دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضیات وکاربردها

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

بررسی قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های $F-$ انقباض ضعیف و $F-$ انبساط قوی

استاد راهنما

دکتر کاظم حق‌نژاد آذر

دکتر داریوش لطیفی

استاد مشاور

دکتر قاسم نریمانی

پژوهشگر

مهناز رضایی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به روح پاک پدرم

و

دستان پر مهر مادرم

سپاس‌گزاری...

خدای بزرگ و مهربان را شاکر و سپاسگذارم که همیشه با اینکه از او دور بودم ولی از من دور نشد و مرا تنها نگذاشت.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات مادر مهربانم قدردانی کنم. و از برادرانم به خاطر اینکه مشوقم بودن و یاریم کردن و از خواهرهایم به خاطر دلگرمی هاشون بی نهایت سپاسگذارم.

از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر کاظم حق نژاد آذر و جناب آقای دکتر داریوش لطیفی، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده آن‌ها، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر قاسم نریمانی که مشاوره این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

مهناز رضایی

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: رضایی نام: مهناز

عنوان پایان‌نامه:
بررسی قضایای نقطه ثابت برای نگاشت های $F-$ انقباض ضعیف و $F-$ انبساط قوی

اساتید راهنما: دکتر کاظم حق نژاد آذر و دکتر داریوش لطیفی
استاد مشاور: دکتر قاسم نریمانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: محقق اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۱ تعداد صفحه:۵۶

کلیدواژه‌ها: نقطه ثابت ، انبساط قوی ، انقباض ضعیف ،نگاشت غیر انبساطی

چکیده
دراین پایان‌نامه به بررسی مساله نقطه ثابت برای نگاشت‌های $F-$ انقباض ضعیف و $F-$ انبساط قوی می‌پردازیم و نتایج نقطه ثابت را برای حل معادلات انتگرالی فردهلم بکار می‌گیریم.می دهیم. در نهایت، مساله نقطه ثابت را برای گروه دیگری از نگاشت‌ها به نام نگاشت‌های غیر انبساطی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

پیشگفتار

مبحث نقطه ثابت در ریاضیات از سابقه‌ی بسیار طولانی برخوردار است و شاید بتوان گفت که به یونان و مصر باستان، یعنی بیش از دو هزار سال پیش برمی‌گردد، وقتی ریاضی‌دانان یونانی و مصری مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۳}$ را به کمك کسر $\frac{۱}{۲}(x+\frac{۲}{x})$ تخمین می‌زدند، در واقع نقاط ثابت نگاشت $f(x)=\frac{x+\frac{۲}{x}}{۲}$ را روی بازه‌ی $[\sqrt{۲},\infty)$ با استفاده از فرایند تکراری $x_{n+۱}=x_n+\frac{۲}{x_n}$ تقریب می‌زدند. گر چه این مطلب به این صورتی که گفته شد، تعبیر امروزی ما از آن کارهاست و ممکن است که در آن موقع به این صورت نبوده باشد، ولی با این حال شواهد زیادی در دست است که آنها اهمیت و کارآیی روش‌های تکراری را در یافته بودند و در محاسبات مختلف به کار می‌بردند. به اعتقاد بسیاری از ریاضی دانان قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت که در سال ۱۹۲۰ توسط باناخ [۱] ارائه شد، نقطه‌ی عطفی در مبحث نقاط ثابت و شکلی از آن است که امروزه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. قضیه نقطه ثابت باناخ برای اثبات قضیه پیکارد- لیندلف [۲] در مورد وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل استفاده شده است. به طور کلی در نظریه نقطه ثابت سه مساله‌ی زیر مطرح است:

۱) وجود و یگانگی نقطه ثابت

۲)ساختار مجموعه نقطه ثابت

۳)روش‌های تقریب نقاط ثابت و همگرایی آنها

از طرف دیگر یکی از مباحث مورد علاقه در زمینه‌ی نقطه ثابت، قضیه نقطه ثابت باناخ در مجموعه‌های مرتب جزئی و کاربردهای آن می‌باشد که مربوط به مساله‌ی وجود و یگانگی نقطه ثابت می باشد.

در سال ۲۰۰۴ ران و ریورینگر [۳] با مطالعه کارهای افراد زیادی از جمله کار بیوفر [۴] مربوط به سال ۱۹۸۱ و کار بیلر ورشا [۵] مربوط به سال ۱۹۸۱، تارسکی [۶] مربوط به سال ۱۹۵۵ در مورد قضایای نقطه ثابت، شبکه یك قضیه نقطه ثابت در مجموعه‌های مرتب جزئی و برخی از کاربردهای آن در مطالعات ماتریسی را ارائه کردند. در سال

[۱] Banach
[۲] Picard-Lindlef
[۳] Reurings Ran،
[۴] Biofer
[۵] Roth Blair،
[۶] Tarski

۲۰۰۵ نیوتو و ردریگز[۷] [۲۲] قضایایی در مورد نگاشت‌های انقباضی در مجموعه‌های مرتب جزئی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل معمولی بیان و اثبات کرده‌اند. به علاوه در سال ۲۰۰۷ نیوتو و ردریگز-لوپز مقاله‌ای در مورد وجود و یکتایی نقطه ثابت در مجموعه‌های مرتب جزئی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه کردند [۲۱]. در سال ۲۰۰۸ اوریگان و پتروسل [۸] با مطالعه گسترده، کاربرد قضایای نقطه ثابت را در وجود جواب معادلات انتگرال بررسی کردند [۲۳].

این رساله بر اساس مرجع [۱۰] و [۱۵] تدوین شده است.

Lopez Rodriguez- Nioto،[۷]
Petrusel ، Oregan[۸]

فهرست مطالب

فصل ۱
مفاهیم اولیه

در این فصل تعدادی از مفاهیم اولیه و علامت‌هایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است توضیح می‌دهیم.

تعریف ۱.۰.۱. يك **رابطه** مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است. یعنی اگر A, B دو مجموعه باشند و $R \subseteq A\times B$ آنگاه R يك رابطه از A به B نامیده می‌شود. در حالت خاص اگر $A = B$ آنگاه R را يك رابطه روی A می‌نامیم. اگر R یک رابطه باشد و $(x, y) \in R$ آنگاه می‌نویسیم xRy.

تعریف ۲.۰.۱.

۱. گوییم رابطه R روی مجموعه X دارای خاصیت **انعکاسی** است ، هر گاه هر عضو X باخود ، رابطه R داشته باشد ، یعنی

$$\forall\, x \in X \qquad xRx\ .$$

۲. گوییم رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X دارای خاصیت **تقارنی** است ، هر گاه داشته باشیم

$$\forall\, x, y \in X, \qquad xRy \quad , \quad yRx \qquad \Longrightarrow \qquad x = y\ .$$

۳. گوییم را بطه‌ی R روی مجموعه‌ی X دارای خاصیت **انتقالی** (تعدی) است هرگاه

$$\forall\, x, y, z \in X, \qquad xRy \quad , \quad yRz \qquad \Longrightarrow \qquad xRz\ .$$

تعریف ۳.۰.۱. رابطه‌ی R روی مجموعه X يك رابطه‌ی **ترتیب جزئی** نامیده می‌شود هرگاه R دارای خاصیت‌های انعکاسی، تقارنی، تعدی باشد.

رابطه‌ی R روی مجموعه ی X را **کلاً مرتب** گوئیم هرگاه مرتب جزئی باشد و هر دو عضوش تحت رابطه‌ی R قابل مقایسه باشند یعنی

$$\forall x, y \in X, \qquad yRx \quad \text{یا} \quad xRy.$$

تعریف ۴.۰.۱. فرض کنیم $(X, \leq)$ يك مجموعه مرتب جزئی و $f : X \longrightarrow X$ يك عملگر باشد گوییم f **صعودی** است هرگاه

$$\forall\, x, y \in X, \qquad x \leq y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq f(y),$$

و گوییم f **نزولی** است هر گاه

$$\forall\, x, y \in X, \qquad x \leq y \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) \leq f(x).$$

تعریف ۱.۰.۵. فرض کنیم مجموعه‌ی غیر خالی باشد. هرگاه تابعی مانند $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان تعریف شده باشد که برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

۱. $\circ \leq d(x, y) < \infty$

۲. $d(x, y) = \circ \iff x = y$

۳. $d(x, y) = d(y, x)$

۴. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

در این صورت d را یك متر برX گفته و (X, d) رایك فضای متریك می گوییم.

تعریف ۱.۰.۶. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریك (X, d) را یك **دنباله کشی** گوییم هر گاه در شرط زیر صدق کند به ازای هر $\varepsilon \geq \circ$ عدد طبیعی N وجود داشته باشد به طوری‌که اگر $m, n \geq N$ آنگاه $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

تعریف ۱.۰.۷. فرض کنیم (X, d) یك فضای متریك باشد ، گوییم (X, d) یك فضای متریك **تام** است هرگاه هر دنباله کوشی در آن به عضوی از X همگرا باشد.

تعریف ۱.۰.۸. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک دلخواه باشد و K زیر مجموعه‌ای از X باشد در این صورت

۱. نقطه $p \in X$ یك **نقطه حدی** از K است هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه‌ای چون $q \in K$ غیر از p باشد.

۲. K **بسته** است هر گاه هر نقطه حدی K یك نقطه از K باشد.

۳. نقطه$p \in K$ یك **نقطه درونی** K نامیده می‌شود هرگاه یك $r > \circ$ وجود داشته باشد بطوریکه $N(p, r) \subset K$، که در آن $N(p, r)$ یک همسایگی از P است.

۴. K **باز** است هر گاه هر نقطه ی K، یك نقطه درونی آن باشد.

تعریف ۹.۰.۱. مجموعه تمام نقاط مرزی K را با ∂K نشان می‌دهیم. و تعریف می‌کنیم

$$\partial K = \overline{K} \cap \overline{X - K}$$

هر عضو ∂K را یک نقطه‌ی مرزی می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۰.۱. زیر مجموعه K از فضای متری X را **فشرده** نامند ، هر گاه هر پوشش باز K حاوی زیر پوششی متناهی باشد، یعنی هر گاه گردایه‌ی $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یك پوشش باز برای K باشد، آنگاه اندیسهایی مانند $\alpha_1 , \alpha_2 , ..., \alpha_n$ از I وجود داشته باشند بطوریکه

$$K \subseteq \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \ .$$

تعریف ۱۱.۰.۱. زیر مجموعه K از فضای متری X **محدب** است هر گاه به ازای هر x, y داشته باشیم $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$ که در آن $0 < \lambda < 1$.

تعریف ۱۲.۰.۱. اگر X یك فضای برداری بوده و $E \subseteq X$، **غلاف محدب** E راکه با $conv(E)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از $conv(E) = \bigcap F$، است که در آن $E \subset F$ و F مجموعه‌ای محدب است. یابه طور معادل

$$conE = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, x_i \in E\}.$$

تعریف ۱۳.۰.۱. فرض کنیم (X,d) و (Y,p) دو فضای متریك باشند. گوییم تابع $f : X \longrightarrow Y$ در شرط **لیپشیتز** [1] صدق می‌کند هرگاه

$$\exists\, k > 0 \quad , \quad \forall\, x, y \in X \quad , \quad p(f(x), f(y)) \ \leq \ k\, d(x,y). \tag{1.1}$$

که k را ثابت لیپشیز می‌گوییم اگر X فضای متری و $f : X \longrightarrow X$ یک تابع باشد بطوریکه(۱.۱) برای $k < 1$ برقرار باشد آنگاه f را یك تابع **انقباض** بر X می‌نامیم.

در ضمن فرض کنید (X,d) یك فضای متریك و $f : X \longrightarrow X$ یك تابع باشد ، گوییم نقطه ی $x \in X$ نقطه ی **ثابت** f است هرگاه $f(x) = x$.

[1] Lipschitz

تبصره ۱۴.۰.۱. *واضح است هر تابعی که در شرط لیپشیتز صدق کند پیوسته ی یکنواخت و در نتیجه پیوسته خواهد بود. بنابراین اگر (X, d) یك فضای متریك و $f : X \longrightarrow X$ یك تابع انقباض روی X باشد آنگاه f پیوسته خواهد بود.*

قضیه ۱۵.۰.۱. *نقطه ثابت (**اصل انقباض**) . فرض کنید (X, d) یك فضای متریك تام و f یك انقباض از X به توی X باشد در اینصورت f یك وفقط یك نقطه ی ثابت دارد به صورت بهتر معادله ی $x = f(x)$ جواب یکتا دارد. یکتایی این نقطه بدیهی است زیرا هرگاه ، $f(x) = x$ و $f(y) = y$ ، آنگاه از شرط انقباضی نتیجه می گیریم که $d(x, y) \leq c\, d(x, y)$ که فقط وقتی می تواند روی دهد که $d(x, y) = ۰$ باشد و در نتیجه $x = y$ است.*

برهان. رجوع شود [۲۳] $\square$

تعریف ۱۶.۰.۱. اگر X یك فضای برداری روی میدان F باشد $(F = \mathbb{R}, F = \mathbb{C})$ گوییم فضای برداری X یك فضای **نرمدار** است اگر به ازای هر $x \in X$، عددی حقیقی و نامنفی مانند $\| x \|$ چنان نظیر شود که به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in F$ داشته باشیم: داشته باشیم

۱. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

۲. $\| \alpha x \| = | \alpha | \; \| x \|$

۳. $x \neq ۰$ آنگاه $۰ < \| x \|$.

تبصره ۱۷.۰.۱. *هر فضای نرمدار یك فضای متریك است. زیرا اگر تعریف کنیم*

$d(x, y) = \| x - y \|$، در این صورت d در شرایط متر صدق می کند.

تعریف ۱۸.۰.۱. فضای نرمدار X را یك فضای **باناخ** گوییم هرگاه با متر حاصل از نرمش تام باشد.

تعریف ۱۹.۰.۱. فرض کنیم X, Y دو فضای نرمدار باشد. نرم عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را با $\|T\|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = sup \{ \; \|Tx\| \; : \; x \in X \; , \; \|x\| \leq ۱ \; \}.$$

تعریف ۲۰.۰.۱. فرض کنید X مجموعه ای ناتهی باشد، گردایه تمامی دنباله ها در X را با $S(X)$ نشان می دهیم

$$S(X) = \{ (x_n)_{n\in N} \mid (x_n) \in X\}.$$

تعریف ۲۱.۰.۱. فرض کنید H یك فضای برداری روی میدان اعدادمختلط باشد ، یك ضرب داخلی روی H تابعی است مانند

$$\varphi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x,y) = \langle x,y\rangle$$

که دارای خواص زیر است.

۱. به ازای هر $x \in H$، $\langle x,x\rangle \geqslant ۰$ و $x = ۰ \Longleftrightarrow \langle x,x\rangle = ۰$, $\langle x,x\rangle \geq ۰$

۲. به ازای هر $x,y \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle.$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

۳. به ازای هر $x,y \in H$، $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}.$

۴. به ازای هر $x,y,z \in H$، $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.$

تعریف ۲۲.۰.۱. هر گاه H یك فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $\langle .,.\rangle$ باشد آنگاه رابطه‌ی $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ یک نرم بر H تعریف می‌کند. اگر H با این نرم کامل باشد (هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد) آنگاه H را **فضای هیلبرت** می‌نامند.

تعریف ۲۳.۰.۱. دو بردار x و y را در یك فضای ضرب داخلی V بر هم عمودند اگر ضرب داخلی $\langle x,y\rangle$ برابر صفر باشد. این تعامد را با $x\perp y$ نشان می دهند. دو بردار را **متعامد** گویند هرگاه بر هم عمود باشند.

تعریف ۲۴.۰.۱. اگر H فضای هیلبرت باشد ، $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq H$ را یک مجموعه **متعامد یکه** در H می نامیم هرگاه برای هر $\alpha,\beta \in A$ داشته باشیم

$$(u_\alpha, u_\beta) = \begin{cases} ۱ & if \quad \alpha = \beta \\ ۰ & if \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

و

$$\|u_\alpha\|^۲ = \langle\, u_\alpha, u_\alpha \,\rangle = ۱ \qquad \Longrightarrow \qquad \|u_\alpha\| = ۱$$

در مجموعه متعامد یکه بردارها دو به دو بر هم عمودند ونرم بردارها برابر ۱ است.

اگر $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک مجموعه متعامد یکه باشد برای هر $x \in H$ ، $\hat{x}(\alpha)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{x} : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\hat{x}(\alpha) = \langle\ x, u_\alpha\ \rangle.$$

$\hat{x}(\alpha)$ را **ضرایب فوریه** x نسبت به $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ می نامیم.

تعریف ۲۵.۰.۱. فرض کنید H فضای هیلبرت باشد و $V \subseteq H$، یك نگاشت خطی $T : V \longrightarrow V$ را **نگاشت خطی متعامد** گوییم ، اگر ضرب داخلی را حفظ کند. یعنی برای هر جفت بردار x, y در فضای ضرب داخلی V داشته باشیم $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$

تعریف ۲۶.۰.۱. فرض کنید X فضای ضرب داخلی باشد و $x \in X$ باشد تابع وزن نامنفی برای این ضرب داخلی تابعی است از X به $\mathbb{C}$ که اندازه پذیر است.

مثال ۲۷.۰.۱. *اگر برای توابع f, g ضرب داخلی زیر را تعریف کنیم*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = ۰$$

که در آن $w(x)$ تابع وزن نامنفی برای ضرب داخلی است . در این صورت می گوییم دو تابع بر هم عمودند ، اگر ضرب داخلی آنها صفر شود. یعنی $\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = ۰$ در این ضرب داخلی ، طول بردارها (تابع ها) از ضرب داخلی بردار در خودش به دست می آید. $\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f\rangle w}$ اعضاي یك دنباله از توابع $\{\ f_i \ \mid\ i = ۱, ۲, ۳, \ldots\ \}$ متعامد هستند اگر

$$\langle f_i, f_j\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)f_j(x)w(x)dx = \|f_i\|^۲\delta_{ij}$$

راست هنجار(متعامد یکه) هستند اگر

$$\langle f_i, f_j\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)f_j(x)w(x)dx = \delta_{ij}$$

در رابطه بالا

$$\delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

***دلتای کرونکر** نام دارد. به بیان دیگر هر دو عضو از این دنباله بر هم عمودند و طولشان ۱ است.*

تعریف ۲۸.۰.۱. فرض کنید $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ یک مجموعه متعامد در فضای هیلبرت H باشد. در اینصورت اگر هر بردار u_α در این مجموعه به گونه ای باشد که هیچ برداری در H وجود نداشته باشد به طوری که اگر به u_α وصل شود مجموعه بدست آمده متعامد باشد. در این صورت u_α را مجموعه **متعامد ماکزیمال** می نامند.

قضیه ۲۹.۰.۱. *فرض کنید $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ یك مجموعه یکا متعامد در فضای هیلبرت H باشد. در این صورت هریك از چهار شرط زیر بر $\{u_\alpha\}$ سه شرط دیگر را ایجاب می کند.*

۱ . *$\{u_\alpha\}$ یك مجموعه متعامد یکه **ماکزیمال** در H است.*

۲ .*مجموعه P مرکب از تمام ترکیبات خطی متناهی از اعضای $\{u_\alpha\}$ در H چگال است.*

۳ .*تساوی $\|x\|^۲ = \sum |\hat{x}(\alpha)|^۲$ به ازای هر $x \in H$ برقرار است.*

۴ . *تساوی $(x, y) = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\hat{y}(\alpha)$ به ازای هر $x, y \in H$ برقرار می باشد. فرمول اخیر به **اتحاد پارسوال** [۲] معروف است.*

برهان. رجوع شود[۳۰]

تعریف ۳۰.۰.۱. فرض کنید V فضای برداری بر روی میدان $\mathbb{F}$ و T عملگری خطی روی V باشد. یک **مقدار ویژه ی** T اسکالری چون c در $\mathbb{F}$ است که برای آن بردار غیر صفری چون α در V با خاصیت $T\alpha = c\alpha$ وجود داشته باشد.

اگر c یک مقدار ویژه ی T باشد ، آنگاه

الف) هر α با خاصیت $T\alpha = c\alpha$ یک **بردار ویژه ی** T وابسته به مقدار ویژه ی c نامیده می شود.

ب) دسته ی همه ی α ها که $T\alpha = c\alpha$ **فضای ویژه** وابسته به c نامیده می شود.

تعریف ۳۱.۰.۱. مجموعه تمام دنباله هایی که روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند و با یک بار مشتق گیری از آنها پیوسته می‌شوند با $C^۱(\mathbb{R})$ نشان می دهیم.

تعریف ۳۲.۰.۱. فرض کنید $X \neq \phi$ و $p(X)$ مجموعه توانی X ، $\tau \subseteq p(X)$ را یك **توپولوژی** بر X می نامیم هرگاه

[۲] parseval

۱ . $X, \phi \in \tau$

۲ . اگر $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ آنگاه $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

۳ . اگر $\{A_\alpha\}_\alpha$ خانواده ای از اعضای τ باشد(متناهی ، نامتناهی یا ناشمارا) آنگاه $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

اگر τ يك توپولوژی بر X باشد آنگاه (X, τ) را یک **فضای توپولوژیکی** می نامند و هر $A \in T$ را یک مجموعه باز در X می‌نامند.

تعریف ۳۳.۰.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژيك باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گوییم اگر تصویر معکوس هر مجموعه باز V در Y يك مجموعه باز مانند W در X باشد.

تعریف ۳۴.۰.۱. فضای توپولوژيك S را با توپولوژی τ در نظر می گیریم. هر مجموعه باز شامل $p \in S$ را یک همسایگی p می‌نامند .

گردایه $\tau' \subset \tau$ يك پایه برای τ است، اگر هر عضو τ (یعنی هر مجموعه باز) اجتماعی از اعضای τ' باشد.

گردایه ی γ از همسایگی‌های نقطهء $p \in S$ يك **پایه موضعی** در p است، اگر هر همسایگی p شامل عضوی از γ باشد.

تعریف ۳۵.۰.۱. اگر توپولوژی τ به وسیله متر d القا شده باشد، گوییم d و τ با هم **سازگار** می باشند.

تعریف ۳۶.۰.۱. فرض کنیم τ يك توپولوژی بر فضای برداری X باشد. به طوری که

۱ .هر نقطهء X يك مجموعه بسته باشد

۲ . اعمال فضای برداری (جمع و ضرب برداری)نسبت به τ پیوسته باشند.

در این شرایط گوییم τ يك **توپولوژی برداری** بر X است و X یک فضای برداری توپولوژيك می باشد.

پیوسته بودن جمع یعنی ، طبق تعریف ، نگاشت $\varphi : X \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $\varphi(x, y) = x + y$ از حاصل ضرب دکارتی $X \times X$ به توی X پیوسته باشد. یعنی اگر به ازای $x_1, x_2 \in X$, V يك همسایگی $x_1 + x_2$ باشد، آنگاه همسایگی‌هایی مانند V_1 از x_1 و V_2 از x_2 وجود داشته باشند به طوری که $V_1 + V_2 \subset V$ باشد. به همین نحو، فرض پیوسته بودن ضرب اسکالر یعنی نگاشت $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ از $\mathbb{C} \times X$ به توی X پیوسته باشد.

یعنی هر گاه $x \in X$ و α اسکالر باشد و V یك همسایگی از αx باشد ، آنگاه به ازای $r > ۰$ ای و همسایگی ای مانند W از x ، هر وقت $|\beta - \alpha| < r$ آنگاه داشته باشیم $\beta W \subset V$.

تعریف ۳۷.۰.۱. اگر X یك فضای برداری توپولوژیك با توپولوژی τ باشد.

۱. X **موضعاً محدب** است اگر یك پایه موضعی مانند B داشته باشد که اعضای آن محدب هستند.

۲. X **متر پذیر** است اگر وتنها اگر یك پایه موضعی شمارش‌پذیر داشته باشد.به عبارت بهتر X متر پذیر است اگر τ با متری مانند d سازگار باشد.

تعریف ۳۸.۰.۱. X **فشرده نسبی** است اگر داری یک همسایگی صفر باشد که بستارش فشرده باشد.

تعریف ۳۹.۰.۱. یك فضای موضعاً محدب E را **شبه-کامل** می‌گوییم اگر هر زیر مجموعه بسته و کراندار از E کامل باشد. یك فضای موضعاً محدب کامل ، شبه-کامل است ولی عکس آن همیشه درست نیست .

قضیه ۴۰.۰.۱. ***مونچ :*** [۳] *فرض کنید E یك فضای توپولوژیك خطی موضعاً محدب مترپذیر شبه-کامل باشد و $F : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ یك نگاشت پیوسته باشد. به طوری که برای زیر مجموعه شمارش پذیر $C \subset \overline{\Omega}$ داشته باشیم :*

$$C \subset \overline{co}(\{x_۰\} \cup F(C)) \Longrightarrow \quad C \text{ بطور نسبی فشرده است }$$

آنگاه F یك نقطه ثابت در $\overline{\Omega}$ دارد.

برهان. رجوع شود[۲۰] $\square$

تعریف ۴۱.۰.۱. فرض کنیم که X یک فضای نرم دار باشد. **توپولوژی ضعیف** کوچکترین توپولوژی در X است بطوریکه هر $f \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد.

که در آن X^* به صورت $X^* = \{x^* : X \longrightarrow \mathbb{F}$ خطی وپیوسته(کراندار) باشند $\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴۲.۰.۱. فرض کنید که X یك فضای نرم‌دار باشد ، زیر مجموعه C از X را **فشرده ضعیف** گوییم اگر نسبت به توپولوژی ضعیف فشرده باشد.

تعریف ۴۳.۰.۱. مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را با $B(X,Y)$ نشان می دهیم اگر $X = Y$ آنگاه آن را با $B(X)$ نشان می‌دهیم.

---
[۳] Monch

تعریف ۴۴.۰.۱. فرض کنیم X,Y دو فضای نرم‌دار باشند. در اینصورت به هر $T \in B(X,Y)$ يك عملگر خطی مانند $T^* \in B(X^*,Y^*)$ منحصر به فرد نظیر است که به ازای هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$ در رابطه $\langle Tx,y^*\rangle = \langle x,T^*y^*\rangle$ صدق می‌کند و همچنین $\|T\| = \|T^*\|$ ، که T^* را **الحاقی** T می‌نامیم.

تعریف ۴۵.۰.۱. عملگر T را یک **عملگر نرمال** گویند هرگاه $TT^* = T^*T$ باشد.

قضیه ۴۶.۰.۱. *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگر خود الحاقی روی V باشد. در این صورت پایه ی متعامد یکه ای برای V وجود دارد که هر بردار آن یک بردار ویژه T است.*

برهان. رجوع شود[۲۷] □

قضیه ۴۷.۰.۱. *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و T عملگر نرمالی روی V باشد. در اینصورت V دارای پایه ی متعامد یکه ای متشکل از بردارهای ویژه T است.*

برهان. رجوع شود[۲۷] □

قضیه ۴۸.۰.۱. ***طیفی*** *فرض کنید T نرمال روی یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی V باشد یا عملگر خود الحاق روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی V باشد.*
فرض کنید $c_1,c_2,...,c_k$ مقادیر ویژه متمایز T باشند. وفرض کنید W_j فضای بردارهای ویژه وابسته به c_j و E_j تصویر متعامد V روی W_j باشد، در این صورت وقتی $i \neq j$ ، W_i بر W_j عمود است.
فضای V مجموع مستقیم $w_1,w_2,...,w_k$ است و

$$T = c_1E_1 + ... + c_kE_k$$

برهان. رجوع شود[۲۷] □

تعریف ۴۹.۰.۱. يك مجموعه **جهت دار** يك مجموعه‌ی ناتهی مانند I با رابطه‌ی ترتیبی $\preceq$ است بطوریکه

۱. وقتی $\alpha \in I$, $\alpha \preceq \alpha$

۲. اگر $\alpha \preceq \beta$, $\beta \preceq \gamma$ آنگاه $\alpha \preceq \gamma$

۳. برای هر α,β در I ، $\gamma_{\alpha,\beta}$ ای در I موجود باشد که $\alpha \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$, $\beta \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$

۴.وقتی $\beta \preceq \alpha$, $\alpha \preceq \beta$ آنگاه $\alpha = \beta$.

تعریف ۵۰.۰.۱. یك **تور** در فضای توپولوژیکی (X,τ) تابعی مانند $f\ :\ I\longrightarrow\ X$ است که در آن I یك مجموعه جهت دار است. مجموعه I مجموعه اندیس گذار تور نامیده می‌شود.

اگر $f\ :\ I\longrightarrow X$ یك تور باشد آنگاه برای هر α در I ، جمله‌ی α ام ، $f(\alpha)$ از تور را با x_α نشان می‌دهیم .

تعریف ۵۱.۰.۱. فرض کنید X,Y فضاهای متریك باشند و $E\subseteq X$, $f\ :\ X\longrightarrow\ Y$ یک نگاشت دلخواه باشد. (که در آن Y یك مجموعه‌ی مرتب است تا سوپریمم و اینفیمم معنی داشته باشد) در این صورت برای هر نقطه ی حدی a از E حد بالائی f در a را $\lim\limits_{x\rightarrow a}\ sup\ f(x)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\lim_{x\rightarrow a}\ sup\ f(x)\ =\lim_{\epsilon\rightarrow 0}(sup\{\ \ f(x)\ \ |\ \ x\in E\bigcap B(\alpha,\epsilon)-\{a\}\}).$$

به طور مشابه حد پایینی f در a بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{x\rightarrow a}\ inf\ f(x)\ =\lim_{\epsilon\rightarrow 0}(inf\{\ \ f(x)\ \ |\ \ x\in E\bigcap B(\alpha,\epsilon)-\{a\}\}).$$

که در آن $B(a,\epsilon)$ گوی متریك به شعاع ϵ و مرکز a است. توجه کنید که همانطور که ϵ محدود می شود، سوپریمم تابع روی گوی به طور یکنواخت کاهش می‌یابد پس می‌توان نوشت

$$\lim_{x\rightarrow a}\ supf(x)\ =\inf_{\epsilon>0}(sup\{\ \ f(x)\ \ |\ \ x\in E\bigcap B(a,\epsilon)-\{a\}\ \})$$

و

$$\lim_{x\rightarrow a}\inf f(x)\ =\sup_{\epsilon>0}(inf\{\ \ f(x)\ \ |\ \ x\in E\bigcap B(a,\epsilon)-\{a\}\ \}).$$

تعریف ۵۲.۰.۱. تعریف قبل به ما کمك می‌کند که بتوانیم تعاریف مشابه را برای فضاهای توپولوژیکی عمومی بیان کنیم (زیرا هر فضای متریك فضای توپولوژیك است)حال فرض کنید X,Y,a,E مشابه تعریف (۳۵.۰.۱)تعریف شوند با این تفاوت که X,Y هر دو فضاهای توپولوژیکی باشند ، در این حالت گوی های متریك را با همسایگی عوض می کنیم.

$$\lim_{x\rightarrow a}supf(x)=inf\{\ sup\ \{f(x)\mid x\bigcap U-\{a\}\neq\phi\}\mid U\ open,a\in U,E\bigcap U-\{a\}\neq\phi\}$$

و

$$\lim_{x\rightarrow a}inff(x)=sup\{\ inf\ \{f(x)\mid x\bigcap U-\{a\}\neq\phi\}\mid U\ open,a\in U,E\bigcap U-\{a\}\neq\phi\}.$$

در بحث‌های مختلف آنالیز **نیم - پیوسته** (نیم پیوستگی) یك خاصیت از توابع حقیقی با مقدار توسعه یافته می‌باشد که ضعیف‌تر از پیوستگی است .

تعریف ۵۳.۰.۱. فرض کنید X یك فضا ی توپولوژیکی باشد و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}\bigcup\{-\infty, \infty\}$ یك تابع حقیقی مقدار توسیع یافته باشد. و $x_\circ \in X$. تابع f را در $x_\circ$ **نیم- پیوسته بالایی** گویند ، هر گاه برای هر $\epsilon > \circ$ یك همسایگی U از $x_\circ$ موجود باشد بطوریکه

$$\forall x \in U \ , \ f(x) \leqslant f(x_\circ) + \epsilon.$$

به عبارت دیگر $\lim\limits_{x \to x_\circ} sup f(x) \leqslant f(x_\circ)$ که در آن $limsup$ حد بالایی تابع f در $x_\circ$ است.

تعریف ۵۴.۰.۱. فرض کنید X یك فضای توپولوژیك باشد و $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty , \infty\}$ یك تابع حقیقی مقدار توسیع یافته باشد و $x_\circ \in X$. f را در $x_\circ$ **نیم- پیوسته پایینی** گویند هرگاه برای هر $\epsilon \geq \circ$ همسایگی U از $x_\circ$ موجود باشد بطوریکه

$$\forall x \in U \ , \ f(x_\circ) - \epsilon \leq f(x).$$

به عبارت دیگر $f(x_\circ) \leq \lim\limits_{x \to x_\circ} inf f(x)$ که در آن $liminf$ حد پایینی f در $x_\circ$ است.

تعریف ۵۵.۰.۱. آ) گردایه m از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی X را یك $\sigma-$ جبر در X نامیم اگر m از خواص زیر بهره‌مند باشد:

۱. $X \in m$

۲. هرگاه $A \subset m$ آنگاه $A^c \in m$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

۳. هرگاه $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, ...$ ، $A_n \in m$ آنگاه $A \in m$

ب) هرگاه m یك $\sigma-$ جبر در X باشد ، آنگاه (X, m) را یك فضای اندازه‌پذیر و اعضای m را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می نامیم.

پ) هرگاه X یك فضای اندازه‌پذیر ، Y یك فضای توپولوژیك و f نگاشتی از X به توی Y باشد ، آنگاه گوییم f اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y, $f^{-1}(V)$ یك مجموعه باز در X باشد.