بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک ذرات بنیادی

بهینه‌سازی الگوریتم جستجوی کوانتومی گراور

دانشجو:

معصومه محمودی خوش‌دره

استاد راهنما:

دکتر حسین موحدیان

بهمن ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم به پاس زحمات بی پایانشان.

تشکر و قدردانی

سپاس خدای عزوجل را که در سایه‌ی الطافش توانستم این مرحله را با موفقیت به پایان برسانم.
از استاد گرامی‌ام، آقای دکتر حسین موحدیان و راهنمایی‌هایشان کمال تشکر را دارم. از حمایت های پدر و مادر و خانواده‌ی عزیزم بسیار سپاسگزارم، همینطور از اساتید محترم دانشکده‌ی فیزیک تشکر می نمایم.

تعهد نامه

اینجانب معصومه محمودی خوش دره دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته ذرات بنیادی، دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان نامه‌ی بهینه سازی الگوریتم جستجوی گراور تحت راهنمائی دکتر حسین موحدیان متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ **امضای دانشجو**

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

الگوریتم جستجوی کوانتومی که توسط گراور در سال ۱۹۹۶ برای اولین بار ارائه شد، توانست یک گزینه‌ی مشخص را در $O(\sqrt{N})$ مرحله در میان N گزینه که در آن اطلاعات به صورت نامرتب ذخیره شده است، پیدا کند که در مقایسه با مورد کلاسیکی که در $N/2$ مرحله بود سریع‌تر است. بعدها ثابت شد که نمی-توان الگوریتم کوانتومی که از این سریع‌تر باشد، نوشت. با این حال برای افزایش دقت در الگوریتم جستجو تلاشهای بسیاری کردند تا احتمال رسیدن به جواب بعد از اندازه‌گیری بیشتر و بیشتر شود. در سال ۲۰۰۴، احمد یونس الگوریتمی برای جستجوی کوانتومی پیشنهاد کرد که توانست با تغییراتی در روش گراور، این الگوریتم را بهینه کند.

با اضافه کردن یک کیوبیت هدف به الگوریتم احمد یونس، الگوریتم جدیدی تشکیل می‌شود و یک درهم‌تنیدگی بین کیوبیت هدف و دیگر کیوبیت‌های سیستم برقرار می‌گردد. این کیوبیت هدف جدید باعث افزایش زیرفضاهای جواب از دو زیر فضا به چهار زیر فضا و در نتیجه باعث افزایش احتمال دست‌یابی به جواب می‌شود و می‌بینیم که در این حالت احتمالات نسبت به الگوریتم احمد یونس موفقیت بیشتری پیدا می‌کند. با تعمیم این مورد نشان می‌دهیم که این الگوریتم در نقاطی که $M/N = \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}$، حداکثر احتمال موفقیت آن از الگوریتم احمد یونس بیشتر است.

کلمات کلیدی: مکانیک کوانتومی؛ کامپیوتر کوانتومی؛ اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی؛ جستجوی کوانتومی؛ الگوریتم گراور؛ الگوریتم احمد یونس؛ الگوریتم پیشنهادی

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

مکانیک کوانتومی

۱-۱- مقدمه

در اواخر قرن نوزدهم، مشخص شد که فیزیک کلاسیک قادر به توضیح بعضی از پدیده‌ها نمی‌باشد، در نتیجه به دلیل این محدودیت‌ها در فیزیک کلاسیک در دهه‌های اولیه‌ی قرن ۲۰، یک انقلاب بزرگ در نظریه‌ی فیزیکی بوجود آمد که منجر به توسعه‌ی مکانیک کوانتومی شد.

فیزیک کوانتومی مهم‌ترین دستاورد علم بشری در توصیف طبیعت است. این نظریه که در سالهای ۲۷-۱۹۲۵ توسط «ورنر هایزنبرگ»، «اروین شرودینگر»، «پل دیراک»، «ماکس پلانک» و چند تن دیگر پایه‌گذاری شد، اساس تمام ادراک امروزی ما از عالم است. به بیان دقیق‌تر، مکانیک کوانتومی مجموعه‌ای از قوانین، روابط ریاضی و مفاهیم ریاضی است که توصیف کننده‌ی رفتار ذرات تشکیل دهنده‌ی عالم است. البته با تعمیم همین روابط و قوانین، می‌توان رفتار تمام سیستم‌های فیزیکی که پیش از آن بررسی شده بودند را نیز بررسی و تعیین کرد. مکانیک کلاسیک در مورد اجسام بسیارریز (اندازه‌اتمی) یا بسیار سریع (نزدیک به سرعت نور) یک تئوری ناقص است اما کاربرد آن برای انجام کارهای روزمره که بسیار بزرگتر از اتم و خیلی آهسته‌تر از سرعت نور است بسیار عالی می‌باشد.

مکانیک کوانتومی در ابتدای ظهورش بیشتر از آنکه به یک نظریه‌ی انقلابی شباهت داشته باشد به نوعی توجیه برای پاره‌ای بدیهیات تجربی شباهت داشت که با فیزیک کلاسیک قابل بیان نبود. همچنین مکانیک کوانتومی در مورد بوجود آمدن قوانین فیزیکی اطلاعاتی نمی‌دهد، اما یک چارچوب از مفاهیم ریاضی برای پیشرفت آن قوانین فراهم می‌کند[9,5].

۱-۲- اصول[1] موضوعه‌ی مکانیک کوانتومی

این اصول یک ارتباط فیزیکی بین دنیای فیزیکی و فرمول‌های ریاضی مکانیک کوانتومی بیان می‌کند که به شرح زیر است:

۱-۲-۱- فضای حالت[2]

برای هر سیستم فیزیکی یک فضای برداری مختلط با حاصلضرب داخلی وجود دارد که فضای حالت سیستم یا فضای هیلبرت ($|\psi\rangle$) می‌نامیم که شامل تمام اطلاعاتی است که ما می‌توانیم درباره آن سیستم بدست آوریم.

۱-۲-۲- تحول دینامیکی[3]

برای اینکه ببینیم یک حالت $|\psi\rangle$ در یک سیستم کوانتومی چطور با زمان تغییر می‌کند باید به ۲ اصل زیر توجه کنیم:

۱-تحول یک سیستم کوانتومی بسته، توسط تبدیل یکانی توصیف می‌شود. حالت $|\psi\rangle$ یک سیستم در زمان t_1 به حالت $|\acute{\psi}\rangle$ در زمان t_2 توسط عملگر یکانی U مربوط می‌شود که فقط به زمان t_1 و t_2 وابسته است:

$$|\acute{\psi}\rangle = U|\psi\rangle \tag{۱ − ۱}$$

۲-تحول زمانی یک سیستم بسته توسط معادله شرودینگر بیان می‌شود:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = H\,|\psi\rangle \tag{۲ − ۱}$$

---

[1] Axiom
[2] State Space
[3] Dynamic Evolution

که در عبارت فوق H هامیلتونی سیستم نامیده می‌شود. تحول زمانی یک سیستم کوانتومی، یکانی است که توسط معادله شرودینگر بیان می‌شود. ارتباط بین دینامیک هامیلتونی (اصل ۲) و عملگر یکانی (اصل ۱) به صورت زیر است:

با حل معادله‌ی شرودینگر داریم:

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right]|\psi(t_1)\rangle = U(t_1, t_2)|\psi(t_1)\rangle \qquad (۳-۱)$$

که در آن:

$$U(t_1, t_2) = \exp\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right] \qquad (۴-۱)$$

بنابراین هرعملگر یکانی U به فرم $U = \exp[ik]$، برای هر عملگر هرمیتی k شناسایی می‌شود.

۱-۲-۳- اندازه‌گیری کوانتومی[۴]:

اندازه‌گیری کوانتومی توسط یک مجموعه‌ی عملگر اندازه‌گیر $\{M_m\}$ توصیف می‌شود که این عملگرها روی فضای حالت سیستم مورد اندازه‌گیری عمل می‌کنند. اندیس m نتیجه‌ی اندازه‌گیری رخداده در آزمایش را نشان می‌دهد. اگر حالت سیستم دقیقاً قبل از اندازه‌گیری $|\psi\rangle$ باشد، احتمال اینکه نتیجه m بدست آید برابر است با :

$$p_m = \langle\psi|M_m^{\dagger}M_m|\psi\rangle \qquad (۵-۱)$$

و حالت سیستم بعد ازاندازه‌گیری برابر است با:

$$\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^{\dagger}M_m|\psi\rangle}} \qquad (۶-۱)$$

عملگرهای اندازه‌گیر رابطه‌ی کامل بودن[۵] را برآورده می‌کنند.

---

[4] Quantum Measurement
[5] Completeness Equation

$$\sum_m M_m{}^{\dagger} M_m = 1 \qquad (۷-۱)$$

این رابطه بیانگر این واقعیت است که مجموع احتمالات برابر ۱ است.

$$1 = \sum_m p\,(m) = \sum_m \langle\psi|M_m{}^{\dagger} M_m|\psi\rangle \qquad (۸-۱)$$

۱-۳- ماتریس چگالی:

فضای هیلبرت یک سیستم دوگانه‌ی A و B، $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ است که در آن از پایه‌های متعامد $|i\rangle_A (|i_B\rangle)$ برای ۲ سیستم A(B) استفاده می‌کنیم.

برای ساده‌سازی، $i_A \rightarrow i$ و $i_B \rightarrow \mu$ در نظر می‌گیریم. حالت کلی سیستم به این صورت است:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i,\mu} \alpha_{i,\mu}\, |i \otimes \mu\rangle \qquad (۹-۱)$$

که در آن M یک خاصیت فیزیکی سیستم A است:

$$|M\varphi\rangle = \sum_{i,\mu} \alpha_{i,\mu}\, |M_i \otimes \mu\rangle \qquad (۱۰-۱)$$

در نتیجه مقدار انتظاری M به صورت زیر محاسبه می‌شود:

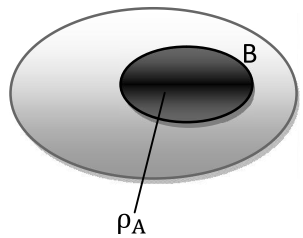
$$\langle\varphi\,|M\varphi\rangle = \sum_{i,\mu}\sum_{j,\nu} \alpha_{i,\nu}\, \alpha_{i,\mu} \langle j \otimes \nu|\, M_i \otimes \mu\rangle = \sum_{i,j}\sum_{\mu} \alpha_{i,\mu}\, \alpha_{j,\mu} \langle j|\, M_i\rangle = \sum_{j,i} \rho_{ji}\, \langle j|\, M_i\rangle$$

$$\rightarrow \sum_{i,j} \rho_{ji}\, M_{ij} \;=\; \mathrm{Tr}\;(M\rho), \qquad (۱۱-۱)$$

که$\mathrm{Tr}\,(A)$ که به عنوان رد $\sum_i A_{ij}$ روی عملگر A است، به معنی مجموع عناصر قطری‌اش می‌باشد.

در معادله‌ی $(1-11)$ از این رابطه استفاده می‌کنیم ← $\langle j\otimes\nu|\, M_i\otimes\mu\rangle = \delta_{\nu\mu}\langle j|\, M_i\rangle$، چون در فضای هیلبرت H_{AB}، M همان $M\otimes I_B$ است. معادله $(1-11)$ اپراتور حالت ρ را نمایش می‌دهد که به صورت زیر است:

$$\rho_{ji} = \sum_{\mu} \alpha_{i,\mu}\alpha_{j,\mu} \qquad (1-12)$$



شکل ۱-۱- یک سیستم با یک بردار حالت توصیف می‌شود ولی اجزای آن با ماتریس چگالی مشخص خواهند شد.

عملگر حالت سیستم A، عملگر حالت کاهش یافته نامیده می‌شود که ρ_A است. سیستم A به طور کلی نمی‌تواند توسط یک بردار حالت توصیف شود اما می‌تواند توسط ماتریس چگالی توصیف شود که دربردارنده تمام اطلاعاتی است که می‌توان از سیستم کوانتومی بدست آورد. این عملگر حالت دارای خواص زیر است:[2 ,6]

۱- هرمیتی است ($\rho = \rho^\dagger$)

۲- مثبت است ($\rho \geq 0$)

۳- $\mathrm{Tr}\rho = 1$

که در آن $\mathrm{Tr}\rho$ به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{Tr}\rho = \sum_i \rho_{ii} = \sum_i \sum_\mu |\alpha_{i\mu}|^2 = \left|\left|\varphi\right|^2\right| = 1 \qquad (۱۳-۱)$$

۱-۳-۱- حالتهای خالص[۶] و آمیخته‌ی[۷] ماتریس چگالی

در موردی که سیستم با یک بردار حالت توصیف شود، سیستم در حالت خالص است، در غیر این صورت، حالت آمیخته گفته می‌شود. اگر حالت سیستم یک حالت خالص مانند $|\psi\rangle_A$ باشد، در این صورت ماتریس چگالی آن به صورت $\rho_A = |\psi\rangle_{A\,A}\langle\psi|$ نمایش داده می‌شود که این ماتریس چگالی دارای خاصیت $\rho^2 = \rho$ می‌باشد.[6]

یک ماتریس چگالی در حالت عمومی به صورتی که قطری باشد به شکل زیر است:

$$\rho_A = \sum_a P_a\, |\psi_a\rangle\langle\psi_a|, \qquad (۱۴-۱)$$

که در آن:

$$\begin{cases} 0 < P_a < 1 \\ \sum_a P_a = 1 \end{cases} \qquad (۱۵-۱)$$

اگر حالت کوانتومی آمیخته باشد، دو یا چند جمله در این عبارت (۱ – ۱۴) وجود دارد پس $\rho^2 \neq \rho$ ، در این حالت داریم:

$$\mathrm{Tr}\ \rho^2 = \sum_a P_a^2 < \sum_a P_a = 1 \qquad (۱۶-۱)$$

---

[6] Pure
[7] Mix

۱-۴- کیوبیت

بیت به عنوان یک مفهوم بنیادی در محاسبات و نظریه‌ی اطلاعات کلاسیکی شناخته شده است. واحد اصلی محاسبات و اطلاعات کوانتومی، بیت کوانتومی یا به طور اختصار، کیوبیت می‌باشد. معادل یک حالت کوانتومی، $|\psi\rangle$ است. کیوبیت‌ها را می‌توان توسط سیستم‌های ریاضی با ویژگیهای خاص خود، مورد بررسی قرار داد. کیوبیت‌ها مانند بیت‌ها در دنیای واقعی توسط سیستم‌های فیزیکی پیاده‌سازی می‌شوند. مقادیر بیت کلاسیکی ۰ یا ۱ است. تفاوت بین کیوبیت و بیت در این است که یک بیت در یک زمان واحد، می‌تواند فقط ۰ یا فقط ۱ باشد، اما کیوبیت می‌تواند $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ و یا یک برهم‌نهش از $|0\rangle$ و $|1\rangle$ باشد. در حالت کلی یک کیوبیت، یک کت حالت در فضای هیلبرت ۲ بعدی است که با عبارت کلی زیر توصیف می‌شود:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad (۱۷-۱)$$

$|0\rangle$ و $|1\rangle$ پایه‌های متعامد برای این فضای ۲ بعدی و α وβ اعداد مختلط دلخواه هستند. ما با اندازه‌گیری بیت می‌توانیم بفهمیم در کدام حالت ۰ یا ۱ قراردارد اما با اندازه‌گیری کیوبیت نمی‌توانیم حالت آن را تعیین کنیم فقط می‌توانیم بگوییم نتیجه‌ی حاصل با احتمال $|\alpha|^2$ در حالت $|0\rangle$ و با احتمال $|\beta|^2$ در حالت $|1\rangle$ قرار دارد. با توجه به بقای احتمال، تنها شرط موجود روی ضرایب α و β به این صورت می‌باشد:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad (۱۸-۱)$$

فرض کنید $|\psi\rangle$ و $|\Phi\rangle$ بردارهایی در یک فضای برداری مختلط ۲ بعدی با پایه‌های متعامد $\{|1\rangle و|0\rangle\}$ باشند، حاصلضرب تانسوری $|\psi\rangle \otimes |\Phi\rangle$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(|0\rangle\otimes|0\rangle, |0\rangle\otimes|1\rangle, |1\rangle\otimes|0\rangle, |1\rangle\otimes|1\rangle), \qquad (۱۹-۱)$$

عبارت فوق را می‌توان به فرم ساده‌تر زیر درآورد:

$$(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle). \qquad (۲۰-۱)$$

این ثبات[8] کوانتومی ۲ کیوبیتی با فضای هیلبرت ۴ بعدی می‌باشد که می‌توان به صورت یک‌جا در یک سیستم به صورت زیر درآورد:

$$a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|10\rangle + a_3|11\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad (۲۱-۱)$$

که در آن:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۲-۱)$$

هر اندازه‌گیری که روی کیوبیت‌ها انجام گیرد به یکی از ۴ حالت ممکن i با احتمال $|a_i|^2$ منجر می‌شود که در آن a_iها اعداد مختلط با شرط $\sum_i |a_i|^2 =$ ۱ هستند. در حالت کلی می‌توان گفت فضای هیلبرت یک سیستم n کیوبیتی، 2^n بعدی است.[7,11]

۱-۵- در هم‌تنیدگی

دو سیستم مربوط به فضای هیلبرت $H_A \otimes H_B$ را در نظر بگیرید. اگر سیستم در حالت اول به فرم $|\psi\rangle_A$ و در حالت دوم به فرم $|\psi\rangle_B$ باشد دراین حالت، سیستم بصورت زیر در می‌آید:

$|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$

[8] Register