \bullet \Omega(X) = d^*\Big\},\end{aligned}$$

که در آن p^* و d^* به ترتیب مقادیر بهین مسائل $(CQSDP)$ و $(CQSDD)$ هستند. قرارداد می‌کنیم که $p^* = -\infty$ است اگر مساله‌ی $(CQSDP)$ بی‌کران باشد و $p^* = \infty$ اگر مساله‌ی $(CQSDP)$ نشدنی باشد. هم‌چنین $d^* = \infty$ است اگر مساله‌ی $(CQSDD)$ بی‌کران باشد و $d^* = -\infty$ است اگر مساله‌ی $(CQSDD)$ نشدنی باشد. $(CQSDP)$ را حل شدنی گوییم اگر $\mathcal{P}^*$ ناتهی باشد و $(CQSDD)$ حل پذیر گوییم اگر $\mathcal{D}^*$ ناتهی باشد.