باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

**پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر**

عنوان:

درباره ی ایده آل های دوجذبی از حلقه های جابجایی

استاد راهنما:

دکتر شعبان قلندر زاده

استاد مشاور:

دکتر محمدجواد نیک مهر

پژوهشگر:

فاطمه آشوری

آذر ۱۳۹۱

تقدیم به

مادر مهربان و همسر فداکارم

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگار بهترین پشتیبان است.
به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید.
و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: درباره ی ایده آل های دوجذبی از حلقه های جابجایی

استاد راهنما: دکتر شعبان قلندر زاده

نام دانشجو: فاطمه آشوری

شماره دانشجویی: ۸۹۰۶۲۷۴

اینجانب فاطمه آشوری دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تایید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

به نام او که مرا سرشت ...

سپاس ایزد منان را که در فراز و نشیب راه، راهم نمود و با لطف و عنایتش مرا به امروز رساند که هر چه امروز من است از اوست. اکنون که به این جایگاه رسیده‌ام او را شاکرم و با افتخار در مقابل استاد گرامی ام آقای دکتر شعبان قلندرزاده که نقش بسزایی در راهنمایی و اتمام این پایان‌نامه بر عهده داشتند زانو بر زمین زده و کمال تشکر را دارم. همچنین از دکتر محمدجواد نیک مهر به عنوان استاد مشاور و دکتر کمال عقیق داور داخلی و دکتر موسوی داور خارجی این پایان‌نامه جهت راهنمایی ارزنده‌شان سپاسگزارم.

چکیده رساله

فرض می کنیم R یک حلقه جابجایی با $(1 \neq 0)$ باشد. در این پایان نامه ایده آل های دوجذبی را که تعمیمی از ایده آل های اول هستند معرفی می کنیم. یک ایده آل سره مخالف صفر I از R را یک ایده آل دو جذبی از R می نامیم اگر برای هر $a, b, c \in R$، از $abc \in I$ نتیجه بگیریم $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$.
نشان می دهیم که یک ایده آل سره غیر صفر I از R یک ایده آل دوجذبی است هرگاه برای ایده آل های $I_1, I_2, I_3 \in R$، اگر داشته باشیم $I_1 I_2 I_3 \subseteq I$ آنگاه $I_1 I_2 \subseteq I$ یا $I_2 I_3 \subseteq I$ یا $I_1 I_3 \subseteq I$.
و همچنین ثابت می کنیم اگر I یک ایده آل دوجذبی از حلقه R باشد، آنگاه $Rad(I)$ یا یک ایده آل اول از حلقه R است یا $Rad(I) = P_1 \cap P_2$، بطوریکه P_1 و P_2 تنها ایده آل های اول مینیمال و متمایز روی ایده آل I هستند.
تمام ایده آل های دوجذبی از دامنه های ارزیاب و دامنه های پروفر بطور کامل توصیف شده اند.
نشان می دهیم که یک دامنه نوتری R، یک دامنه ددکیند است اگر و فقط اگر هر ایده آل دوجذبی I از R یا یک ایده آل ماکسیمال از حلقه R باشد یا یک ایده آل ماکسیمال مانند M از حلقه R موجود باشد، بطوریکه $I = M^2$ یا ایده آل های ماکسیمال M_1 و M_2 از R موجود باشند بطوریکه $I = M_1 M_2$.
اگر برای هر ایده آل ماکسیمال M از حلقه R، R_M نوتری باشد آنگاه نشان می دهیم یک دامنه صحیح R یک دامنه تقریبا" ددکیند است اگر و فقط اگر هر ایده آل دوجذبی I از R، یا یک ایده آل ماکسیمال از R باشد یا یک ایده آل ماکسیمال M از R موجود باشد بطوریکه $I = M^2$ یا ایده آل های ماکسیمال M_1 و M_2 از R موجود باشند بطوریکه $I = M_1 M_2$.

مقدمه

این رساله در دو فصل تهیه شده است. در فصل اول به تعریف و قضایای پایه ای از ایده آل ها و حلقه ها و دامنه های مختلف استفاده شده در فصل دوم می پردازیم. که برای این کار بیشتر مراجع [۶] ، [۷] ، [۹] و [۱۱] را به کار می گیریم. در فصل دوم با استفاده از مرجع [۴] در ابتدا رابطه بین ایده آل های دوجذبی را با ایده آل رادیکال و ایده آل اولیه بیان می کنیم، و سپس ایده آل های دوجذبی را در دامنه های ارزیاب و دامنه های پروفر، ددکیند و تقریبا" ددکیند توصیف می کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایای پایه ای

۱.۱ تعاریف و قضایای پایه ای

در این فصل به تعاریف و قضایای پایه ای مورد نیاز می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ جفت مرتب $(G, .)$، که در آن G یک مجموعه و. یک عملگر دوتایی روی G است را یک گروه [۱] می نامیم. اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. برای هر $a, b, c \in G$، $(a.b).c = a.(b.c)$.

۲. یک عنصر مانند e در G وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $a \in G$، $a.e = e.a = a$، که e را یک عنصر همانی گروه G می نامیم.

۳. برای هر $a \in G$، یک عنصر a^{-1} از G چنان موجود باشد بطوریکه $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$، که a^{-1} را یک عنصر وارون از گروه G می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ گروه $(G, .)$ را یک گروه آبلی [۲] می نامیم اگر برای هر $a, b \in G$، $a.b = b.a$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم R مجموعه ای ناتهی با دو عمل دوتایی + و . باشد. در صورتی که برای هر $a, b, c \in R$ شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه $(R, +, .)$ را یک حلقه [۳] می گوییم.

[۱] Group

[۲] Abelian group

[۳] Ring

۱. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (قانون شرکت پذیری جمع)

۲. $a.(b.c)=(a.b).c$ (قانون شرکت پذیری ضرب)

۳. $a+b=b+a$ (قانون تعویض پذیری جمع)

۴. $a.(b+c)=a.b+a.c$ و $(a+b).c=a.c+b.c$ (قوانین پخشی)

۵. $a+0_R=0_R+a=a$ و $a\cdot 1_R=1_R\cdot a=a$ (اعضای همانی)

۶. $a+(-a)=(-a)+a=0_R$ (وارون جمعی)

تعریف ۴.۱.۱ حلقه R را یک حلقه جابجایی [۴] می گوییم هرگاه برای هر $a,b\in R$، داشته باشیم $ab=ba$.

تذکر ۵.۱.۱ در ادامه مطلب همه حلقه ها جابجایی فرض شده اند.

تعریف ۶.۱.۱ هرگاه عنصر همانی ضرب با عنصر همانی جمع برابر باشند یعنی $1_R=0_R$. آنگاه R را حلقه صفر می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ S را زیر حلقه R [۵] می نامیم اگر مجموعه S یک زیر مجموعه از مجموعه R باشد بطوریکه اعمال دوتایی R در S نیز القا شود.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد، زیر مجموعه I از R را ایده آل [۶] می نامیم، اگر شرطهای زیر برقرار باشند:

۱. $I\neq\varnothing$،

۲. هرگاه $a,b\in I$ آنگاه $a+b\in I$،

۳. هرگاه $a\in I$ و $r\in R$ آنگاه $ra\in I$.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. گروه آبلی M را یک R-مدول چپ [۷] می نامیم هرگاه نگاشت $R\times M\mapsto M$ با ضابطه $(a,x)\mapsto ax$ موجود باشد بطوریکه برای هر $a,b\in R$ و $x,y\in M$ داشته باشیم:

[۴] Commutative ring

[۵] Subring

[۶] Ideal

[۷] Left R-module

۱. $a(x+y) = ax + ay$،

۲. $(a+b)x = ax + bx$،

۳. $(ab)x = a(bx)$،

۴. $1.x = x$.

تذکر ۱۰.۱.۱ چون R یک حلقه جابجایی فرض شده است، بنابراین R-مدول چپ(یا راست) را می توانیم همان R-مدول [8] در نظر بگیریم.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک مقسوم علیه صفر از حلقه [9] R عضوی مانند $a \in R$ است که به ازای آن عضوی ناصفر چون b از حلقه R وجود داشته باشد بطوریکه $ab = 0_R$. مجموعه مقسوم علیه های صفر R را با $Z(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ یک مقسوم علیه به غیر از صفر را سره [10] می نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ یک عنصر از R را که مقسوم علیه صفر نیست، یک عنصر منظم [11] می گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱ یک ایده آل از حلقه R را ایده آل منظم [12] نامیم هرگاه شامل یک عنصر منظم باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ اگر حلقه R ناصفر باشد و برای هر $a, b \in R$ از $a.b = 0_R$، نتیجه بگیریم $a = 0_R$ یا $b = 0_R$. آنگاه حلقه R را دامنه صحیح [13] می نامیم. یا به عبارت دیگر هرگاه R مقسوم علیه صفر سره نداشته باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. عضو یکه [14] R عضوی چون $v \in R$ است که به ازای آن عضوی مانند $u \in R$ وجود داشته باشد که $uv = 1_R$. اگر $v \in R$ وارون پذیر باشد، آنگاه دقیقا" یک عضو $u \in R$ با خاصیت $uv = 1_R$ وجود دارد. این عضو را وارون [15] v می نامیم و با v^{-1} نمایش می دهیم.

[8] R-module

[9] Zero divisor

[10] Proper

[11] Regular element

[12] Regular ideal

[13] Integral domain

[14] Unit

[15] Invers

تعریف ۱۷.۱.۱ هرگاه حلقه R مخالف صفر بوده و هر عضو ناصفر R وارون پذیر باشد، آنگاه R را یک میدان [۱۶] می گوییم.

تعریف ۱۸.۱.۱ ایده آل ناصفر P از حلقه R را یک ایده آل اول [۱۷] از حلقه R می نامیم، اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $P \neq R$،

۲. برای هر $a, b \in R$ از $ab \in P$ نتیجه بگیریم $a \in P$ یا $b \in P$.

تعریف ۱۹.۱.۱ ایده آل M از حلقه R را ایده آل ماکسیمال [۱۸] می نامیم، اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $M \neq R$،

۲. برای هر ایده آل a از R از اینکه $M \subseteq \mathrm{a} \subseteq R$، نتیجه بگیریم $M = \mathrm{a}$ یا $R = \mathrm{a}$.

قضیه ۲۰.۱.۱ اگر فرض کنیم R یک حلقه باشد و M و P ایده آل هایی از حلقه R باشند. آنگاه عبارات زیر همواره برقرار است:

۱. P ایده آل اول است اگر و فقط اگر $\frac{R}{P}$ یک دامنه صحیح باشد.

۲. M ایده آل ماکسیمال است اگر و فقط اگر $\frac{R}{M}$ یک میدان باشد.

اثبات: به قضیه ۲.۷.۲ [۱۶] مراجعه شود.

قضیه ۲۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه غیر بدیهی باشد. آنگاه R حداقل یک ایده آل ماکسیمال دارد.
اثبات: به قضیه ۹.۳ [۱۵] مراجعه شود.

نتیجه ۲۲.۱.۱ فرض کنیم I یک ایده آل سره از حلقه R باشد. آنگاه یک ایده آل ماکسیمال مانند M از R وجود دارد بطوریکه $I \subseteq M$.
اثبات: به قضیه ۱۰.۳ [۱۵] مراجعه شود.

---

[۱۶] Field

[۱۷] Prime ideal

[۱۸] Maximal ideal

نتیجه ۲۳.۱.۱ *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. آنگاه a یکه است اگر و فقط اگر برای هر ایده آل ماکسیمال M از R، $a \notin M$.*

اثبات: *به نتیجه ۱۱.۳ [۱۵] مراجعه شود.*

تعریف ۲۴.۱.۱ *فرض کنیم R یک حلقه باشد. رادیکال جیکبسون از R را بصورت $J(R)$ تعریف می کنیم که اشتراک تمام ایده آل های ماکسیمال از R است.*

لم ۲۵.۱.۱ *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $r \in R$، آنگاه $r \in J(R)$ اگر و فقط اگر برای هر $a \in R$، عنصر $1 - ra$ در حلقه R یکه باشد.*

اثبات: *به لم ۱۷.۳ [۱۵] مراجعه شود.*

در این پایان نامه در برخی قضایا از لم زرن استفاده می شود که برای آشنایی بیشتر با این لم ابتدا تعاریفی را ارائه می دهیم.

فرض کنیم Ω یک مجموعه ناتهی از اشیاء باشد. رابطه $\leq$ روی اعضای Ω، را یک رابطه ی ترتیب جزئی [۱۹] روی Ω می نامیم هرگاه برای هر $x, y \in \Omega$ داشته باشیم:

۱. $x \leq x$،

۲. هرگاه $x \leq y$ و $y \leq x$، آنگاه $x = y$،

۳. هرگاه $x \leq y$ و $y \leq z$، آنگاه $x \leq z$.

چنین مجموعه ای را مجموعه مرتب جزئی [۲۰] می نامیم.

تعریف ۲۶.۱.۱ *$u \in \Omega$ یک کران بالا [۲۱] برای زیر مجموعه ی $\sum$ از Ω نامیده می شود، هرگاه برای هر $x \in \sum$، $x \leq u$.*

چنین زیر مجموعه ای را از بالا کران دار می نامیم.

[۱۹] Partially ordering

[۲۰] Partially ordered set

[۲۱] Upper bound

تعریف ۲۷.۱.۱ *رابطه $\leq$ روی مجموعه ی $(\Omega, \leq)$ یک رابطه ترتیب کلی [۲۲] نامیده می شود، هرگاه:*

۱. *ترتیب جزئی باشد،*

۲. *هرجفت اعضای Ω توسط $\leq$ قابل مقایسه باشند.*

چنین مجموعه ای را یک مجموعه مرتب کلی [۲۳] می نامیم.

تعریف ۲۸.۱.۱ مجموعه مرتب جزئی Ω را یک سیستم استقرایی [۲۴] گوییم هرگاه هر زیر مجموعه مرتب کلی از آن از بالا کران دار باشد.

لم ۲۹.۱.۱ لم زرن [۲۵]
هر سیستم استقرایی ناتهی حداقل یک عضو ماکسیمال دارد.

تعریف ۳۰.۱.۱ *فرض کنیم I یک ایده آل از R باشد. یک ایده آل اول P از R را یک مقسوم علیه اول مینیمال [۲۶] از I می نامیم، اگر $I \subseteq P$ و اگر هیچ ایده آل اولی مانند P' از R وجود نداشته باشد بطوریکه $I \subseteq P' \subset P$.*

تذکر ۳۱.۱.۱ *توجه داشته باشیم که مقسوم علیه اول مینیمال همان ایده آل اول مینیمال است.*

لم ۳۲.۱.۱ *فرض کنیم I یک ایده آل از R باشد و برای ایده آل اول P از R داشته باشیم $I \subseteq P$. آنگاه P شامل یک مقسوم علیه اول مینیمال از I است.*
اثبات: به لم ۲ .۱۵ [۱۱] مراجعه شود.

تعریف ۳۳.۱.۱ *فرض کنیم I ایده آلی از حلقه R باشد. آنگاه $Rad(I)$ بصورت زیر تعریف می شود:*

$$Rad(I) = \{x \in R; \exists n \geq \circ \ , x^n \in I\}$$

واضح است که $I \subseteq Rad(I)$.

قضیه ۳۴.۱.۱ *فرض کنیم I, J ایده آل هایی از حلقه R باشند. در این صورت گزاره های زیر برقرارند:*

[۲۲] Totally ordering

[۲۳] Totally ordered

[۲۴] Inductive system

[۲۵] Zorn's lemma

[۲۶] Minimal prime divisor

۱. $Rad(I)$ یک ایده آل R است.

۲. هرگاه J یک ایده آل از R باشد و $I \subseteq J$ ، آنگاه $Rad(I) \subseteq Rad(J)$.

اثبات: به صفحه ۸۲ گزاره ۶ و ۷ [۱۲] مراجعه شود.

قضیه ۳۵.۱.۱ اگر I یک ایده آل و P یک ایده آل اول از R باشد. آنگاه
$Rad(I) = \cap_{I \subseteq P} P = \cap_{P \in Min(I)} P$.
$Min(I)$ عبارتست از ایده آل های اول مینیمال روی I .
اثبات: به قضیه ۱۴.۲ [۱۱] مراجعه شود.

لم ۳۶.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و I و J ایده آل هایی از حلقه R باشند. آنگاه عبارات زیر همواره برقرار اند:

۱. $Rad(I+J) = Rad(Rad(I) + Rad(J))$

۲. $Rad(Rad(I)) = Rad(I)$

۳. $Rad(I) = (۱)$ اگر و تنها اگر $I = (۱)$

۴. اگر $Rad(I) + Rad(J) = (۱)$ آنگاه $I + J = (۱)$

۵. $Rad(IJ) = Rad(I \cap J) = Rad(I) \cap Rad(J)$

اثبات: به [۱۵] مراجعه شود.

تعریف ۳۷.۱.۱ ایده آل Q از حلقه R را اولیه [۲۷] گوییم هرگاه برای هر $a, b \in R$ با شرایط $ab \in Q$ و $b \notin Q$ ، عدد صحیح $n \geq ۱$ وجود داشته باشد بطوریکه $a^n \in Q$.

تعریف ۳۸.۱.۱ ایده آل Q از حلقه R را P-اولیه [۲۸] گوییم هرگاه برای هر $a, b \in R$ با شرایط $ab \in Q$ و $b \notin Q$ ، عدد صحیح $n \geq ۱$ وجود داشته باشد بطوریکه $a^n \in Q$ و $Rad(Q) = P$.

مثال ۳۹.۱.۱ هر ایده آل اول از حلقه R اولیه است.

---

[۲۷] Primary

[۲۸] P-primary

قضیه ۴۰.۱.۱ *رادیکال هر ایده آل اولیه یک ایده آل اول است.*

اثبات: *به گزاره ۱۵ ، فصل ۲ [۱۲] مراجعه شود.*

تعریف ۴۱.۱.۱ *زیرمجموعه S از حلقه R را بسته ضربی*[۲۹] *می گوییم هرگاه:*

۱. $1 \in S$،

۲. *و برای* $s_1, s_2 \in S$ *داشته باشیم* $s_1 s_2 \in S$.

لم ۴۲.۱.۱ *فرض کنیم I ایده آلی از حلقه R باشد و P یک ایده آل اول از حلقه R باشد بطوریکه* $I \subseteq P$. *آنگاه شرایط زیر هم ارزند:*

۱. P *یک ایده آل اول مینیمال از R است.*

۲. $R \backslash P$ *یک مجموعه بسته ضربی است که نسبت به رابطه،* $(R \backslash P) \cap I = \varnothing$*، ماکسیمال است.*

۳. *برای هر* $x \in P$*، یک* $y \in R \backslash P$ *و* $i \in \mathbb{Z}^+$ *وجود دارد بطوریکه* $yx^i \in I$.

اثبات: *به قضیه ۲ .۱ [۹] مراجعه شود.*

قضیه ۴۳.۱.۱ *فرض کنیم I ایده آلی از حلقه R و S یک مجموعه بسته ضربی در R باشد بطوریکه* $I \cap S = \varnothing$. *آنگاه یک ایده آل P از R چنان موجود است بطوریکه* $P \cap S = \varnothing$ *و* $I \subseteq P$ *و P نسبت به این خاصیت ماکسیمال است و بعلاوه P یک ایده آل اول است.*

اثبات: *فرض کنیم χ مجموعه تمام ایده آل های J از R باشد بطوریکه* $I \subseteq J$ *و* $J \cap S = \varnothing$.

از آنجایی که $I \in \chi$*، پس* $\chi \neq \varnothing$ *است.*

از طرفی می دانیم $(\chi, \subseteq)$ *یک مجموعه مرتب جزئی است.*

فرض کنیم $\sum = \{J_i; J_i \lhd R, I \subseteq J_i, I \cap J_i = \varnothing\}$ *زیر مجموعه مرتب کلی از χ باشد.*

ادعا می کنیم $\cup J_i$ *یک کران بالا برای* $\sum$ *است.*

ابتدا نشان می دهیم $\cup J_i$ *نیز ایده آل است. پس برای هر* $r \in R$ *و* $a, b \in \cup J_i$*، باید نشان دهیم* $a - b \in \cup J_i$ *و* $ra \in \cup J_i$ *است.*

از اینکه $\sum$ *یک مجموعه مرتب کلی فرض شده است، پس هر دو عضو از آن قابل مقایسه اند. بنابراین برای هر دو عضو مانند* J_m, J_n *از* $\sum$*،* $J_m \subseteq J_n$ *یا* $J_n \subseteq J_m$ *است. فرض کنیم* $a, b \in \cup J_i$*، پس می توان*

[۲۹] Multiplicatively closed

گفت $a \in J_m$ و $b \in J_n$. اگر $J_m \subseteq J_n$ باشد آنگاه $a \in J_n$ است. از اینکه $b \in J_n$ و $a \in J_n$ و ایده آل بودن J_n نتیجه می گیریم $a - b \in J_n \subseteq \cup J_i$ و $ra \in J_n \subseteq \cup J_i$. با توجه به استدلال های بالا می توان گفت که $\cup J_i$ نیز ایده آل است.

برای حالت $J_n \subseteq J_m$ نیز به همین شکل عمل می کنیم.

از طرفی چون I زیر مجموعه حداقل یک J_k یی از $\sum$ است، بنابراین $I \subseteq \cup J_i$.

و چون $\varnothing = ... = \varnothing \cup \varnothing \cup ... = (I \cap J_1) \cup (I \cap J_2) \cup ...$ است، بنابراین $I \cap (\cup J_i) = \varnothing$.

پس نتیجه می گیریم $\cup J_i \in \sum$ است. پس $\sum$ یک کران بالا مانند $\cup J_i$ دارد. در این صورت طبق لم زرن می توان گفت χ حداقل یک عنصر ماکسیمال مانند P دارد.

حال نشان می دهیم P یک ایده آل اول است. به برهان خلف فرض کنیم P اول نباشد و فرض می کنیم $ij \in P$ و $i \notin P$ و $j \notin P$.

از اینکه $i \notin P$ و $j \notin P$ می توان نتیجه گرفت $P \subsetneq P + (i)$ و $P \subsetneq P + (j)$.

با توجه به انتخاب P، $P + (i)$ و $P + (j)$ متعلق به مجموعه χ نیستند. پس $P + (i) \cap S \neq \varnothing$ و $P + (j) \cap S \neq \varnothing$.

بنابراین x, y یی وجود دارند، بطوریکه $x \in P + (i) \cap S$ و $y \in P + (j) \cap S$، که می توان آنها را بصورت مقابل تعریف کرد، $x = p_1 + r_1 i \in P + (i)$ و $y = p_2 + r_2 j \in P + (j)$ که p_1, p_2 عناصری از P_1, P_2 وهمچنین r_1, r_2 عناصری از R هستند بطوریکه $x \notin P$ و $y \notin P$.

در ادامه داریم $xy = p_1 p_2 + p_1 r_2 j + r_1 i p_2 + r_1 r_2 ij$. که با توجه به خاصیت بسته ضربی بودن مجموعه S و ایده آل بودن P میتوان گفت $xy = p_1 p_2 + p_1 r_2 j + r_1 i p_2 + r_1 r_2 ij \in P \cap S$.

که این هم متناقض با فرض تهی بودن $P \cap S$ است. پس فرض برهان خلف باطل و حکم برقرار است. پس P ایده آل اول است.

تعریف ۴۴.۱.۱ عنصر x از حلقه R را عنصر خودتوان [30] می نامیم، هرگاه $x = x^2$.

تعریف ۴۵.۱.۱ فرض کنیم I یک ایده آل از حلقه R باشد، I را یک ایده آل پوچتوان [31] گوییم هرگاه عدد صحیح $k \geq 1$ وجود داشته باشد بطوریکه $I^k = 0$.

تعریف ۴۶.۱.۱ عنصر x از حلقه R را عنصر پوچتوان [32] می نامیم، اگر عدد صحیح $n \geq 0$ وجود داشته باشد، بطوریکه $x^n = 0$.

[30] Idempotent

[31] Nilpotent ideal

[32] Nilpotent element

تعریف ۴۷.۱.۱ مجموع تمام ایده آل های پوچتوان R را رادیکال پوچتوان [۳۳] نامیده و با نماد $N(R)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۴۸.۱.۱ در حلقه R اشتراک ایده آل های اول از R، که بطور سره شامل صفر هستند، برابر رادیکال پوچتوان حلقه R است، به عبارتی دیگر: $N(R) = Rad(0) = \cap_{0 \subset P} P$.

اثبات: به گزاره ۱۵، فصل ۲ [۱۳] مراجعه شود.

تعریف ۴۹.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد.

۱. زنجیر صعودی(افزایشی)[۳۴] $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq ...$ از ایده آل های R را زنجیر ایستا [۳۵] نامند هرگاه عدد صحیح و مثبت n موجود باشد بطوریکه برای هر $k \geq n$، $I_k = I_n$.

۲. زنجیر نزولی(کاهشی) [۳۶] $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_k \supseteq I_{k+1} \supseteq ...$ از ایده آل های R را زنجیر ایستا نامند هرگاه عدد صحیح و مثبت n موجود باشد بطوریکه برای هر $k \geq n$، $I_k = I_n$.

تعریف ۵۰.۱.۱ فرض کنیم I ایده آلی از حلقه R باشد. اگر یک زیر مجموعه متناهی مانند $\{x_1, ...x_n\}$ از I وجود داشته باشد بطوریکه $I = Rx_1 + ... + Rx_n$، آنگاه می گوییم I یک ایده آل با تولید متناهی [۳۷] است.

تعریف ۵۱.۱.۱ حلقه R را حلقه نوتری [۳۸] نامند در صورتی که هر زنجیر افزایشی از ایده آل های آن ایستا باشد، یا به طور معادل هر ایده آل R با تولید متناهی باشد.

تعریف ۵۲.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $a \in R$ باشد، آنگاه مجموعه $Ra = \{ra; r \in R\} =< a >$، کوچکترین ایده آل شامل a است که آن را ایده آل اصلی [۳۹] تولید شده توسط a می نامیم.

تعریف ۵۳.۱.۱ دامنه صحیح R را که هر ایده آل آن اصلی باشد، دامنه ایده آل اصلی [۴۰] می نامیم.

---

[۳۳] NilRadical

[۳۴] Ascending chain

[۳۵] invariant chain

[۳۶] Descending chain

[۳۷] Finitely generated

[۳۸] Noetherian ring

[۳۹] Principal ideal

[۴۰] Principal ideal domain

قضیه ۵۴.۱.۱ قضیه کوهن[۴۱]: فرض کنیم R یک حلقه باشد. دراین صورت R یک حلقه نوتری است اگر و فقط اگر هر ایده آل اول از R متناهی مولد باشد.
اثبات: به فصل ۱۳ قضیه ۵ [۱۷] مراجعه شود.

تعریف ۵۵.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد و I و J ایده آل هایی از حلقه R باشند. ایده آل های I و J را کوماکسیمال[۴۲] نامیم اگر $I + J = R$ باشد.

قضیه ۵۶.۱.۱ باقیمانده چینی[۴۳] فرض کنیم R یک حلقه باشد و I_1 و...و I_n ایده آل هایی از حلقه R باشند بطوریکه I_i و I_j برای $i \neq j$ کو ماکسیمال باشند. آنگاه

۱. $\frac{R}{(I_1 \cap ... \cap I_n)} \cong \frac{R}{I_1} \oplus ... \oplus \frac{R}{I_n}$.

۲. $\bigcap_{j=1}^{n} I_j = \prod_{j=1}^{n} I_j$.

اثبات: به قضیه ۱۲.۲.۱ [۱۴] مراجعه شود.

مثال ۵۷.۱.۱ فرض کنیم $m\mathbb{Z}$ و $n\mathbb{Z}$ ایده آل هایی از حلقه $\mathbb{Z}$ باشند. اگر $(m,n) = 1$ باشد، پس $x, y \in \mathbb{Z}$ وجود دارد بطوریکه $mx + ny = 1$. چون $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = 1$ است آنگاه $m\mathbb{Z}$ و $n\mathbb{Z}$ کوماکسیمال هستند.

تعریف ۵۸.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و I ایده آل مخالف صفر از حلقه R باشد. ایده آل I را $P-primal$ نامیم هرگاه برای هر ایده آل اول P از R شامل I داشته باشیم $Z(\frac{R}{I}) = \frac{P}{I}$.

تعریف ۵۹.۱.۱ فرض کنیم I یک ایده آل و P یک ایده آل اول از حلقه R باشد. $I_{(P)}$ را بصورت مقابل تعریف می کنیم: $I_{(P)} = \{x \in R; sx \in I, s \in R\backslash P$ برای بعضی$\}$

لم ۶۰.۱.۱ اگر I یک ایده آل $P-primal$ از حلقه R باشد، آنگاه

۱. اگر Q یک ایده آل اول شامل P باشد، $I = I_{(Q)}$.

۲. اگر Q یک ایده آل اول شامل P نباشد، $I \subset I_{(Q)}$.

۳. اگر $I_{(Q)}$ برای ایده آل های اول مانند Q که شامل P هستند، یک ایده آل $Q-primal$ باشد، آنگاه $Q \subseteq P$.

---

[۴۱] Cohen's theorem

[۴۲] Comaximal

[۴۳] Chinese remainder theorem

اثبات: به لم ۱ .۳ [۶] مراجعه شود.

تعریف ۶۱.۱.۱ حلقه R را حلقه موضعی [۴۴] می نامیم اگر R دقیقا" یک ایده آل ماکسیمال مانند M داشته باشد.

تعریف ۶۲.۱.۱ حلقه نوتری R را حلقه شبه موضعی [۴۵] می نامیم اگر R دقیقا" ایده آل ماکسیمال مانند M داشته باشد.

قضیه ۶۳.۱.۱ یک حلقه شبه موضعی دارای هیچ عنصر خودتوان غیر بدیهی نیست.

اثبات: طبق برهان خلف فرض کنیم چنین نباشد، بنابراین فرض کنیم که x یک عنصر خودتوان به غیر از ۰ و ۱ باشد، آنگاه x نمی تواند یک عنصر یکه باشد پس، $(x) \subseteq J(R)$. بنابر لم ۱ .۱ .۲۵، $u = 1 - x$ عنصری یکه می باشد، در نتیجه $x = 1 - u$ و چون $x = x^2$، داریم

$$(1-u)^2 = 1-u \Rightarrow 1-2u+u^2 = 1-u \Rightarrow u^2 = u \Rightarrow u = 1$$

که نتیجه می گیریم $x = 0$ می باشد که این یک تناقض است و بدین ترتیب حکم ثابت می شود.

لم ۶۴.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. آنگاه R یک حلقه شبه موضعی است اگر و فقط اگر مجموعه متشکل از غیر یکه های R، یک ایده آل در حلقه R باشد.

اثبات: به لم ۳ .۱۳ [۱۵] مراجعه شود.

لم ۶۵.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و P ایده آلی اول از R باشد. $S = R \backslash P$ زیر مجموعه ضربی بسته از R باشد. رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

به ازای $(a,s),(b,t) \in R \times S$، $(a,s) \sim (b,t)$ اگر و فقط اگر $u \in S$ وجود داشته باشد بطوریکه $u(ta-sb) = 0$. در این صورت $\sim$ رابطه هم ارزی روی $R \times S$ است.

تذکر ۶۶.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و P ایده آلی اول از R و $S = R \backslash P$ زیر مجموعه ضربی بسته از R باشد. با توجه به لم ۱ .۱ .۶۵ به ازای $(a,s) \in R \times S$، رده هم ارزی شامل (a,s) را با $\frac{a}{s}$ و مجموعه رده های هم ارزی $\sim$ را با $R_p = S^{-1}R$ نمایش می دهیم. در این صورت R_p تحت عمل های $\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$ و $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta+sb}{st}$، به ازای $a,b \in R$ و $s,t \in S$، حلقه ای جابجایی است.

این حلقه جدید R_p حلقه کسرهای [۴۶] R نسبت به S یا حلقه حاصل از موضعی سازی [۴۷] R در P می

[۴۴] Local ring

[۴۵] Quasi-local ring

[۴۶] Quotient ring

[۴۷] Localization