وزارت علوم و تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکدهٔ علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض

گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

تجدید نرم در برخی از فضاهای باناخ به همراه کاربرد در نظریه نقطه ثابت

استاد راهنما

دکتر عبدالرحمن رازانی

استاد مشاور

دکتر علی آبکار

توسط

عبداله دین محمدی

۱۳۹۰

تشکر و قدردانی

درود و سپاس خدایی را که قدرت تفکر و اندیشیدن را در مغز بندگان ناچیزش آفرید تا راه روشنایی‌ها و تاریکی‌ها را در این دنیای مادی و فناپذیر، همچون قضایای ریاضی استدلال کنند و علم را پلی برای رسیدن به انسانیت قرار دهند و کسانی که این چنین اند پیروزند...

اکنون که با یاری خداوند متعال، کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است، بدین وسیله ازاستاد بزرگوار، فرزانه و فرهیخته، استاد راهنمایم جناب آقای دکتر عبدالرحمن رازانی که تجارب ارزشمندشان را در اختیار اینجانب قرار داده‌اند و مرا در تکمیل این پایان‌نامه یاری رسانده اند صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم. همچنین، از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر علی آبکار که از راهنمایی‌های ایشان بهره برده‌ام، تشکر می‌کنم. از خدای منّان سلامتی و پیشرفت و توفیق روز افزون را برایشان آرزومندم.

چکیده

فضای باناخ X را در نظر می گیریم که دارای توپولوژی خطی τ باشد و یک دسته از نیم نرم های $\{R_k(.)\}$ که در شرایط خاصی صدق می کند نرم معادل $|||.|||$ را روی X تعریف می کنیم چنان که C یک زیر مجموعه بسته‌ی کراندار محدب از $(X, |||.|||)$ باشد، یعنی $\tau-$ دنباله ای نسبتا فشرده باشد آن گاه هر نگاشت غیرانبساطی $T : C \to C$ دارای نقطه ثابت است در نتیجه، ثابت می کنیم اگر G یک گروه جدایی پذیر فشرده باشد، جبر فوریه $-$ اشتیلیس $B(G)$ می‌تواند تجدید نرم شود تا در خاصیت نقطه ثابت صدق کند. در صورتی که $G = T$ تجدید نرم در فضای دنباله ای l_1 بازیابی می شود.

به علاوه یک نرم جدید در l_1 دارای خاصیت نقطه ثابت تخصیص می دهیم، کلاس های جدید از فضاهای باناخ غیر بازتابی دارای خاصیت نقطه ثابت می‌یابیم و یک شرط کافی را چنان اختصاص می دهیم که یک زیر فضای غیر انعکاسی از $L_1(\mu)$ را بتوان تجدید نرم کرد تا دارای خاصیت نقطه ثابت شود.

پیشگفتار

موضوع اصلی مورد مطالعه در این پایان نامه تجدید نرم بعضی از فضاهای باناخ با کاربرد نظریه نقطه ثابت است فرض کنید $(X,||.||)$ یک فضای باناخ باشد و C یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی کراندار محدب از X باشد نگاشت $T : C \to C$ غیر انبساطی نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم $||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$ نقطه $x \in C$ یک نقطه ثابت از T است اگر $Tx = x$ واضح است که اصل انقباض باناخ قابل تعمیم دادن به نگاشت های غیر انبساطی نمی باشد.

اما برخی نتایج مثبت درباره‌ی وجود نقاط ثابت برای این کلاس از نگاشت ها موجود است که در سال ۱۹٦۵ توسط F. E. Browder [۹] و D. Gohde[۲۲] برای فضاهای به طور یکنواخت محدب و توسط W. Kirk [۲٦] برای فضاهای باناخ انعکاسی با ساختار نرمال ارائه شد .

پس از آن افراد بسیاری مسئله‌ی وجود نقاط ثابت برای نگاشت های غیرانبساطی را مطالعه کرده اند .و بسیاری نتایج مثبت یافته اند[۲۱,۲۷] معمولا گفته می شود که فضای باناخ X دارای خاصیت نقطه ثابت[۱] است) اگر هر نگاشت غیرانبساطی تعریف شده از زیر مجموعه‌ی محدب بسته کراندار به توی خودش دارای نقطه ثابت باشد آشنایی داریم که هندسه فضاهای باناخ نقش اساسی در اطمینان دادن به خاصیت نقطه ثابت بازی می کند در حقیقت نتیجه W.Kirk [۲٦] به این معنی است که فضای باناخ انعکاسی با ساختار نرمال دارای خاصیت نقطه‌ثابت می باشد بسیاری از خواص هندسی دیگر معروف به ایجاب خاصیت نقطه‌ثابت برای فضاهای باناخ انعکاسی هستند به علاوه فضاهای باناخ غیر انعکاسی کلاسیک l_1 و c_0 دارای خاصیت نقطه ثابت نیستند.(در حقیقت l_1 در شرط قوی تر منسوب به خاصیت نقطه ثابت به طور ضعیف [۴] صدق نمی کند.)

برای مدت طولانی این یک سوال باز بود که آیا تمام فضاهای باناخ با خاصیت نقطه ثابت

[۱] fixed point property

انعکاسی اند ؟
در سال ۲۰۰۸ ، [۳۲] P.K.Lin اولین فضای باناخ غیر انعکاسی آشنا را یافت که دارای خاصیت نقطه ثابت بود.در حقیقت فضای باناخ داده شده توسط P.K.Lin فضای دنباله‌ی l_1 بود که دارای نرم معادل است نتایج او این سوال را ایجاد کرد :
آیا می توان فضای باناخی را تجدید نرم کرد تا دارای خاصیت نقطه ثابت شود ؟
در حالت کلی ، جواب خیر است . زیرا حالت های :
فضاهای باناخ $l_1(\Gamma)$ و $C_0(\Gamma)$ ، اگر Γ شمارش ناپذیر باشد وفضاهای باناخ l_∞ را نمی توان تجدید نرم کرد تا دارای خاصیت نقطه‌ثابت شود[۱۴] .
یک جواب تقریبا قانع کننده را T.Dominguez داده است که اثبات کرده هر فضای باناخ انعکاسی را می توان تجدید نرم کرد تا دارای خاصیت نقطه ثابت تقریبی شود. این باعث ایجاد سوال زیر می شود .
کدام نوع از فضاهای باناخ غیر انکاسی را می توان تجدید نرم کرد تا دارای خاصیت نقطه ثابت تقریبی شود ؟
در این پایان نامه ، برخی کلاس های فضاهای باناخ غیر انعکاسی را می یابیم که تحت تجدید نرم های معادل ، خاصیت نقطه ثابت را برآورده می سازد .
جبر فوریه — اشتیلتیس از گروه فشرده جدایی پذیر را تجدید نرم می کنیم تا دارای خاصیت نقطه ثابت شود. همچنین کلاس های جدید از فضاهای باناخ غیربازتابی دارای خاصیت نقطه ثابت می یابیم که با هیچ یک از زیر فضاهای l_1 ایزومورفیک نمی باشد در نهایت نتایجمان را در مورد حالت بخصوص از زیر فضاهای $l_1(\mu)$ برای فضاهای $\sigma-$ متناهی بکار می بریم . با این حال ، نشان خواهیم دادبرخی زیرفضاهای غیر انعکاسی از $l_1(\mu)$ می توان هنوز تجدید نرم شود تا دارای خاصیت نقطه ثابت شود.
این پایان نامه به صورت زیرآرایش یافته است در فصل اول این پایان نامه، به بیان پیش نیازهای لازم برای فصل های بعد می پردازیم بیشتر تعریف ها ، قضیه ها و مفهوم های مطرح شده از منبع [۴۰ ,۷ ,۴۵ ,۴۶]استفاده شده اند.

فصل دوم که برگرفته از [۳۲] P.K.Lin می باشد اولین فضاهای باناخ غیر انعکاسی آشنا را یافت که دارای خاصیت نقطه ثابت بود.
در فصل سوم به یک سری معلومات ضروری در مورد نقطه ثابت اختصاص یافته است ، قضیه‌ی اصلی را بیان وثابت خواهیم کردو مثال های جدید فضاهای باناخ غیر انعکاسی توسط خاصیت نقطه ثابت می‌زنیم که با هیچ زیر فضایی از $l_۱$ ایزومورفیک نیستند ودر فصل چهارم هم قضیه‌ی اصلی را به زیر فضاهای بسته‌ی $L_۱(\mu)$ بکار می بریم و هنگامی که $(\Omega, \sum, M)$ فضای $\sigma-$ متناهی باشد . و با معرفی برخی مثال ها از زیر فضاهای غیر انعکاسی از $L_۱(\mu)$ که می توانند برای دارا بودن خاصیت نقطه ثابت تجدید نرم شوند. در فصل پنجم، به بررسی روابط انعکاسی بودن و خاصیت نقطه ثابت برای خود نگاشت های غیرانبساطی روی زیر مجموعه های محدب ، بسته ، کراندار و غیر تهی از یک فضای باناخ می پردازیم.

فهرست مندرجات

۱. مباحثی از آنالیز تابعی

۱—۱ مقدمه ۱

۱—۲ نظریه اندازه ۱

۱—۳ فضاهای نرم دار و فضاهای باناخ ۷

۱—۴ توپولوژی ضعیف و فضاهای انعکاسی ۱۱

۱—۵ ساختار نرمال ۱۹

۲. نرم معادل روی l_1

۲—۱ مقدمه ۲۷

۲—۲ نرم معادل روی l_1 .... ۲۷

۳. تجدید نرم بعضی از فضاهای باناخ

۳—۱ مقدمه ۴۰

۳—۲ دنباله نقطه ثابت تقریبی ۴۰

۳—۳ مثال های اولیه از فضاهای باناخ غیر بازتابی ۴۴

۳—۴ جبر فوریه و فوریه — اشتیلتیس ۴۸

۴. کاربردها در فضای تابع لبگ $L_1(\mu)$

۴—۱ مقدمه ۵۸

۴—۲ زیرفضاهای غیر بازتابی از $L_1(\mu)$ ۵۸

۴—۳ فضای برگمن ۶۸

۵. انعکاسی بودن و خاصیت نقطه ثابت برای نگاشت های غیر انبساطی

۵—۱ مقدمه ۷۱
۵—۲ انعکاسی بودن و خاصیت نقطه ثابت ۷۲
۵—۳ فضاهای ارلیچ ۷۶
واژه نامه فارسی به انگلیسی ۸۴
واژه نامه انگلیسی به فارسی ۸۶
منابع ۸۸
چکیده انگلیسی ۹۳

فصل ۱

مباحثی از آنالیز تابعی

۱—۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به یادآوری مطالبی از آنالیز تابعی و آنالیز حقیقی دوره کارشناسی ارشد می پردازیم که در فصل های بعدی به آنها احتیاج داریم . چون این مطالب در دروس آنالیز تابعی و آنالیز حقیقی دوره کارشناسی ارشد به طور مفصل مورد بحث قرار می گیرد ، ما اصل را به اختصار قرار داده و از آوردن اثبات قضایا و تفصیل بیشتر خودداری می کنیم .

۱—۲ نظریه اندازه

در پایان قرن نوزدهم برای ریاضیدانان کاملا آشکار شده بود که ویژگی های توابع پیوسته و نظریه انتگرال ریمان ، برای حل بسیاری از مسائل آنالیز به قدر کافی غنی نیستند . ناکافی بودن توابع پیوسته ریاضیدانان را به جستجوی رده های مختلفی از توابع که بتوانند پاسخگوی طیف وسیعی از مسائل باشند هدایت کرد .

در حوالی آغاز قرن بیستم ، نظریه اندازه ابداع شد.در آن زمان این امر محقق گردید که برای درک بهتر ساختار توابع ، لازم است مطالعه‌ی دقیقی درباره‌ی زیر مجموعه های فضاهای اقلیدسی انجام

گیرد . همچنین ، روشن است که برای مطالعه این مجموعه ها باید مفاهیم کلاسیک طول،مساحت و حجم را تعمیم داد. جستجو برای یافتن راه های مناسب نسبت دادن مفهوم « اندازه » به مجموعه های نقاط، ریشه در این دوران دارد.

امیل بورل [۵] نخستین کسی بود که در سال ۱۸۹۸ نظریه‌ی اندازه‌را برای زیرمجموعه های معینی از اعداد حقیقی، که امروزه آنها را مجموعه های بورل می نامیم، ارائه داد. مدت زمان کوتاهی پس از او در سال ۱۹۰۲ ، هانری لبگ [۳۱] اثر پیشتاز خود را درباره اندازه لبگ ارائه کرد. کمی بعد در سال ۱۹۱۸ کنستانتین کاراتئو دوری مفهوم اندازه برونی را معرفی کرد و ویژگی های آن را مورد مطالعه قرار داد. از آن زمان به بعد نظریه اندازه شاهد تحولی سریع بوده است. و بین کسانی که در این تحول نقش داشته‌اند چهره‌ی برجسته ترین ریاضیدانان نیمه‌ی اول قرن بیستم را مشاهده می کنیم .

تعریف ۱.۱ فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی باشد. گردایه‌ای از زیرمجموعه های X مانند S را نیم $-$ حلقه می نامیم هرگاه در ویژگی های زیر صدق کند:

۱) مجموعه تهی به S تعلق دارد یعنی $\phi \in S$

۲) اگر $A, B \in S$ ، آن گاه $A \bigcap B \in S$

۳) به ازای هر دو مجموعه متعلق به S ،می توان تفاضل آن ها را به صورت اجتماعی متناظر از اعضای دو به دو جدا از هم S نوشت.یعنی به ازای هر $A, B \in S$ ،مجموعه هایی متعلق به S مانند $C_۱, \cdots, C_n$ (که به A و B بستگی دارند) وجود دارند به طوری که

$$A \setminus B = \bigcup_{i=۱}^{b} C_i \ .$$

و $C_i \cap C_j = \phi$ هرگاه $i \neq j$

تعریف ۲.۱ فرض کنیم S نیم$-$ حلقه‌ای از زیرمجموعه های مجموعه X باشد.تابع با متغیر مجموعه ای $\mu : S \to [\circ, \infty]$ را یک اندازه روی S می نامیم هرگاه در ویژگی های زیر صدق کند:

۱) $\mu(\phi) = 0$

۲) اگر $\{A_n\}$ دنباله ای از مجموعه های دو به دو جدا از هم S باشد به‌طوری که

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S \ ,$$

آن گاه

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

یعنی μ تابعی $\delta-$ جمعی است.

سه تایی مرتب (X, S, μ) را که در آن X مجموعه ای ناتهی، S نیم $-$ حلقه ای از زیرمجموعه های $\mu-$ اندازه‌ای روی S است، یک فضای اندازه‌دار می‌نامیم.

تعریف ۳.۱ گوییم فضای اندازه (X, S, μ)

۱) متناهی است هر گاه $\mu^*(X) < \infty$

۲) $\sigma-$ متناهی است هرگاه دنباله ای مانند $\{X_n\}$ از زیر مجموعه‌های X وجود داشته باشد به طوری که

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ .$$

و به ازای هر n ، $\mu^*(X_n) < \infty$.

روشن است که هر فضای اندازه دار متناهی فضایی $\sigma-$ متناهی است.

لم ۴.۱ فضای اندازه (X, S, μ) فضایی $\sigma-$ متناهی است اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند $\{Y_n\}$ از مجموعه‌های دو به دو جدا از هم S وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \ .$$

و به ازای هر n ، $\mu(Y_n) < \infty$.

برهان : به منبع [۴٦] مراجعه‌شود.

تعریف ۵.۱ تابع $f : X \to R$ مفروض است.اگر به ازای هر زیرمجموعه باز $O \subseteq R$ ، $f^{-1}(O)$ مجموعه ای اندازه پذیر باشد f را تابعی اندازه پذیر می نامیم.

قضیه ٦.۱ برای تابع $f : X \to R$ گزاره های زیر هم ارزند:

۱) f اندازه پذیر است.

۲) به ازای هر بازه‌ی باز کراندار (a, b) در R ، $f^{-1}((a, b))$ اندازه پذیر است.

۳) به ازای هر زیر مجموعه ی بسته ی $C \subseteq R$ ، $f^{-1}(C)$ اندازه پذیر است.

۴) به ازای هر $a \in R$ ، $f^{-1}([\,a, \infty))$ اندازه پذیر است.

۵) به ازای هر $a \in R$ ، $f^{-1}((-\infty, a\,])$ اندازه پذیر است.

٦) به ازای هرزیر مجموعه‌ی بورل $B \subseteq R$ ، $f^{-1}(B)$ اندازه پذیر است.

برهان : به منبع [۴٦] مراجعه‌شود.

قضیه ۷.۱ ایگوروف

فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع اندازه پذیر و $E \subseteq X$ زیر مجموعه ای اندازه‌پذیر باشد به طوری که $f_n \to f \quad a.e$ و $\mu^*(E) < \infty$. در این صورت به ازای هر $\epsilon > 0$ زیر مجموعه اندازه‌پذیری مانند $F \subseteq E$ وجود دارد به‌طوری که $\mu^*(F) < \epsilon$ و اینکه دنباله‌ی $\{f_n\}$ روی $E \setminus F$ به طوریکنواخت به f همگراست.

برهان : بدون آن‌که به کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کردکه به ازای‌هر x، $f_n(x) \to f(x)$ و $A = \{\ x|\ f_n(x) \to f(x)\ \}$ ، $\mu^*(A^c) = 0$ اکنون به ازای‌هر دو عددصحیح‌مثبت n

و k قرار می دهیم

$$E_{n,k} = \{x \in E : \forall\ m \geq k \quad , \quad |\ f_m(x) - f(x)\ | < ۲^{-n}\}\ ,$$

روشن است که هر $E_{n,k}$ یک زیر مجموعه اندازه پذیر X است علاوه بر این به ازای هر n و k داریم

$$E_{n,k} \subseteq E_{n,k+۱}\ .$$

چون به ازای هر $x \in X$ رابطه $\lim f_n(x) = f(x)$ برقرار است به آسانی نتیجه می‌گیریم که به ازای هر n،

$$E_{n,k} \underset{k}{\uparrow} E,$$

پس با توجه به قضیه به ازای هر n داریم

$$\mu^*(E_{n,k}) \underset{k}{\uparrow} \mu^*(E)\ .$$

حال فرض کنیم $\epsilon > ۰$ چون $\mu^*(E) < \infty$ ، به ازای‌هر n عددطبیعی مانند k_n وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mu^*(E \setminus E_{n,k_n}) = \mu^*(E) - \mu^*(E_{n,k_n}) < ۲^{-n}\epsilon\ .$$

قرار می‌دهیم

$$F = \bigcup_{n=۱}^{\infty} (E \setminus E_{n,k_n})\ .$$

در این صورت F اندازه پذیر است، $F \subseteq E$ و

$$\mu^*(F)\ \leq\ \sum_{n=۱}^{\infty} \mu^*(E \setminus E_{n,k_n}) < \epsilon\ .$$

همچنین اگر

$$x \in E \setminus F = \bigcap_{n=۱}^{\infty} E_{n,k_n}\ .$$

به ازای هر $m \geq k_n$ داریم $|\ f_m(x) - f(x)\ | < ۲^{-n}$ این نشان می‌دهدکه $\{f_n\}$ روی $E \setminus F$ به‌طوریکنواخت به f همگراست و اثبات قضیه تمام می‌شود. $\square$

تعریف ۸.۱ گوییم دنباله‌توابع اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ دراندازه به تابع f همگراست و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{\mu} f$، هرگاه به ازای‌هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0 \quad .$$

قضیه ۹.۱ اگر دنباله‌توابع اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ به ازای تابعی مانند f در رابطه $f_n \xrightarrow{\mu} f$ صدق کند ، آن گاه زیر دنباله ای مانند $\{f_{k_n}\}$ از $\{f_n\}$ هست به طوری که $f_{k_n} \to f \quad a.e$ همگرایی نقطه به نقطه مستلزم همگرایی در اندازه نیست.
برهان : به منبع [۴۰] مراجعه‌شود.

مثال ۱۰.۱ فرض کنیم $X = R$ مجهز به اندازه لبگ λ باشد و به ازای هر n تعریف می کنیم $f_n = \chi_{[n,n+1]}$، روشن است که به ازای هر $x \in R$ ، $\lim f_n(x) = 0$ از طرف دیگر، چون به‌ازای‌هر n داریم

$$\lambda\ (\ \{x \in X : |\ f_n(x)\ | \geq 1\}\ ) = \ \lambda\ (\ [\ n, n+1\ ]\ ) = 1\ .$$

دنباله $\{f_n\}$ در اندازه به‌صفر همگرا نیست.[۴۶]
البته اگر با فضای اندازه دار متناهی سروکار داشته باشیم، آن گاه همگرایی نقطه‌به‌نقطه مستلزم همگرایی در اندازه است.

قضیه ۱۱.۱ فرض کنیم $\mu^*(X) < \infty$ اگر دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ در رابطه $f_n \to f \quad a.e$ صدق کند، آن گاه $f_n \xrightarrow{\lambda} f \quad a.e$.
برهان : به منبع [۴۶] مراجعه‌شود.

شایان ذکر است که دنباله‌هایی از توابع اندازه پذیر وجود دارند که در اندازه همگرا هستند، ولی در هیچ نقطه ای همگرا نیستند در زیر مثالی از این دست ارائه می‌دهیم.

مثال ۱۲.۱ بازه $[0,1]$ رامجهزبه اندازه‌لبگ λ در نظر می گیریم. به ازای‌هر n، بازه $[0,1]$ را به n زیربازه $[0,\frac{1}{n}],[\frac{1}{n},\frac{2}{n}],\cdots,[\frac{n-1}{n},1]$ تقسیم می کنیم. همه این بازه‌ها را به‌صورت زیر شماره‌گذاری می کنیم:

$$[0,\tfrac{1}{2}],[\tfrac{1}{2},1],[0,\tfrac{1}{3}],[\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}],[\tfrac{2}{3},1],[0,\tfrac{1}{4}],[\tfrac{1}{4},\tfrac{2}{4}].[\tfrac{2}{4},\tfrac{3}{4}],[\tfrac{3}{4},1],[0,\tfrac{1}{5}],\cdots$$

فرض کنیم $\{f_n\}$تابع‌مشخصه n امین بازه دنباله‌بالا باشد. به آسانی می‌بینیم‌که $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$، ولی به ازای هیچ عنصر $x \in [0,1]$ دنباله $\{f_n(x)\}$ به صفرهمگرا نیست.

۱—۳ فضاهای نرم دار و فضاهای باناخ

نظریه جبری فضاهای برداری از مدتی پیش جزء لاینفک ریاضیات امروزی شده است. در آنالیز، فضاهای برداری را ضمن در نظر گرفتن ساختار جبری موجود بر آنها از نقطه نظر توپولوژیکی مورد مطالعه قرار می دهند. پرثمرترین مطالعه وقتی پیش می آید که به هر بردار، عددی حقیقی که نرم آن بردار نام دارد نسبت دهیم. می توان نرم را تعمیم مفهوم طول تصور کرد. فضای نرم‌داری را که (نسبت به متریک القا شده به وسیله نرم) کامل باشد فضای باناخ می نامیم.

تعریف ۱۳.۱ تابع حقیقی $||.||$ را که روی فضای برداری X تعریف شده است یک نرم می‌نامیم هرگاه در سه ویژگی زیر صدق کند:

۱) به ازای هر $x \in X$ ، $||x|| \geq 0$ و $||x|| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in R$ ، $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$.

۳)به ازای هر $x, y \in X$ ، $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

ویژگی (۳) نابرابری مثلثی نام دارد و هم ارز بااین گزاره‌است که‌به ازای‌هر $x, y, z, \in X$،

$$|| \ x - y \ || \leq || \ x - z \ || + || \ z - y \ || \ .$$

فضای برداری X مجهز به‌نرم $||.||$ را یک فضای برداری نرم دار یا، به اختصار، یک فضای نرم دار می نامیم.

تعریف ۱۴.۱ زیرمجموعه A از فضای نرم‌دار X نسبت به نرم‌کراندار است هرگاه عددی مانند $M > ۰$ وجودداشته باشد به‌طوری که به ازای‌هر $x \in A$ ، $||x|| \leq M$.

تعریف ۱۵.۱ هرفضای نرم‌دار X را که نسبت به متریک القایی به‌وسیله‌ی نرم، فضایی کامل باشد یک فضای باناخ می نامیم.به عبارت دیگر X یک فضای باناخ است هر گاه به ازای هر دنباله‌کوشی مانند $\{x_n\}$ در X، عنصری مانند $x \in X$ وجودداشته باشد به‌طوری‌که $\lim ||x_n - x|| = ۰$. لذا فضاهای باناخ مثال‌های خاصی از فضاهای متریک کامل هستند.

مثال ۱۶.۱ فضای بردار R^n مجهز به نرم

$$||x|| = (\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲)^{\frac{۱}{۲}} \ .$$

که در آن $x = (x_۱, \cdots, x_n) \in R^n$ یک فضای باناخ است.این نرم را نرم اقلیدسی می‌نامیم و متریک حاصل از آن همان متریک اقلیدسی است.

مثال ۱۷.۱ فرض کنیم X مجموعه ناتهی و $B(X)$ فضای بردار همه توابع حقیقی کراندار معین بر X باشد. در این صورت رابطه‌ی $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$، که در آن $f \in B(X)$، یک نرم روی $B(X)$ تعریف می‌کند که آن را نرم sup می‌نامیم. فضای برداری $B(X)$ مجهز به نرم sup یک فضای باناخ است.

مثال ۱۸.۱ فرض کنیم l_1 گردایه‌ی همه دنباله‌های حقیقی $x = (x_1, x_2, \cdots)$ باشد به‌طوری‌که

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \ .$$

به آسانی می‌بینیم‌که l_1 همراه با اعمال جبری $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots)$ و $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$ فضای برداری است. علاوه بر این به‌ازای‌هر $x \in l_1$ تعریف می‌کنیم

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \ .$$

دراین‌صورت $\|.\|_1$ یک نرم روی l_1 است علاوه برآن یک فضای باناخ نیز است.

قضیه ۱۹.۱ در فضاهای برداری متناهی البعد، همه نرم‌ها هم ارزند.

برهان : به منبع [۴۵] مراجعه‌شود.

قضیه بعدی می گوید تنها فضاهای نرم‌دار موضعافشرده‌عبارت است از اندازه فضاهای نرم‌دار متناهی البعد.

قضیه ۲۰.۱ فضای نرم دار X موضعافشرده است اگر و فقط اگر متناهی البعد باشد.

برهان : به منبع [۴۵] مراجعه‌شود.

تعریف ۲۱.۱ $P : X \to R$ را که در آن X فضایی برداری است ، یک نگاشت زیر خطی می‌نامیم هرگاه در دو ویژگی زیر صدق کند:

۱) به ازای هر $x, y \in X$ ، $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \geq 0$ ، $p(\alpha x) = \alpha p(x)$

تعریف ۲۲.۱ فرض کنیم $0 < p < \infty$ گردایه همه‌توابع اندازه‌پذیرمانند f را به‌طوری‌که $|f|^p$ انتگرال پذیر باشد با $L_p(\mu)$ نشان می‌دهیم.

لم ۲۳.۱ اگر دنباله $\{f_n\} \subseteq L_p(\mu)$ ، $1 < p < \infty$ ، در رابطه $\lim ||f - f_n||_p = 0$ صدق کند آن گاه زیردنباله ای مانند $\{f_{k_n}\}$ از $\{f_n\}$ و عنصری مانند $g \in L_p(\mu)$ هست که به‌طوری‌که $f_{k_n} \to f \ a.e$ و به ازای‌هر n ، $|f_{k_n}| \leq g \ a.e$.

برهان : به منبع [۴۶] مراجعه‌شود.

نتیجه سودمند بعد شرطی ارائه می‌کند که به‌موجب آن همگرایی نقطه‌به‌نقطه مستلزم همگرایی نسبت به نرم در فضاهای L_p است.

قضیه ۲۴.۱ فرض کنیم $1 \leq p < \infty$، $f \in L_p(\mu)$ و $\{f_n\}$ دنباله ای در $L_p(\mu)$ باشد به‌طوری‌که $f_n \to f \ a.e$. اگر $\lim ||f_n||_p = ||f||_p$ ، آن‌گاه $\lim ||f_n - f||_p = 0$.

برهان : به منبع [۴۶] مراجعه‌شود.

قضیه ۲۵.۱ مجموعه توابع پیوسته با محمل‌فشرده در هر $L_p(\mu)$، $1 \leq p < \infty$،نسبت به نرم چگال است .

برهان : به منبع [۴۶] مراجعه‌شود.

قضیه ۲۶.۱ فرض کنیم μ یک اندازه منظم بورل فضای توپولوژیکی موضعا فشرده هاسدورف X باشددر این صورت گردایه همه توابع پیوسته با محمل فشرده در هر $L_p(\mu)$، $1 \leq p < \infty$،نسبت به نرم چگال است.

برهان : به منبع [۷] مراجعه‌شود.

۱ــ۴ توپولوژی ضعیف[۱] و فضاهای انعکاسی[۲]

می‌دانیم‌که گوی واحد بسته فضای باناخ X فشرده است اگر و تنها اگر بعد متناهی باشد.
پس گوی واحد بسته در فضاهای باناخ با بعد نامتناهی فشرده نیست و این مطلب کار کردن در فضاهای باناخ بابعد متناهی را با محدودیت های جدی مواجه می‌کند.
توپولوژی های ضعیف را می‌توان کوششی در جهت رفع این محدودیت ها دانست. چنان که خواهیم دید گوی واحد بسته هر فضای باناخ با توپولوژی« ضعیف ستاره » فشرده است . فرض‌کنیم X یک فضای باناخ باشد. برای‌هر $f \in X^*$ نگاشت ϕ_f را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \phi_f : X \longrightarrow R \ , \\ \\ \phi_{f(x)} = f(x) \ . \end{cases}$$

تعریف ۲۷.۱ توپولوژی ضعیف روی X کوچکترین توپولوژی روی X است که تمام نگاشت های $(\phi_f)_{f \in X^*}$ را پیوسته می‌سازد آن را با علامت $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت‌دیگر $\sigma(X, X^*)$ کوچکترین توپولوژی روی X است که تمام عناصر X^* را پیوسته می کند .

[۱] Weak topology
[۲] Reflexive spaces