بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۸۱ /۲/ ۲۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

تأثیر جایگشت‌پذیری و زیرضربی بودن طیف عملگرها روی تحویل‌پذیری نیمگروهها

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

علیرضا جباری

استاد راهنما

دکتر محمدتقی جهاندیده

۱۳۷۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی آقای علیرضا جباری

تحت عنــوان

تأثیر جایگشت‌پذیری و زیرضربی بودن طیف عملگرها روی تحویل‌پذیری نیمگروهها

در تاریخ ۷۹/۷/۲۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محمدتقی جهاندیده
۲ ـ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر قدسیه وکیلی
۳ ـ استاد داور ۱	دکتر بهرام خانی‌رباط
۴ ـ استاد داور ۲	دکتر حمیدرضا ظهوری‌زنگنه

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

دکتر امیر نادری

قدردانی

سپاس و ستایش خدای را که لطف و رحمت خویش بر من افزود تا به یاری اساتید به حلقه اهل تحقیق درآیم و این دوره از تحصیل را به پایان برم.

در مدت تحصیل همواره از اساتید بهره فراوان برده‌ام که از همه این عزیزان به ویژه **دکتر محمدتقی جهاندیده** به عنوان استاد راهنما، کمال تشکر را دارم. همچنین از جناب دکتر بهرام خانی‌رباط و سرکار خانم دکتر قدسیه وکیلی سپاسگزارم که با راهنماییهای مفیدشان موجب کاهش اشتباهات در انجام پایان‌نامه شدند.

در نهایت از همه دوستان و کارمندان دانشکده ریاضی که در دوران تحصیل مرا یاری نموده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،
ابتکارات ونو آوریهای ناشی از تحقیق موضوع
این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان
است.

تقدیم به:

مادر و خواهرم

که بدون یاری و بردباری ایشان توانایی انجام پایان‌نامه را نداشتم.

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید S یک نیمگروه از عملگرهای روی فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ باشد. گوییم S تحویل‌پذیر است هرگاه یک زیرفضای بستهٔ نابدیهی از $\mathcal{H}$ موجود باشد به‌طوری که تحت هر عضو S پایا باشد. همچنین گوییم نیمگروه S مثلث‌پذیر است اگر یک زنجیر ماکسیمال $\mathcal{C}$ از زیر فضاهای $\mathcal{H}$ چنان موجود باشد که هر عضو $\mathcal{C}$ تحت همهٔ اعضای S پایا باشد. در این پایان نامه به بررسی تأثیر شرایط طیفی روی تحویل‌پذیری و مثلث‌پذیری نیمگروهها می پردازیم. همان‌گونه که گروه عملگرهای یکانی نشان می‌دهد، جایگشت‌پذیری و زیرضربی بودن شعاع طیفی تحویل‌پذیری را ایجاب نمی‌کند اما جایگشت‌پذیری طیف تحویل‌پذیری را نتیجه می‌دهد. برای بررسی بیشتر چند شرط اضافی دیگر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و سرانجام نشان می‌دهیم اگر S یک جبر (نه فقط یک نیمگروه) از عملگرهای فشرده باشد آنگاه جایگشت‌پذیری و زیرضربی بودن طیف و شعاع طیفی با مثلث‌پذیری هم‌ارز هستند.

فصل اول

مقدمه

در سالهای اخیر مساله وجود زیرفضاهای پایای نابدیهی یک عملگر روی یک فضای باناخ از جمله مسائلی است که ذهن بسیاری از پژوهشگران را به خود مشغول کرده است. قضیه لمونسف (قضیه ۲ـ۱ـ۲۳) مفهومی تازه به نام تحویل‌پذیری یک مجموعه از عملگرهای روی یک فضای باناخ را القا می‌کند. این مفهوم یک تعمیم از مساله وجود زیرفضای پایای نابدیهی است، یعنی یافتن زیرفضای نابدیهی که برای هر عضو یک مجموعه از عملگرها پایا باشد.

در حالت بعد متناهی به یک مجموعه از عملگرها مثلث‌پذیر گوییم هرگاه بطور همزمان نسبت به یک پایه دارای نمایش ماتریس مثلثی باشند، می‌توان مفهوم مثلث‌پذیری را برای عملگرهای روی فضاهای با بعد نامتناهی تعمیم داد. در حالت بعد نامتناهی با استفاده از زنجیر زیرفضاهای پایا، مثلث‌پذیری یک مجموعه از عملگرها تعریف می‌شود که معادل با تعریف مثلث‌پذیری در حالت بعد متناهی است.

نتایج بسیاری در رابطه با مثلث‌پذیری و تحویل‌پذیری نیمگروه عملگرها بدست آمده است. در این رساله به بررسی تأثیر شرایط طیفی روی مثلث‌پذیری و تحویل‌پذیری یک نیمگروه از عملگرها می‌پردازیم. نتایج و قضایایی که در اینجا آورده‌ایم همگی از منابع معتبری هستند که در کتابنامه نام مرجع آنها بیان شده است. به غیر از اثبات چند قضیه و لمهای موجود، تمام اثبات قضایا از مقالاتی است که در جای خود در باره آنها توضیح داده شده است.

در فصل دوم نتایج مقدماتی از نظریه طیفی عملگرها، حسابان تابعی، کلاس شاتن از عملگرها و ضرب تانسوری ماتریسها را در بخشهای مجزا بیان کرده‌ایم که برای دنبال کردن بحث اصلی دانستن این پیشنیازها ضروری است. در پایان فصل دوم به اثبات قضیه‌ای (قضیه ۲_۴_۱۳) می‌پردازیم که ویژگی مهمی از ماتریسهای یکانی را نشان می‌دهد. فصل سوم به عملگرهای فشرده و زنجیر زیرفضاهای پایا اختصاص دارد. در این فصل که از بخشهای مختلف تشکیل شده است، عملگرهای تک‌سلولی را معرفی می‌کنیم و ویژگی مهمی از طیف عملگرهای فشرده (پیوستگی طیف و شعاع طیفی) را نشان می‌دهیم. در پایان این فصل چند قضیه مشهور در رابطه با مثلث‌پذیری و تحویل‌پذیری بیان می‌کنیم که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل چهارم یک شرط لازم برای تحویل‌ناپذیری یک گروه از ماتریسها ارائه می‌دهیم سپس با فرض زیر ضربی بودن طیف یا شعاع طیفی روی یک نیمگروه از عملگرها به بررسی مثلث‌پذیری و تحویل‌پذیری آن نیمگروه می‌پردازیم. یکی دیگر از شرایط طیفی که در این رساله تأثیر آن روی مثلث‌پذیری و تحویل‌پذیری یک نیمگروه از عملگرها مشاهده می‌شود، شرط جایگشت‌پذیری طیف روی یک نیمگروه است. در فصل پنجم از جایگشت‌پذیر بودن طیف یا شعاع طیفی روی یک نیمگروه از عملگرها همراه با شرایط اضافی دیگر، مثلث‌پذیری و تحویل‌پذیری آن نیمگروه را نتیجه می‌گیریم. سرانجام قضیه مهمی برای یک جبر از عملگرهای فشرده بیان و اثبات می‌کنیم که رابطه بین شرایط طیفی و مثلث‌پذیری در این جبر را نشان می‌دهد.

فصل دوم

پیشنیازها

در سراسر این رساله میدان مورد بحث، میدان اعداد مختلط $(\mathbb{C})$ است. همه عملگرها خطی و کراندارند و همه زیرفضاها بسته می‌باشند، وقتی ابهام محتملی رخ ندهد غالباً عملگرها را با ماتریسشان (نسبت به پایه معین) نمایش می‌دهیم. مجموعه همه تبدیلات خطی و کراندار از فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ به فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{K}$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ نشان می‌دهیم. منظور از فضای $\mathcal{H}$ و $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ بترتیب فضای هیلبرت مختلط و مجموعه همه تبدیلات خطی کراندار روی فضای $\mathcal{H}$ است. یادآوری می‌کنیم که تبدیلات خطی کراندار روی فضاهای نرم‌دار پیوسته هستند. قضایایی که در این فصل در مورد عملگرها آورده می‌شوند همگی نتایج مقدماتی هستند که از [۱ و ۲و ۳] اقتباس شده و برای استفاده در بحث‌های بعدی معرفی می‌شوند.

۲ـ۱ عملگرهای روی فضای هیلبرت و نظریه طیفی مقدماتی

تعریف ۲ـ۱ـ۱. فرض کنید X و Y فضای باناخ باشند و U گوی یکه باز در X باشد. یک عملگر T از فضای X به فضای Y را فشرده گوییم اگر بستار $T(U)$ در Y فشرده باشد.

از تعریف بالا آشکار می‌شود که T فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در X دارای یک زیردنباله $\{x_{n_i}\}$ باشد که دنباله $\{Tx_{n_i}\}$ به یک نقطه در Y همگرا شود.

تعریف ۲ـ۱ـ۲ . یک عملگر T روی فضای $\mathcal{H}$ از رتبه متناهی است اگر برد T دارای بعد متناهی باشد. برد T را با $rangT$ نشان می‌دهیم.

یادآوری . اگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ آنگاه به عملگر یکتا B در $\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ که برای هر h در $\mathcal{H}$ و k در $\mathcal{K}$

$$< Ah, k >=< h, Bk >$$

الحاق A گوییم و بصورت $B = A^*$ نشان می‌دهیم.

نرم یک عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ که با $||T||$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$||T|| = \sup\{||Tx|| : x \in \mathcal{H}, ||x|| \leq ۱\}$$

گزاره ۲ـ۱ـ۳ . (۱) مجموعه عملگرهای فشرده از فضای $\mathcal{H}$ به فضای $\mathcal{K}$ یک فضای خطی (فضای برداری) است. (۲) اگر $T_n, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ و برای $n \geq ۱$ ، T_n فشرده باشد و $||T_n - T|| \to ۰$ آنگاه T فشرده است. (۳) اگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ، $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ و $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ فشرده باشد آنگاه TA و BT نیز فشرده هستند.

قضیه ۲ـ۱ـ۴ . فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(۱) T فشرده است.

(۲) T^* فشرده است.

(۳) یک دنباله $\{T_n\}$ از عملگرهای با رتبه متناهی چنان وجود دارد که $||T - T_n|| \to ۰$.

تعریف ۲ـ۱ـ۵ . گوئیم $\lambda \in \mathbf{C}$ یک مقدارویژه T است اگر $T - \lambda I$ یک‌به‌یک نباشد. طیف یک عملگر T را با $\sigma(T)$ نشان می‌دهیم و آن مجموعه همه λ های مختلط است که $T-\lambda I$ وارون‌پذیر نباشد.

قضیه ۲ـ۱ـ۶ . فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ آنگاه $\sigma(T)$ زیرمجموعه ناتهی و فشرده از اعداد مختلط است.

تعریف ۲ـ۱ـ۷ . شعاع طیفی عملگر T را با $r(T)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

که بنابر قضیه قبل $r(T)$ عدد حقیقی نامنفی است.

قضیه ۲ـ۱ـ۸ . فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ آنگاه

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} ||T^n||^{\frac{1}{n}}.$$

تعریف ۲ـ۱ـ۹ . عملگر T را پوچ‌توان گوییم هرگاه عدد طبیعی n چنان موجود باشد که $T^n = 0$. عملگر T را شبه‌پوچ‌توان گوییم هرگاه $\sigma(T) = \{0\}$ که این هم‌ارز است با $r(T) = 0$. با توجه به تعریف آشکار است که اگر T پوچ‌توان باشد، شبه‌پوچ‌توان نیز است.

قضیه ۲ـ۱ـ۱۰. (ریس[1]) اگر X یک فضای باناخ نامتناهی البعد و T یک عملگر فشرده روی X باشد آنگاه تنها یکی از گزاره‌های زیر درست است.

(۱) $\sigma(T) = \{0\}$.

(۲) $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ که برای $1 \leq k \leq n$ ، $\lambda_k \neq 0$ و هر λ_k یک مقدار ویژه T است.

(۳) $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ که برای هر $k \geq 1$، λ_k یک مقدار ویژه T است، $\lim \lambda_k = 0$ و $dim\ ker(T - \lambda_k I) < \infty$.

برهان قضیه بعد را می‌توانید در [۳قضیه ۲۳.۱۱] ببینید.

---

[1] F.Riesz

قضیه ۲ـ۱ـ۱۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ باشد $x \in A$ ، $y \in A$ بطوریکه $xy = yx$. آنگاه

$$\sigma(x+y) \subseteq \sigma(x)+\sigma(y) \qquad , \qquad \sigma(xy) \subseteq \sigma(x)\sigma(y)\cdot$$

قضیه بعد را می‌توان از قضیه بالا نتیجه گرفت در اینجا برهان دیگری ارائه می‌کنیم.

قضیه ۲ـ۱ـ۱۲ . فرض کنید A یک جبر باناخ باشد $x \in A$ ، $y \in A$ بطوریکه $xy = yx$. آنگاه

$$r(x+y) \leq r(x)+r(y) \qquad , \qquad r(xy) \leq r(x)r(y)\cdot$$

برهان . برای هر $n \geq ۱$ ، $(xy)^n = x^n y^n$ با استفاده از قضیه ۲ـ۱ـ۸ نتیجه می‌شود که

$$r(xy) = \lim_{n\to\infty} ||(xy)^n||^{\frac{۱}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{\frac{۱}{n}} \lim_{n\to\infty} ||y^n||^{\frac{۱}{n}} = r(x)\cdot r(y)$$

فرض کنید $r(x) < \alpha$ ، $r(y) < \beta$ و $a = \frac{x}{\alpha}$ ، $b = \frac{y}{\beta}$. در این صورت $r(a) < ۱$ و $r(b) < ۱$.
پس عدد طبیعی N چنان وجود دارد که برای $n \geq N$ نامساوی $max(||a^{۲^n}||, ||b^{۲^n}||) < ۱$ برقرار است.
تعریف می‌کنیم

$$\gamma_n = \max_{۰\leq k\leq ۲^n} ||a^k|| \cdot ||b^{۲^n-k}||$$

حال داریم

$$\begin{aligned}
||(x+y)^{۲^n}||^{\frac{۱}{۲^n}} &= ||\sum_{k=۰}^{۲^n} \binom{۲^n}{k} x^k y^{۲^n-k}||^{\frac{۱}{۲^n}} \\
&\leq \left[\sum_{k=۰}^{۲^n} \binom{۲^n}{k} \alpha^k \beta^{۲^n-k} ||a^k|| \cdot ||b^{۲^n-k}||\right]^{\frac{۱}{۲^n}} \\
&\leq (\alpha+\beta)\gamma_n^{\frac{۱}{۲^n}}
\end{aligned}$$

از طرفی دنباله $\{\gamma_n\}$ برای $n \geq N$ نزولی است زیرا

$$\begin{aligned}\max_{0\le k\le 2^{n+1}} \|a^k\|\cdot\|b^{2^{n+1}-k}\| &= \max\Big(\max_{0\le k\le 2^n} \|a^k\|\cdot\|b^{2^{n+1}-k}\|, \max_{2^n\le k\le 2^{n+1}} \|a^k\|\cdot\|b^{2^{n+1}-k}\|\Big)\\ &\le \gamma_n \max(\|a^{2^n}\|, \|b^{2^n}\|)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}r(x+y)=\lim_{n\to\infty}\|(x+y)^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} &\le (\alpha+\beta)\lim_{n\to\infty}\sup\gamma_n^{\frac{1}{2^n}} \le\\ &\le (\alpha+\beta)\lim_{n\to\infty}\sup\gamma_N^{\frac{1}{2^n}}=\alpha+\beta\end{aligned}$$

که چون $r(x)<\alpha$ و $r(y)<\beta$ بطور دلخواه انتخاب شده‌اند برهان کامل می‌شود. □

قضیه ۲_۱_۱۳. اگر $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ آنگاه برای هر عدد طبیعی n، $r(T^n)=r(T)^n$.

برهان . یادآوری می‌کنیم که $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ جبر باناخ است. فرض کنید λ یک عضو از $\sigma(T)$ باشد (قضیه ۲_۱_۶) که $|\lambda|=r(T)$. چون $\lambda\in\sigma(T)$ پس $\lambda^n\in\sigma(T^n)$ (زیرا اگر λ^m-T^m وارون‌پذیر باشد آنگاه $\lambda-T$ نیز وارون‌پذیر است) در نتیجه

$$r(T)^n=|\lambda|^n\le r(T^n).$$

از طرفی بنا بر قضیه ۲_۱_۱۲ $r(T^n)\le r(T)^n$ که حکم را بدست می‌دهد. □

تعریف ۲_۱_۱۴. فرض کنید T یک عملگر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. گوییم T یک انقباض است هر گاه $\|T\|\le 1$. گوییم عملگر T متشابه با یک انقباض است هرگاه عملگر وارون‌پذیر P چنان موجود باشد که PTP^{-1} یک انقباض باشد. هر گاه $\|T\|<1$ گوییم T اکیداً یک انقباض است.