دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله :

برای دریافت درجه دکتری در رشته ریاضی محض شاخه جبر

عنوان :

قاعده انشعاب بوسیله کلاسهای تقارن تانسوری

استاد راهنما :

دکتر محمد شهریاری

استاد مشاور :

دکتر محمد علی جعفریزاده

پژوهشگر :

حسن رفاقت

آبان ۱۳۸۹

نام خانوادگی : رفاقت خواجه **نام :** حسن

عنوان : قاعده انشعاب بوسیله کلاسهای تقارن تانسوری

استاد راهنما : دکتر محمد شهریاری **استاد مشاور :** دکتر محمد علی جعفری زاده

مقطع تحصیلی : دکتری **رشته :** ریاضی محض **گرایش :** جبر **دانشگاه :** تبریز

دانشکده : علوم ریاضی **تاریخ فارغ التحصیلی :** ۱۳۸۹/۸/۱۸ **تعداد صفحه :** ۱۱۶

کلید واژه ها : جبر لی، نمایش، وزن، وزن تسلطی، چندبارگی، مدول، مؤسسس تحویل ناپذیر، کلاس تقارن تانسوری و قاعده انشعاب

چکیده :

فرض کنید $V = \mathbb{C}^n$ و $\pi \vdash m$. کلاس تقارن تانسوری $V_{\chi_\pi}(S_m)$ بعنوان یک $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ - مدول بصورت زیر تجزیه می شود :

$$V_{\chi_\pi}(S_m) = V(\mu_\pi)^{\chi_\pi(1)}$$

در این رساله ما ابتدا جبر لی $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$ را بوسیله نشاننده $i : \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ با ضابطه $i(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ بعنوان زیرجبری از $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ در نظر گرفته و سپس $V_{\chi_\pi}(S_m)$ را بعنوان یک $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$ - مدول مطالعه و مؤسسهای تحویل ناپذیر آن را بدست می آوریم. نشان می دهیم

$$V_{\chi_\pi}(S_m) = \oplus_{i=1}^{k} V(\gamma_i)^{n_i}$$

که در آن نحوه محاسبه γ_i ها و n_i ها بطور مفصل شرح داده خواهد شد. حال با توجه به نتایج فوق قاعده انشعاب $A_n \to C_2$ را بدست می آوریم. در حالت خاص برای قاعده انشعاب $A_3 \to C_2$ فرمول صریحتری محاسبه کرده و با استفاده از آن قاعده انشعاب $A_3 \to C_2$ را برای نمایشهای با ابعاد بزرگ محاسبه می کنیم. در بین این مطالب، ما نتایج بسیار جالبی در مورد مقادیر تابع افراز کستانت، اعداد کستکا و الگوهای گلفند - زتلین بدست می آوریم.

فهرست

مقدمه

قاعده انشعاب یکی از مسائل مهم در نظریه نمایش جبرها و گروهها می باشد. قاعده انشعاب عبارت است از تشریح تحدید یک نمایش تحویل ناپذیر به یک زیر جبر یا یک زیرگروه. بعبارت دقیقتر فرض کنید φ یک نمایش از یک جبر مانند $\mathfrak{U}$ و $\mathfrak{U}'$ یک زیر جبر از $\mathfrak{U}$ باشد. بطور طبیعی می توان نمایش φ را به $\mathfrak{U}'$ تحدید کرد که نمایش حاصل معمولاً یک نمایش تحویل پذیر خواهد بود. حال اگر این نمایش تحویل پذیر از $\mathfrak{U}'$ را بتوانیم به نمایشهای تحویل ناپذیر از $\mathfrak{U}'$ تجزیه کنیم آنگاه اعدادی که بعنوان ضرایب (چند بارگی) نمایشهای تحویل ناپذیر در این تجزیه ظاهر می شوند همان قاعده انشعاب مورد نظر خواهد بود. اولین قاعده انشعابی که بدست آمد مربوط به قاعده انشعاب نمایشهای گروه متقارن S_m می باشد. بعد از آن محققان شروع به تحقیق در مورد قاعده انشعاب برای گروههای متناهی، گروههای لی و جبرهای لی کردند. در قرن گذشته مقالات و کتابهای متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است که برای مطالعه بیشتر می توانید به منابع [۲۳] و [۱۱] مراجعه کنید. روشهای متعددی برای بدست آوردن قواعد انشعاب وجود دارد که این روشها معمولاً روشهای دشوار و وقت گیری هستند. در این رساله ما یک روش جدید برای بدست آوردن قاعده انشعاب $A_n \to C_۲$ ارائه می دهیم که اساس این روش کلاسهای تقارن تانسوری می باشد. با استفاده از این روش قاعده انشعاب $A_۳ \to C_۲$ را براحتی برای ابعاد بسیار بزرگ بدست خواهیم آورد. شروع کار ما از یک نتیجه ساده و مهم درباره کلاس تقارن تانسوری است که در [۱۲] اثبات شده است. این نتیجه نشان می دهد که اگر $V = \mathbb{C}^n$ و $\pi \vdash m$ آنگاه

$$V_{\chi_\pi}(S_m) = V(\mu_\pi)^{\chi_\pi(۱)}$$

در اینجا ما $V_{\chi_\pi}(S_m)$ را بعنوان یک $\mathfrak{sp}_۴(\mathbb{C})$ – مدول تجزیه و نتایج مورد نظر را بدست خواهیم آورد که این کار باعث می شود نتایج جالب دیگری را نیز بدست آوریم.

این رساله در چهار فصل تنظیم گردیده است. در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز درباره جبرهای لی، کلاسهای تقارن تانسوری و قاعده انشعاب مطرح شده است. در فصل دوم پس از معرفی جبرهای لی نوع A_n و

C_n، نمایشهای $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$ بررسی شده است. در ادامه این فصل، یک ساختار مدول جبر لی برای کلاس تقارن تانسوری مطرح شده و این فضا بعنوان یک $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ – مدول مورد مطالعه قرار گرفته است. در فصل سوم مؤسسهای تحویل ناپذیر $V^{\otimes m}$ و $V_{\chi\pi}(S_m)$ بعنوان یک $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$ – مدول بدست آمده و قاعده انشعاب $A_3 \to C_2$ محاسبه شده است. در فصل چهارم الگوریتمهای مربوط به چگونگی تجزیه فضای $V^{\otimes m}$ و $A_n \to C_2$ و قاعده انشعاب $A_3 \to C_2$ مطرح و یک برنامه کامپیوتری برای آن نوشته شده است. سپس مثالها و جداول بسیار مهم و جالبی با استفاده از این برنامه کامپیوتری محاسبه و ارائه گردیده و در بخش پایانی این فصل الگوهای گلفند – زتلین مطرح شده است. در بخش ضمیمه نحوه محاسبه اعداد کستکا در برخی حالات ارائه شده و فرمولهای صریحی برای آن بدست آمده است.

فصل اول

مباحث مقدماتی

در این فصل، هدف ما ارائه تعاریف، قضایا و مقدمات لازم برای مطالعه این پایاننامه می باشد. این فصل از سه بخش جبر لی، کلاسهای تقارن تانسوری و قاعده انشعاب تشکیل شده است. برای درک بهتر مطالب این فصل لازم است که خواننده یک اطلاعات اولیه در مورد جبرهای لی و جبرهای چند خطی داشته باشد. بدین منظور مراجعه به منابع اشاره شده در هر بخش مفید خواهد بود.

۱ – ۱) جبر لی

فرض کنید L یک جبر لی نیمساده روی میدان $\mathbb{C}$ و H یک زیر جبر تورال ماکزیمال از L باشد . چون H آبلی است لذا L بصورت جمع مستقیم زیر فضاهای

$$L_\alpha = \{ x \in L : [h, x] = \alpha(h)x , \forall h \in H \}$$

خواهد بود که در آن $\alpha \in H^*$. اگر $\alpha \neq \circ$ و $L_\alpha \neq \circ$ آنگاه L_α را فضای ریشه و α را یک ریشه از L نسبت به زیر جبر تورال ماکزیمال H می نامند.

مجموعه ریشه های L را با Φ نشان می دهیم. بنابراین

$$\Phi = \left\{ \alpha \in H^* : \alpha \neq \circ \ , \ L_\alpha \neq \circ \right\}.$$

داریم $L_0 = H$، لذا می توانیم بنویسیم

$$L = H \oplus \sum\nolimits^{\cdot}_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

تجزیه فوق را تجزیه کارتان L یا تجزیه L به فضاهای ریشه می نامند.

فرض کنید κ فرم کلینگ روی L باشد. چون تحدید κ به H ناتبهگون است لذا به ازای هر $\alpha \in H^*$ عنصر منحصربفرد $t_\alpha \in H$ موجود است بطوریکه به ازای هر $h \in H$، $\alpha(h) = \kappa(t_\alpha , h)$. بنابراین تحت این شرایط یک تناظر یک به یک بین مجموعه Φ و زیرمجموعه $\{ t_\alpha \mid \alpha \in \Phi \}$ از H برقرار خواهد بود.

۱ – ۱ – ۱) **گزاره** : الف) Φ یک مجموعه مولد برای H^* است.

ب) اگر $\alpha \in \Phi$ آنگاه $-\alpha \in \Phi$.

ج) اگر $\alpha \in \Phi$ و $x \in L_\alpha$ و $y \in L_{-\alpha}$ آنگاه $[x\,,y] = \kappa(\,x, y\,)\,t_\alpha$، لذا $[\,L_\alpha\,,\,L_{-\alpha}]$ فضای یک بعدی با پایه t_α خواهد بود.

د) اگر $\alpha \in \Phi$ آنگاه $\alpha(\,t_\alpha\,) = \kappa(\,t_\alpha\,, t_\alpha\,)$.

ه) اگر $\alpha \in \Phi$ و x_α یک عنصر غیر صفر از L_α باشد آنگاه عنصر $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ موجود است بطوریکه زیرفضای تولید شده توسط x_α و y_α و $h_\alpha = [x_\alpha\,, y_\alpha]$ یک زیر جبر ساده سه بعدی خواهد بود که با $\mathfrak{sl}_۲(\,\mathbb{C}\,)$ یکریخت می باشد.

و) $h_\alpha = \frac{۲\,t_\alpha}{\kappa(\,t_\alpha, t_\alpha\,)}$ و $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

اثبات : (بخش ۸ – ۳ از [۸]).

حال فرم دو خطی (,) را روی H^* بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$(\,\lambda\,, \gamma\,) = \kappa\big(\,t_\lambda\,, t_\gamma\,\big) \qquad ; \quad \lambda\,, \gamma \in H^*$$

قرار دهید

$$\langle\,\lambda\,, \gamma\,\rangle = \frac{۲(\,\lambda\,, \gamma\,)}{(\,\gamma\,, \gamma\,)}$$

واضح است که $\langle\;,\;\rangle$ نسبت به مؤلفه اول خطی است، همچنین

$$\begin{aligned}\langle\,\lambda\,, \gamma\,\rangle &= \frac{۲(\,\lambda\,, \gamma\,)}{(\,\gamma\,, \gamma\,)}\\ &= \frac{۲\kappa(\,t_\lambda\,, t_\gamma\,)}{\kappa(\,t_\gamma\,, t_\gamma\,)}\end{aligned}$$

$$= \kappa(t_\lambda \ , \ \frac{۲t_\gamma}{\kappa(t_\gamma , t_\gamma)})$$

$$= \kappa(t_\lambda , h_\gamma)$$

$$= \lambda(h_\gamma)$$

چون Φ، H^* را تولید می کند بنابراین می توانیم پایه ای مانند $\{ \alpha_۱ , \alpha_۲ , \ldots , \alpha_l \}$ برای H^* از مجموعه Φ انتخاب کنیم. حال تمام عناصر H^* بویژه عناصر Φ را می توان بصورت یک ترکیب خطی منحصربفرد از عناصر پایه نوشت. اگر $\beta \in \Phi$ دلخواه باشد آنگاه $\beta = \sum_{i=۱}^{l} c_i \alpha_i$ که در آن $c_i \in \mathbb{C}$. نشان می دهیم ضرایب c_i گویا هستند. داریم

$$\beta(h_{\alpha_j}) = \langle \beta , \alpha_j \rangle = \sum_{i=۱}^{l} \langle \alpha_i , \alpha_j \rangle c_i = \sum_{i=۱}^{l} \alpha_i(h_{\alpha_j}) c_i \qquad ; \quad ۱ \le j \le l$$

بنابراین ما یک دستگاه l معادله l مجهولی با مجهولات c_i داریم که در آن همه ضرایب اعداد صحیح هستند. می دانیم که تحدید κ به H ناتبهگون است پس فرم دو خطی $(\ , \ )$ روی H^* ناتبهگون خواهد بود و چون $\{ \alpha_۱ , \alpha_۲ , \ldots , \alpha_l \}$ یک پایه برای H^* می باشد، لذا ماتریس $\left((\alpha_i , \alpha_j) \right)_{۱\le i,j \le l}$ و به تبع آن ماتریس $\left(\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle \right)_{۱\le i,j \le l}$ معکوس پذیر خواهد بود. چون درایه های ماتریس $\left(\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle \right)_{۱\le i,j \le l}$ اعداد صحیح هستند پس درایه های ماتریس معکوس آن اعداد گویا خواهند بود و لذا با حل دستگاه فوق نتیجه می گیریم :

$$c_i \in \mathbb{Q} \qquad ; \qquad ۱ \le i \le l$$

بنابراین هر عضو $\beta \in \Phi$ بصورت $\mathbb{Q}$ - ترکیب خطی منحصربفرد از اعضای پایه نوشته می شود. فرض کنید E فضای برداری حقیقی تولید شده توسط اعضای Φ باشد. یعنی

$$\mathrm{E} = \langle \alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$$

در اینصورت $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{E} = \dim_{\mathbb{C}} H^*$. همچنین

$$
\begin{aligned}
(\lambda,\gamma) &= \kappa(t_\lambda , t_\gamma) \\
&= \sum_{\alpha\in\Phi} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\gamma) \\
&= \sum_{\alpha\in\Phi} (\alpha,\lambda)(\alpha,\gamma) \qquad ; \qquad \lambda,\gamma\in H^*
\end{aligned}
$$

بنابراین به ازای هر $\circ \neq \lambda \in \mathrm{E}$ داریم

$$
(\lambda,\lambda) = \sum_{\alpha\in\Phi} (\alpha,\lambda)^{۲} > \circ
$$

پس فرم دو خطی $(\ ,\ )$ در E معین مثبت است در نتیجه E یک فضای اقلیدسی خواهد بود. فضای E را فضای اقلیدسی متناظر با L، H و Φ می نامیم.

۱ – ۱ – ۲) گزاره : فرض کنید L یک جبر لی نیمساده، H یک زیرجبر کارتان از L، Φ مجموعه ریشه های L نسبت به H و E فضای اقلیدسی متناظر با L، H و Φ باشد. در اینصورت

الف) Φ فضای اقلیدسی E را تولید می کند.

ب) اگر $\alpha \in \Phi$ آنگاه $-\alpha \in \Phi$ و هیچ مضرب دیگری از α ریشه نیست.

ج) اگر $\alpha , \beta \in \Phi$ آنگاه $\beta - \langle \beta , \alpha \rangle \alpha \in \Phi$.

د) اگر $\alpha , \beta \in \Phi$ آنگاه $\langle \beta , \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

اثبات : (بخش ۸ – ۵ از [۸]).

۱ – ۱ – ۳) تعریف : زیرمجموعه متناهی Φ از فضای اقلیدسی E را یک سیستم ریشه در E می نامند هرگاه

الف) Φ فضای اقلیدسی E را تولید کند و $\circ \notin \Phi$.

ب) اگر $\alpha \in \Phi$ آنگاه تنها مضارب α در Φ، $\pm\alpha$ باشند.

ج) اگر $\alpha , \beta \in \Phi$ آنگاه $\beta - \langle \beta , \alpha \rangle \alpha \in \Phi$.

د) اگر $\alpha , \beta \in \Phi$ آنگاه $\langle \beta , \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

با توجه به تعریف و گزاره فوق نتیجه می گیریم که اگر L یک جبر لی نیمساده، H یک زیرجبر کارتان از L، Φ مجموعه ریشه های L نسبت به H و E فضای اقلیدسی متناظر با L، H و Φ باشد آنگاه Φ یک سیستم ریشه در E خواهد بود که آن را سیستم ریشه L نسبت به زیرجبر کارتان H می نامند.

۱ – ۱ – ٤) **تعریف** : فرض کنید Φ سیستم ریشه جبر لی نیمساده L نسبت به زیرجبر کارتان H باشد . به ازای هر $\alpha \in \Phi$، انعکاس σ_α از $\mathrm{End}\,(\,\mathrm{E}\,)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta , \alpha \rangle \alpha \qquad ; \qquad \beta \in \mathrm{E}$$

۱ – ۱ – ٥) **قضیه** : با نمادهای فوق داریم

الف) به ازای هر $\alpha \in \Phi$، انعکاس σ_α مجموعه $P_\alpha = \{ \beta \in \mathrm{E} \mid (\beta , \alpha) = 0 \}$ را ثابت نگه می دارد.

ب) $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

ج) σ_α معکوس پذیر است و $\sigma_\alpha{}^{۲} = ۱$ وبرای هر $\beta \in \mathrm{E}$، $(\sigma_\alpha(\beta) , \sigma_\alpha(\alpha)) = (\beta , \alpha)$.

د) $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

اثبات : (فصل سوم از [۸]).

۱ – ۱ – ٦) **تعریف** : زیرگروه $\mathcal{W}$ از گروه خطی عام $GL\,(\,\mathrm{E}\,)$، تولید شده توسط مجموعه $\{ \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi \}$ را گروه وایل Φ می نامند.

چون Φ متناهی است و هر انعکاس، Φ را ثابت نگه می دارد لذا گروه وایل $\mathcal{W}$ را می توان با زیر گروهی از گروه متقارن $S_{|\Phi|}$ یکسان در نظر گرفت. در نتیجه $\mathcal{W}$ متناهی خواهد بود.

۱ – ۱ – ۷) **تعریف** : زیر مجموعه Π از Φ را یک پایه از Φ می نامند هرگاه

الف) Π یک پایه فضای برداری E باشد.

ب) هر $\beta \in \Phi$ بصورت منحصربفرد $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \, \alpha$ نوشته شود که در آن k_α ها اعداد صحیحی هستند که همه آنها نامنفی یا همه آنها نامثبت می باشند.

اگر k_α ها نامنفی باشند β را ریشه مثبت و اگر k_α ها نامثبت باشند β را ریشه منفی می نامند. همچنین Π را مجموعه ریشه های ساده Φ نیز می نامند.

فرض کنید Φ یک سیستم ریشه در E و Π یک پایه از آن باشد. به ازای هر $\alpha \in \Phi$ قرار دهید $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$. در اینصورت $\Phi^\vee = \{ \alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi \}$ نیز یک سیستم ریشه در E خواهد بود که آن را دوگان Φ می نامند. در واقع با نمادهای فوق، هر $\alpha \in \Phi$ متناظر با عنصر t_α از H می باشد درحالیکه هر $\alpha^\vee$ متناظر با h_α خواهد بود. فرض کنید $\Pi = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_l \}$ و $h_{\alpha_1} , h_{\alpha_2} , \dots , h_{\alpha_l}$ عناصر متناظر $\alpha_i^\vee$ ها در H باشند. به ازای هر $1 \le i \le l$ فرض کنید که $\lambda_i \in H^*$ بصورت زیر تعریف شده باشد

$$\lambda_i(h_{\alpha_j}) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

در اینصورت مجموعه $\{ \lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_l \}$ را مجموعه وزنهای بنیادی L می نامند که یک پایه برای H^* خواهد بود. قراردهید

$$\Lambda = \{ \sum_{i=1}^{l} n_i \, \lambda_i \; : \; n_i \in \mathbb{Z} \; \}$$

در اینصورت Λ یک زیر گروه آبلی آزاد از H^* با پایه وزنهای بنیادی خواهد بود که آن را شبکه وزنهای صحیح و یا بطور خلاصه شبکه وزنها می نامند.

واضح است که عنصر $\lambda \in H^*$ عضو Λ است اگر و تنها اگر به ازای هر $1 \le i \le l$ داشته باشیم $\lambda (h_{\alpha_i}) \in \mathbb{Z}$.

قرار دهید

$$\Lambda^{+} = \{ \sum_{i=1}^{l} n_i \lambda_i \quad : \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad , \quad n_i \geq 0 \}$$

در اینصورت هر عضو Λ^{+} را یک وزن صحیح تسلطی می نامیم.

۱ – ۱ – ۸) **نتیجه** : $\lambda \in H^{*}$ یک وزن صحیح تسلطی است اگر و تنها اگر λ بصورت یک ترکیب خطی از ریشه های ساده با ضرایب صحیح نامنفی باشد.

۱ – ۱ – ۹) **تعریف** : روی Λ یک ترتیب جزئی $\preccurlyeq$ بصورت زیر تعریف می کنیم

$\lambda \preccurlyeq \mu$ اگر و تنها اگر $\lambda - \mu$ صفر و یا مجموعی از ریشه های مثبت باشد.

۱ – ۱ – ۱۰) **لم** : فرض کنید $\lambda \in \Lambda^{+}$. در اینصورت مجموعه $\{ \mu \in \Lambda^{+} \mid \mu \preccurlyeq \lambda \}$ متناهی است.

اثبات : (بخش ۱۳ – ۲ از [۸]).

۱ – ۱ – ۱۱) **تعریف** : فرض کنید L یک جبر لی و V یک فضای برداری باشد. در اینصورت V همراه با عمل دوتائی $(x, v) \mapsto xv$ یک L – مدول نامیده می شود هرگاه شرایط زیر به ازای هر $x, y \in \mathrm{L}$ و $v, w \in \mathrm{V}$ و $a, b \in \mathbb{C}$ برقرار باشد

الف) $(ax + by)v = a(xv) + b(yv)$

ب) $x(av + bw) = a(xv) + b(xw)$

ج) $[x, y]v = xyv - yxv$.

بعنوان مثال اگر $\varphi : \mathrm{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ یک نمایش از L باشد آنگاه V با عمل $xv = \varphi(x)(v)$ یک L – مدول خواهد بود و برعکس هر L – مدول V یک نمایش $\varphi : \mathrm{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ تعریف می کند.

نگاشت خطی $\psi : \mathrm{V} \rightarrow W$ را یک همریختی L – مدول گوئیم هرگاه $\psi(xv) = x\psi(v)$.

۱ – ۱ – ۱۲) **تعریف** : فرض کنید V یک L – مدول باشد. زیر فضای U از V را یک L – زیرمدول از V گوئیم هرگاه به ازای هر $x \in L$ و $u \in U$ داشته باشیم $x\,u \in U$.

۱ – ۱ – ۱۳) **تعریف** : L – مدول V را تحویل ناپذیر گوئیم هرگاه V زیرمدول محض نداشته باشد یعنی تنها زیر مدولهای V ، $\{0\}$ و V باشند. وآنرا تحویل پذیر گوئیم هرگاه تحویل ناپذیرنباشد. همچنین V را یک مدول کاملاً تحویل پذیر گوئیم هرگاه V بصورت جمع مستقیم زیر مدولهای تحویل ناپذیرش نوشته شود.

۱ – ۱ – ۱٤) **قضیه (وایل)** : فرض کنید L یک جبر لی نیمساده باشد. در اینصورت هر L – مدول با بعد متناهی کاملاً تحویل پذیر خواهد بود.

اثبات : (بخش ۳ – ٦ از [۸]).

در ادامه این بخش L را یک جبر لی نیمساده با زیر جبر تورال ماکزیمال H و سیستم ریشه Φ و پایه Π و گروه وایل $\mathcal{W}$ در نظر بگیرید.

فرض کنید V یک L – مدول با بعد متناهی باشد. آنگاه بنا به لم کارتان

$$V = \dot{\sum_{\lambda \in H^*}} V_\lambda$$

که در آن

$$V_\lambda = \{\, v \in V \mid hv = \lambda(h)v \ , \forall h \in H \,\}.$$

اگر $V_\lambda \neq 0$ آنگاه λ را یک وزن از V و V_λ را فضای وزن متناظر با λ می نامیم.

۱ – ۱ – ۱۵) **لم** : فرض کنید V یک L – مدول دلخواه باشد. در اینصورت

الف) L_α فضای V_λ را به $V_{\lambda+\alpha}$ می نگارد ($\lambda \in H^*$ و $\alpha \in \Phi$).

ب) حاصل جمع $V' = \sum_{\lambda \in H^*} V_\lambda$ مستقیم است و V' یک L – زیرمدول از V می باشد.

ج) اگر V از بعد متناهی باشد آنگاه $V = V'$.

اثبات : (بخش ۱ – ۲۰ از [۸]).

۱ – ۱ – ۱۶) تعریف : فرض کنید V یک L – مدول باشد. بردار غیر صفر v^+ از V_λ را یک بردار ماکزیمال از وزن λ گوئیم هرگاه v^+ توسط همه L_α ها ($\alpha \in \Pi$) پوچ شود یعنی به ازای هر $\alpha \in \Pi$ و هر $x \in \mathrm{L}_\alpha$ داشته باشیم $x\, v^+ = ۰$.

۱ – ۱ – ۱۷) قضیه : اگر $\lambda \in H^*$ آنگاه همواره یک L – مدول دوری استاندارد تحویل ناپذیر با بلندترین وزن λ موجود است که آنرا با نماد $V(\lambda)$ نشان می دهیم.

اثبات : (بخش ۳ – ۲۰ از [۸]).

۱ – ۱ – ۱۸) قضیه : اگر $\lambda \in H^*$ یک وزن صحیح تسلطی باشد آنگاه L – مدول تحویل ناپذیر $V(\lambda)$ با بعد متناهی خواهد بود.

اثبات : (بخش ۲ – ۲۱ از [۸]).

۱ – ۱ – ۱۹) تعریف : فرض کنید $\Phi^+ = \{\beta_۱ , \beta_۲ , \dots , \beta_N\}$ مجموعه ریشه های مثبت L باشد. تابع افراز کستانت را با نماد $\mathfrak{P}$ نشان داده و به ازای هر وزن λ بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\mathfrak{P}(\lambda) = \left| \left\{ (r_۱ , r_۲ , \dots , r_N) : \lambda = \sum_{i=۱}^{N} r_i\, \beta_i \quad , \quad r_i \in \mathbb{Z} \;\; , \;\; r_i \geq ۰ \right\} \right|$$

یعنی $\mathfrak{P}(\lambda)$ برابر است با تعداد روشهایی که بتوان λ را بصورت یک ترکیب خطی از ریشه های مثبت با ضرایب صحیح نامنفی نوشت.

۱ – ۱ – ۲۰) قضیه (فرمول چندبارگی کستانت[۱]) : فرض کنید $\lambda \in \Lambda^+$ و $\mu \in \Lambda$ آنگاه

---

[۱] Kostant's multiplicity formula

$$\dim V(\lambda)_\mu = \sum_{\omega \in W} \varepsilon(\omega)\mathfrak{P}(\omega(\lambda+\rho) - (\mu+\rho))$$

که در آن $\varepsilon(\omega)$ عبارت است از علامت ω و ρ برابر است با مجموع وزنهای بنیادی L.

اثبات : (قضیه ۱۲ – ۱۸ از [۲]).

قضیه زیر یکی از قضیه های بسیار مهم این بخش می باشد. با استفاده از این قضیه می توانیم بعد مدولهای بنیادی را محاسبه کنیم.

۱ – ۱ – ۲۱) قضیه : فرض کنید L یک جبر لی ساده و $\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_l$ وزنهای بنیادی L و $R_۱, R_۲, \ldots, R_l$ ریشه های ساده آن باشد. اگر $\lambda = \sum_{i=۱}^{l} m_i \lambda_i$ یک وزن صحیح تسلطی باشد آنگاه

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha$$

که در آن $\alpha = \sum_{i=۱}^{l} k_i R_i$ و

$$d_\alpha = \frac{\sum_i (m_i + ۱) k_i \mathrm{w}_i}{\sum_i k_i \mathrm{w}_i}$$

در اینجا اعداد صحیح w_i وزنهای R_i نامیده و بدین صورت تعریف می شوند

$$\langle R_i, R_i \rangle = \mathrm{w}_i \langle R_{i_0}, R_{i_0} \rangle$$

که در آن R_{i_0} یک ریشه ساده کوتاه می باشد. بنابراین به ازای هر i خواهیم داشت

$$\mathrm{w}_i \in \{۱, ۲, ۳\}$$

اثبات : (قضیه ۱۳ – ۱ از [۲]).

۱ – ۲) کلاسهای تقارن تانسوری

قبل از شروع بحث کلاسهای تقارن تانسوری چند مفهوم را معرفی می کنیم که در ادامه بسیار مفید خواهند بود.

۱ – ۲ – ۱) تعریف : دنباله $\pi = [\ \pi_{۱}\ ,\ \pi_{۲}\ , \dots ,\ \pi_{k}\ ]$ از اعداد صحیح را یک افراز از عدد m می نامند و می نویسند $\pi \vdash m$، هرگاه $\pi_{۱}\ \geq\ \pi_{۲}\ \geq \cdots \geq\ \pi_{k} \geq\ ۰$ و

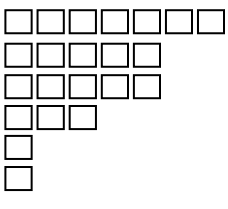
$$m = \sum_{i=۱}^{k} \pi_i$$

در اینصورت π_i ها را اجزاء افراز π و k را طول افراز π می نامند و آن را با $L(\pi)$ نشان می دهند. اگر در افراز π عدد π_i، r مرتبه تکرار شده باشد آنگاه بجای نوشتن π_i r مرتبه π_i می نویسیم $\pi_i{}^r$.

۱ – ۲ – ۲) مثال : افرازهای عدد ٦ عبارتند از $[\ ٦\ ]$ و $[\ ٥,١\ ]$ و $[\ ٤,٢\ ]$ و $[\ ٤,١^{٢}\ ]$ و $[\ ٣^{٢}\ ]$ و $[\ ٣,٢,١\ ]$ و $[\ ٣,١^{٣}\ ]$ و $[\ ٢^{٣}\ ]$ و $[\ ٢^{٢},١^{٢}\ ]$ و $[\ ٢,١^{٤}\ ]$ و $[\ ١^{٦}\ ]$.

به هر افراز $\pi = [\ \pi_{۱}\ ,\ \pi_{۲}\ , \dots ,\ \pi_{k}\ ]$ از m یک نمودار $F(\pi)$ بنام نمودار فررز متناظر می گردد که این نمودار شامل k سطر از خانه ها می باشد که تعداد خانه های سطر i ام برابر π_i می باشد.

بعنوان مثال نمودار فررز افراز $٢٢ \vdash [\ ٧,٥^{٢},٣,١^{٢}\ ]$ به شکل زیر خواهد بود



۱ – ۲ – ۳) تعریف : اگر $\pi \vdash m$، آنگاه مزدوج π افرازی است که آن را با π^* نشان می دهیم و جزء j ام این افراز برابر است با تعداد خانه ها در ستون j ام $F(\pi)$.

بعنوان مثال مزدوج افراز $[\ ٧,٥^{٢},٣,١^{٢}\ ]$ برابر $[\ ٦,٤^{٢},٣^{٢},١^{٢}\ ]$ می باشد.

بنا به تعریف واضح است که $F(\pi)$ ترانهاده $F(\pi^*)$ می باشد همچنین

$$L(\pi^*) = \pi_1 \quad \text{و} \quad L(\pi) = \pi_1^*$$

حال یک ترتیب کلی $\prec$ بنام ترتیب الفبائی و یک ترتیب $\trianglelefteq$ بنام ترتیب تسلطی روی افرازهای m بصورت زیر تعریف می کنیم.

۱ – ۲ – ٤) تعریف : فرض کنید $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k]$ و $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s]$ افرازهایی از m باشند. گوئیم λ کوچکتر از π است و می نویسیم $\lambda \prec \pi$ اگر و تنها اگر i ای وجود داشته باشد بطوریکه $\lambda_i < \pi_i$ و به ازای هر $j < i$ داشته باشیم :

$$\lambda_j = \pi_j$$

۱ – ۲ – ٥) تعریف : فرض کنید $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k]$ و $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s]$ افرازهایی از m باشند. گوئیم π بر λ تسلط دارد و می نویسیم $\lambda \trianglelefteq \pi$ اگر و تنها اگر

$$\forall\, 1 \le j \le k \;:\; \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \le \sum_{i=1}^{j} \pi_i$$

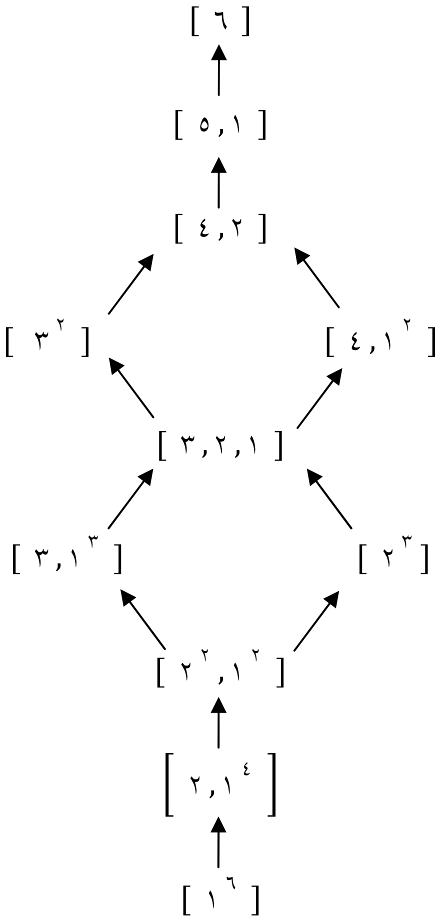
بدیهی است که اگر $\lambda \trianglelefteq \pi$ آنگاه $k \le s$.

۱ – ۲ – ٦) مثال : ترتیب الفبائی برای افرازهای عدد ٦ بصورت زیر خواهد بود :

$$[1^6] \prec [2,1^4] \prec [2^2,1^2] \prec [2^3] \prec [3,1^3] \prec [3,2,1]$$

$$\prec [3^2] \prec [4,1^2] \prec [4,2] \prec [5,1] \prec [6]$$

همچنین نمودار زیر ترتیب تسلطی را برای افرازهای عدد ٦ نشان می دهد.



۱ – ۲ – ۷) **گزاره** : اگر $\lambda, \pi \vdash m$ و $\lambda \trianglelefteq \pi$ آنگاه $\lambda \prec \pi$.

اثبات : (گزاره ۳ – ۲ از [۱٤]).

۱ – ۲ – ۸) **تعریف** : فرض کنید $\sigma \in S_m$ و $\pi = [\,\pi_1 , \pi_2 , \ldots , \pi_k\,] \vdash m$. گوئیم جایگشت σ دارای ساختار دوری π است هرگاه تجزیه σ به دورهای مجزا به شکل زیر باشد

$$\sigma = (\,a_{11} \ldots a_{1\pi_1}) \, (\,a_{21} \ldots a_{2\pi_2}) \ldots (\,a_{k1} \ldots a_{k\pi_k})$$

۱ – ۲ – ۹) **مثال** : جایگشت $\sigma = (2568)(13)(49)(7)$ دارای ساختار دوری $[\,4 , 2^{2} , 1\,]$ می باشد.

۱ – ۲ – ۱۰) **قضیه** : اگر $\pi = [\,1^{r_1} , 2^{r_2} , \ldots , m^{r_m}\,] \vdash m$، آنگاه تعداد جایگشتهای S_m با ساختار دوری π برابر است با