بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

گرایش نظری

## پایان نامه کارشناسی ارشد

# پتانسیلهای حل پذیر با تقارن شکل ناوردایی در مکانیک کوانتومی

از:

زهرا بخشی



استاد راهنما:

دکتر حسین پناهی

شهریور ۱۳۸۶

**تقدیم به:**

اسطوره های مهربانی و فداکاری **پدر و مادر بزرگوارم،** که با درخشش گوهر بهشتی شان، شیدایی دانش اندوزی را در من افروختند ، **همسر صبورم** به پاس گذشت ،همدلی و همراهی بی دریغش **و فرزندان عزیزم** به قداست حضور پاکشان.

## سپاسگزاری

سپاس بیکران خدای بلند مرتبه را که چراغ دانش را روشنی بخش زندگی بشریت قرار داد.

شایسته است تا از تمام کسانی که مرا در انجام این رساله یاری نموده اند تشکر و قدردانی نمایم. بدین منظور ، مراتب امتنان و سپاس خویش را حضور استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر حسین پناهی، که مرا در تمامی مراحل تحصیلم گام به گام همراهی نمودند و از رهنمودهای گرانقدر خویش بهره‌مند ساختند ، تقدیم می نمایم.

از مدیریت محترم گروه فیزیک ، جناب آقای دکتر عباس قاسمی‌زاد برای فراهم ساختن شرایط لازم در امر تحقیق در دانشکده و جناب آقای دکتر حمید رضا مشایخی نماینده محترم تحصیلات تکمیلی در دانشکده علوم دانشگاه گیلان ، سپاسگزارم.

و از استادان ارجمند، آقایان: دکتر حسین فرج اللهی و دکتر آرمان عقیلی ، که قبول زحمت فرموده وبه بازخوانی این رساله و داوری جلسه دفاعیه همت نهادند، تشکر می نمایم.

همچنین از دوستان عزیزم که طی سالهای تحصیلم همراهی با ایشان توانست پنجره جدیدی به جهان هستی پیش رویم بگشاید ، سپاسگزارم .

در پایان ؛ مهربانی بی‌بدیل پدر و مادر عزیزم، صبوری و همراهی همسر بزرگوارم و گذشت و فداکاری فرزندان دوست داشتنیم سزاوار بیکران‌ترین و خالصانه‌ترین سپاس‌های درونی من خواهند بود، امید که کاستی حضورم را به گرمی دل پاکشان بر من بگذرند.

شهریور ماه یکهزار و سیصد و هشتاد و شش

زهرا بخشی

## فهرست مطالب

عنوان | شماره صفحه

# فهرست جداول

**عنوان** **شماره صفحه**

# فهرست شکل ها

**عنوان** **شماره صفحه**

# چکیده

**عنوان: پتانسیلهای حل پذیر با تقارن شکل ناوردایی در مکانیک کوانتومی**
**نگارنده: زهرا بخشی**

در این تحقیق روشی ساده برای یافتن پتانسیلهای حل پذیر ارائه می شود. با کمک این روش می توان معادله شرودینگر را به معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی، با حل هایی از توابع خاص تبدیل کرد. ارتباط این روش با فرمول بندی های مکانیک کوانتومی ابرتقارنی ثابت می شود و می توان شرطی را که توسط توابع خاص مورد نظر، برای داشتن پتانسیلهایی به شکل $V_{\pm}=W^2+W(x)$ ایجاد می شود نتیجه گرفت. اگر جفت پتانسیلهای ابر تقارنی $V_{\pm}$ در شکل شبیه یکدیگر باشند و تنها تفاوتشان در پارامترهایی باشد که در آنها ظاهر می شود، در این صورت به آنها پتانسیلهای شکل ناوردا گفته می شود. ما این روش را برای چند جمله ایهای ژاکوبی، لاگر تعمیم یافته و هرمیت بکار می بریم و همچنین نشان می دهیم که پتانسیلهای بدست آمده دارای تقارن شکل ناوردایی می باشند و ویژه مقادیر انرژی و توابع موج مربوط به آنها در مثالهایی محاسبه می شوند.

پتانسیلهای شکل ناوردای شناخته شده برای معادله شرودینگر با جرم ثابت بعنوان پتانسیلهای موثر در معادله شرودینگر جرم موثر وابسته به مکان در نظر گرفته می شوند و شرط شکل ناوردایی در این حالت تغییر داده می شود. وجود چنین ویژه مقادیر انرژی نه تنها با شرط انتگرال پذیر مجذوری بر روی توابع موج حاصل می شود بلکه بایستی شرط هرمیتی روی عملگر مومنتوم تغییر یافته نیز برقرار باشد.

واژهای کلیدی:

مکانیک کوانتومی ابر تقارنی – تقارن شکل ناوردایی – جرم موثر.

Abstract


Title: Solvable Potentials with Shape Invariant Symmetry in Quantum Mechanics
Author: Zahra Bakhshi

We investigate a simple method of finding solvable potentials. With the help of this method the Schrödinger equation can be transformed in to various linear homogeneous second - order differential equations that can be solved in terms of known special functions. It turns out to link this method with the formalism of supersymmetric quantum mechanics (SUSY QM) and deduce a condition which has to be satisfied by any special function in order to give potentials of the form $V_{\pm} = W^2 \pm W(x)$ . If the pair of SUSY partner potentials $V_{\pm}(x)$ are similar in shape and differ only in the parameters that appear in them, then they are said to the shape invariant. We apply this method to the Jacobi, generalized Languerre and Hermite polynomials and we also show that the potentials obtained have the shape invariance symmetry and their eigenvalues and wave functions are calculated by some examples.

Known shape invariant potentials for the constant – mass Schrödinger equation are taken as effective potentials in a position-dependent effective mass (PDEM) one, and the corresponding shape invariance condition is deformed. The existence of such energy eigenvalues are determined not only by a square- integrability condition on the wave functions, but also by a Hermiticity condition on the deformed momentum operator.



Key words:
supersymmetric quantum mechanics - shape invariance symmetry – effective mass.

# فصل اول

## مقدمه

در زندگی روزمره اغلب از لفظ تقارن استفاده می کنیم. می گوییم یک گل، یک منظره، یک مجسمه یا یک ساختمان متقارن است و دیگری نیست. یا یکی تقارن بیشتری نسبت به دیگری دارد. در توصیف دقیق طبیعت آنچنان که در فیزیک با آن روبرو هستیم تقارن نقش مهم تر و بنیادی تری ایفا می کند و اثر آنها تنها یک اثر زیبایی شناسی نیست.

در سطوح مختلف طبیعت به تقارن های متعدد و متفاوت بر می خوریم. فضای سه بعدی مطلق یعنی فضای خالی دارای تقارن انتقالی و دورانی است یا به عبارت بهتر قوانین طبیعت نسبت به انتقال و دوران در فضای سه بعدی یکسان هستند. فضا – زمان چهار بعدی، تقارن های بیشتر و عمیق تری دارد. اطمینان ما به این تقارن ها چنان است که از آنها به عنوان محکی برای سنجیدن درستی قوانین جدیدی که می خواهیم برای پدیده های ناشناخته وضع کنیم، استفاده می نماییم. آن دسته از قوانینی که با این تقارن ها سازگار نباشند، در همان مرحله اول کنار گذاشته می شوند. تقارن قوانین فیزیکی تنها یک موضوع انتزاعی نیست، بلکه این تقارن ها باعث می شوند که اجسام فیزیکی که لاجرم تحت تسلط این قوانین هستند به نوبه خود تقارن هایی پیدا کنند. بعنوان مثال حالت پایه اتم هیدروژن یک شکل کروی دارد، شکل اربیتال های دیگر نیز تقارن های مخصوص به خود دارند. تقارن انتقالی باعث می شود که بلورها از تکرار سلول‌های یکسانی در فضا ایجاد شوند. قیدی که

ناشی از سازگاری تقارن های انتقالی برای یک بلور و تقارن های سلول واحد آن است، باعث می شود که تنها بلورهایی با شکل‌های معین در طبیعت یافت شوند. این تقارن نهایتاً به ابعاد ماکروسکوپی و به دنیای گل و پروانه‌ها راه می یابد.

در سطح عمیق‌تر و میکروسکوپی‌تر، تقارن‌های دیگری وجود دارند که به‌راستی شگفت‌انگیزند. به عنوان مثال نیروی هسته‌ای قوی نسبت به تعویض پروتون و نوترون کاملاً متقارن است. می توانیم بگوییم که این نیرو تنها روی یک هستک اثر می‌کند و این هستک می تواند در یکی از دو حالت که آن را پروتون یا نوترون می نامیم، قرار گیرد. درست مثل اسپین الکترون که می تواند در یکی از دو حالت بالا یا پایین قرار گیرد ، که به این تقارن ، تقارن ایزواسپین می گوییم.

در دو دهه اخیر، تلاشهای زیادی توسط فیزیکدانان انجام شد تا ابر تقارن ($SUSY$)[1] به عنوان یک عامل ضروری در هر رویکردی، شناخته شود. آنها می‌خواستند تا به یک توصیف یکدست و یکنواختی از برهم کنش‌های اساسی و پایه‌ای طبیعت، مثل برهمکنش های قوی، الکتروضعیف[2] و گرانشی[3] دست یابند.

در سال ۱۹۷۱، گلفند[4]، لیختمن[5] [۱] و راموند[6] [۲] به این نتیجه رسیدند که $SUSY$ با درجات آزادی فرمیونی و بوزونی رابطه داشته و این خاصیت می باشند، که واگرایی‌های اشعه ماورای بنفش را تحت کنترل در می آورد . در واقع این خاصیت تقارنی است که در عین نسبت دادن بوزونها به فرمیونها ، شامل عملگرهای جا به جا شونده و پاد جابه‌جا شونده می باشد.

جبری که در $SUSY$ استفاده می شود از نوع جبر لی[7] بوده که با ترکیبی از نسبتهای جابه‌جا شونده و پاد جابه‌جا شونده به موضوع مورد نظر مرتبط می شود. این امر برای اولین بار به منظور یکدست کردن بخش های بوزونی[8] و فرمیونی در مدلهای ریسمانی[9] معرفی شد. بعداً این روش در نظریه میدان (3+1) بعدی به کار رفت و خواص جالب آن توسط وس[10] و زومینو[11] [۳] نشان داده شد.

---

[1] Supersymmetry
[2] Electro weak
[3] Gravitational
[4] Gelfand
[5] Likhtman
[6] Rumond
[7] Lie algebra
[8] Bosonic
[9] String models
[10] Wess
[11] Zumino

با ادغام گرانش و $SUSY$ نظریه‌ای به نام ابر گرانش[1] ایجاد شد [٤و٥]. در این نظریه ها، تئوری نسبیت انیشتین به نتیجه مهم عدم ابر تقارنی پیمانه‌ای[2] تبدیل شد. بنابراین تئوری‌های ابر تقارنی پیمانه‌ای، یک چارچوب طبیعی برای یکدست کردن گرانش با دیگر برهم کنش‌های بنیادین طبیعت هستند.

یکی از پیشگویی های مهم تئوری های $SUSY$ ، وجود الگوهای $SUSY$ در کوارک ها[3]، لپتون ها[4] و گیج بوزون ها[5] است که جرم های یکسانی با همتای $SUSY$ خود دارند. این حقیقت که چنین ذراتی مشاهده نشده اند، تایید می کند که $SUSY$ باید به تدریج شکسته شود [٦].

با تحقیقی که ویتن[6] در سال ۱۹۸۱ انجام داد، معلوم شد که ابر تقارنی، برای مکانیک کوانتومی می‌تواند بصورت یک حالت حدی در تئوری میدان بکار برده شود [۷]. تا کنون پیشرفت مکانیک کوانتومی ابر تقارنی از دو روش اصلی پیروی کرده است. در یکی هدف ، روشن کردن نسبت بین مکانیک کوانتومی ابر تقارنی و انواع فرمول بندی های تئوری میدان کوانتومی ابر تقارنی می باشد که با بکار بردن این مدل ساده ، در حالت کلی می توان از مفاهیم تئوری ابر تقارنی سود جست [۷]. همچنین، زمانی که دانشمندان مطالعه جنبه های مختلف مکانیک کوانتومی ابر تقارنی را آغاز کردند، خیلی زود معلوم شد که این موضوع نه تنها به عنوان یک مدل برای امتحان روش‌های تئوری میدان مفید بود، بلکه به خودی خود نیز موضوع جالبی می باشد. به عبارت دیگر به این نتیجه رسیدند که مکانیک کوانتومی ابر تقارنی ($SUSY$ QM) را می توان به روش تجزیه سازی[7] اینفیلد و هیول[8] [۸] ، که اولین روش برای شناسایی مسائل پتانسیل حل پذیر[9] بود، نسبت داد. از این رو به تدریج یک روش دیگر برای درک مسائل پتانسیل حل پذیر بر اساس $SUSY$ بدست آمد. ناگفته نماند، اولین بار روش تجزیه سازی برای حل جبری مسئله اتم هیدروژن توسط شرودینگر بکار رفت که این روش بعدها بوسیله اینفیلد و هیول تایید شد و در مسائل مختلف بکار رفت.

1 Supergravity
2 Gauged SUSY
3 Quarks
4 Leptons
5 Gauge bosons
6 Witten
7 Factorization
8 Infeld and Hull
9 Solvable potentials

قابل توجه این که در مکانیک کوانتومی ابر تقارنی، می توان به شناخت ساده ای از جبر $SUSY$ کـه شـامل عملگرهـای بوزونیک و فرمیونیک می باشند، نائل شد و به خاطر وجود عملگرهای فرمیونی ، که با هامیلتونی جابه جا می شوند، به روابـط خاص بین ویژه مقادیر انرژی، ویژه توابع انرژی و ماتریس های $S$ هامیلتونی مکانیک کوانتوم ابر تقارنی دست یافت [٦].

در سال ۱۹۸۳ مفهوم پتانسیل شکل ناوردا[1] (SIP) در ساختار مکانیک کوانتومی ابر تقارنی، توسط جندنـشتاین[2] معرفـی شد [۹]. این مقاله روسی، برای سالها با بی توجهی مواجه گشت. هنگامی یک پتانـسیل، شـکل نـاوردا، نامیـده مـی شـود کـه پتانسیل همتای ابر تقارنی آن همان وابستگی فضایی پتانسیل اصلی را، همراه با پارامترهایی که ممکن است تغییر یافتـه باشـند، دارا باشد. جندنشتاین نشان داد که هر گاه نسبت شکل ناوردایی بین دو هامیلتونی برقرار باشد، می توان طیف و توابع مـوج را بوسیله مفاهیم کاملاً جبری بدست آورد [۷]. بعد از مدتی فهرستی از پتانسیل‌های شکل ناوردا ارائه و مشخص شـد کـه ویـژه توابع انرژی ، ماتریس پراکندگی[3]،... می‌تواند برای این پتانسیلها به صورت جبری نیز بدست آیند [٦]. آنچه بایـد مـورد توجـه قرار گیرد این است که، پتانسیلهای $SIP$ همانطور که قبلاً اشاره شد ، وابستگی فضایی یکسانی دارند و اخـتلاف آنهـا تنهـا در پارامترهای مربوطه می باشد. بر این اساس افراد مختلفی با روشهای متفاوت به دسته بندی پتانسیلهای $SIP$ پرداختنـد، ضـمن این که طبقه بندی ها بر اساس انتقال پارامترها[4] ( $a_2 = a_1 + \alpha$ ) انجام می شد و برای مدت تقریبا یک دهه تصور بر این بود که تنها پتانسیلهای $SIP$ همان هایی هستند که بر اساس پارامتر انتقال طبقه بندی شده اند و پتانـسیلهای $SIP$ بیـشتری وجـود ندارد. بعدها مشخص شد، که می توان به پتانسیلهای $SIP$ جدیدی دست یافت [۱۰و۱۱]. همچنین ثابت شد که برای بـسیاری از پتانسیلهای $SIP$، پارامترهای $a_1$ و $a_2$ بر اساس مقیاس بندی[5] $a_2 = qa_1$ که $0 \langle q \langle 1$ بـه یکـدیگر نـسبت داده مـی شوند. البته بسیاری از این پتانسیلها بدون تابع موج انعکاسی[6] خواهند بود و تعداد نامحدودی از حالتهای مقید خواهند داشـت [٦].

مسأله عمومی دسته بندی $SIP$ ها هنوز بطور کامل حل نشده است. یک دسته بندی $SIP$ ها که شـامل انتقـال پارامترهـا می باشد توسط کوپر[7] و همکارانش [٦و٧] انجام شده است. در این مورد فقط می‌توان به همه پتانسیلهای اسـتاندارد کـه دارای

1 Shape – invarianc potential
2 Gendeneshtein
3 Scattering
4 Translation Parameters
5 Scaling
6 Reflection less wave function
7 Cooper

حل تحلیلی می باشند و در لیستی که توسط دات[1] و همکارانش [۱۲و۱۳] داده شده است، دسترسی پیدا کرد. البته مدتی بعد، دسترسی دیگری با روشی متفاوت توسط لوایی[2] انجام شد [۱٤]. در ضمن در این دسته بندی ها کوپر و همکارانش نشان دادند که شکل ناوردایی حتی اگر برای حل پذیری شرط کافی باشد، قطعاً شرط لازم نیست [٦].

مدتی بعد جنبه هایی از معادله دیراک نیز در قالب $SUSY\ QM$ مورد مطالعه قرار گرفت. بویژه با استفاده از نتایج $SUSY\ QM$ و $SIP$ ، نشان داده شد که هرگاه یک مسئله شرودینگر با حل تحلیلی در مکانیک کوانتومی یک بعدی وجود داشته باشد، آنگاه همواره یک مسأله دیراک مربوط به آن با برهم کنش اسکالر در (1+1) بعد وجود دارد که حل تحلیلی نیز دارد. بعلاوه، معلوم شد که همیشه $SUSY$ برای معادله دیراک بدون جرم در دو بعد، درست مانند چهار بعد اقلیدسی وجود دارد. مسئله عمومی کولمب[3] نیز به صورت جدی با استفاده از مفاهیم $SUSY$ و شکل ناوردایی حل شده است [۱۵]. $SUSY$ الکترون دیراک در میدان یک تک قطبی مغناطیسی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۱٦و۱۷].

با این مقدمه ی کوتاه مباحثی که در این پایان نامه به آن پرداخته می شود بررسی طبقه بندی پتانسیلهای $SIP$ که با روش مکانیک کوانتومی ابر تقارنی فرمول بندی شده اند، می باشد. البته اساس این طبقه بندی ها انتقال پارامترها است. با تبدیل معادله شرودینگر به معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی و استفاده از جند جمله ایهای متعامد[4] بعنوان توابع خاص[5]، به ایجاد شرایط شکل ناوردایی در آن مورد می پردازیم. برای هر طبقه از پتانسیلها، ویژه مقادیر انرژی، ویژه توابع و چند جمله ایهای متعامد مختص آن را بدست می آوریم. جهت پیوستگی مفاهیم اصلی و درک بهتر خواننده از آوردن محاسبات طولانی در متن صرفنظر کرده ایم. در عین حال برای جامع بودن مطالب بعضی از محاسبات و جداول را در پیوست هایی مطرح ساخته ایم.

ترتیب مطالب به این صورت است که در فصل دوم تعاریف و مفاهیم پایه ای که جهت درک مفاهیم اصلی نیاز است، ارائه شده است. در فصل سوم طبقه بندی پتانسیل‌های $SIP$ به روش لوایی شرح داده شده است. برای نزدیک کردن ذهن خواننده، برای هر دسته از پتانسیلها، مثالی حل شده و محاسبات مربوط به ویژه مقادیر انرژی، توابع موج و سایر پارامترها انجام شده است. ضمن اینکه در بخش دیگر فصل سوم ، به عنوان مثالی خاص، به تحلیل پتانسیلهای غیر مرکزی و شرط شکل ناوردایی آنها ، پرداخته شده است. در بخش سوم این فصل نیزدسته ای از پتانسیل های حل پذیر، با شرایط خاص بررسی شده است.

[1] Dutt
[2] Levai
[3] Coulomb
[4] Orthogonal polynomials
[5] Special function

در فصل چهارم، با توجه به اهمیت معادله شرودینگر در تقریب جرم مؤثر[1] در مورد توصیف رفتار الکترون ها در پیوندهای کریستالی و نیمه رسانا ها و نیز به لحاظ کاربردهایی که در ساختارهای کوانتومی و آلیاژهای طبقه بندی شده دارد ، معادله شرودینگر با جرم وابسته به مکان مورد بحث قرار می گیرد . در این فصل با تطبیق پتانسیلهای *SIP* در جرم ثابت با معادله شرودینگر جرم موثر تغییراتی در شرط پتانسیلهای *SIP* ایجاد شده که با استفاده ار آن می توان ویژه مقادیر انرژی و توابع موج را برای پتانسیلهای *SIP* شناخته شده ، محاسبه کرد . در نهایت در فصل پنجم جمع بندی و نتایج حاصل را ارائه داده و پیشنهادهایی جهت دنبال کردن کار توسط دانشجویان علاقه مند مطرح می شود.

[1] Effective mass

# فصل دوم

# تعاریف و مفاهیم پایه

## ۲-۱) مکانیک کوانتومی ابر تقارنی

یکی از راه های بدست آوردن حل دقیق برای طیف انرژی مسائل پتانسیل یک بعدی، ارتباط بین توابع موج حالت مقید و پتانسیل می باشد. این مساله تنها با دانستن تابع موج حالت پایه یا هر تابع موج دیگر از حالت مقید امکان پذیر می باشد. معمولاً در این حالت انرژی حالت پایه صفر فرض می شود، که در این صورت معادله شرودینگر برای تابع موج حالت پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$H_1\psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} + V_1(x)\psi_0(x) = 0, \tag{۱-۲}$$

بنابراین داریم:

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}, \tag{۲-۲}$$

به این ترتیب با داشتن تابع موج حالت پایه می‌توان تابع $V_1(x)$ را بدست آورد. حال می‌توان به سادگی هامیلتونی را به صورت زیر تجزیه کرد

$$H_1 = A^+ A, \tag{۳-۲}$$

که عملگرهای $A$ و $A^+$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x), \qquad A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x), \tag{۴-۲}$$

با استفاده از روابط (۲-۳) و (۲-٤) خواهیم داشت :

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x), \qquad (۲-۵)$$

این رابطه معادله معروف ریکاتی[1] می باشد و کمیت $W(x)$ به نام ابرپتانسیل[2] در مباحث مکانیک کوانتومی ابـر تقـارنی مـی باشد. با توجه به اینکه برای تابع موج حالت پایه $H_1\psi_0(x) = 0$ برقرار است لذا داریم :

$$H_1\psi_0(x) = A^+ A\,\psi_0(x) = 0, \qquad A\,\psi_0(x) = 0. \qquad (۲-٦)$$

به این ترتیب می توان باجایگذاری رابطه (۲-٤) برای $W(x)$ ؛ رابطه زیر را بدست آورد:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}. \qquad (۲-۷)$$

گام بعدی در ساختار مکانیک کوانتومی ابر تقارنی، این است که برای هامیلتونی اصلی $H_1$، جفـت هـامیلتونی دیگـر $H_2$ را بـا جابه جا کردن عملگرهای $A$ و $A^+$ بدست بیاوریم. البته می توان نشان داد که هامیلتونی $H_2$ با پتانسیل جدید $V_2(x)$ همـراه است.

$$H_2 = AA^+, \qquad (۲-۸)$$

$$H_2 = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \qquad \text{و} \qquad V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x), \qquad (۲-۹)$$

پتانسیل های $V_1(x)$ و $V_2(x)$ جفت پتانسیل های ابر تقارنی[3] نامیده می شوند. برای بدست آوردن ویـژه مقـادیر انـرژی ، ویژه توابع و سایر پارامترها از معادله شرودینگر $H_1$، استفاده می شود:

$$H_1\psi_n^{(1)} = A^+ A\,\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}, \qquad (۲-۱۰)$$

$$H_2(A\,\psi_n^{(1)}) = AA^+ A\,\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}(A\,\psi_n^{(1)}). \qquad (۲-۱۱)$$

به همین ترتیب برای معادله شرودینگر $H_2$، داریم:

$$H_2\psi_n^{(2)} = AA^+\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)}, \qquad (۲-۱۲)$$

$$H_1(A^+\psi_n^{(2)}) = A^+ AA^+\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}(A^+\psi_n^{(2)}), \qquad (۲-۱۳)$$

[1] Riccati equation
[2] Super potential
[3] Super potentials partner

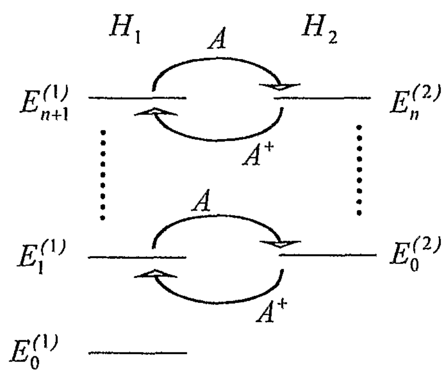
با توجه به معادلات (۲-۱۰) تا (۲-۱۳) و این فرض که $E_0^{(1)} = 0$ است، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع موج هر دو هامیلتونی $H_1$ و $H_2$ بصورت زیر خواهد بود:

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \tag{۲-۱۴}$$

$$\psi_n^{(2)} = \left[E_{n+1}^{(1)}\right]^{-1/2} A \psi_{n+1}^{(1)}, \tag{۲-۱۵}$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = \left[E_n^{(2)}\right]^{-1/2} A^+ \psi_n^{(2)}. \tag{۲-۱۶}$$

البته باید توجه داشت که اگر $\psi_{n+1}^{(1)}\,(\psi_n^{(2)})$ برای $H_1\,(H_2)$ بهنجار شده[1] باشند، توابع موج $\psi_n^{(2)}\,(\psi_{n+1}^{(1)})$ در معادلات (۲-۱٤) و (۲-۱۵) نیز، بهنجار خواهند بود. بنابراین عملگر $A\,(A^+)$ نه تنها تابع موج $H_1\,(H_2)$ را به تابع موج $H_2\,(H_1)$ تبدیل می‌کند، بلکه تراز آن را نیز تغییر می دهد. یعنی با تاثیر عملگر $A^+$ بر روی تابع موج n ام هامیلتونی $H_2$ به تابع موج $H_1$ در تراز n+1 ام می توان رسید. البته باید این نکته را در نظر داشت که چون حالت پایه انرژی $H_1$ صفر فرض شده است، برای این حالت جفت ابر تقارنی وجود ندارد. فرایند فوق در شکل(۲-۱)نشان داده شده است .




شکل(۲-۱): نمایش تاثیر عملگرهای $A$ و $A^+$ برروی ویژه حالتهای انرژی

دلیل نامگذاری فرمول بندی فوق به ابرتقارنی در مکانیک کوانتومی این است که اگر مجموعه ای از عملگرها به صورت $Q_i^+, Q_i$ باشند و در جبر زیر صدق کنند

$$\{Q_i, Q_j\} = \{Q_i^+, Q_j^+\} = 0 \tag{۲-۱۷}$$

$$\{Q_i, Q_j^+\} = H_k \tag{۲-۱۸}$$

و

$$[H_i, Q_j] = [H_i, Q_j^+] = 0 \tag{۲-۱۹}$$

[1] Normalized

آنگاه اصطلاحا ابرتقارن در نظریه میدان برقرار خواهد بود. از اینرو دیده می شود که برای $D=1$، ابرتقارنی در مکانیک کوانتومی حاصل می شود، زیرا از سه عملگر $Q^+,Q$ و$H$ به صورت زیر به دست می آید[٦]، در *فرایند بالا* $H_1$ و $H_2$ به تنهایی تبهگنی[1] ندارند، اما به دلیل خواص جبری $SUSY$، ماتریس هامیلتونی $SUSY$ که دارای تبهگنی است به صورت زیر تعریف می شود:

$$H=\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}, \qquad (۲-۲۰)$$

همچنین با تعریف $Q$ و $Q^+$ به صورت زیر

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q^+=\begin{bmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۲-۲۱)$$

آنگاه عملگرهای بوزنی و فرمیونی با جابجایی و پاد جابجایی مورد نظر ابرتقارن به دست می آید یعنی :

$$[H,Q]=[H,Q^+]=0, \qquad (۲-۲۲)$$

$$\{Q,Q^+\}=H, \qquad \{Q,Q\}=\{Q^+,Q^+\}=0.$$

بنابراین هامیلتونی $H$ را به دلیل اینکه ابربارهای[2] $Q$ و $Q^+$ بتوانند با $H$ جابه جا شوند، به صورت تبهگن در نظر می‌گیریم. قابل توجه اینکه عملگرهای $Q$ و $Q^+$ بصورت عملگرهایی هستند که درجات آزادی بوزونی را به درجات آزادی فرمیونی و برعکس تبدیل می‌کنند .

## ۲-۲) سلسله مراتب هامیلتونی ها[3]

همان گونه که در بخش قبل اشاره شد، با مشخص شدن تابع موج حالت پایه هامیلتونی $H_1$ به سادگی می توان به ابرپتانسیل $W_1(x)$ دست یافت، ضمن آن که با اعمال عملگرهای $A_1$ و $A_1^+$ هامیلتونی $H_1$ تجزیه می شود. همچنین تابع موج حالت پایه جفت هامیلتونی $H_2$ از تأثیر عملگر $A_1$ بر روی تابع موج حالت برانگیخته هامیلتونی $H_1$ بدست می آید.

[1] Degeneracy
[2] Super charges
[3] Hierarchy of Hamiltonians