بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

کوهمولوژی موضعی بنا شده روی یک محمل غیربسته‌ی تعریف شده برای یک جفت ایده‌آل

تدوین

مجید راهرو زرگر

استاد راهنما

پروفسور حسین ذاکری

بهمن ۱۳۸۷

تقدیر و تشکر

علم دریایی است بی حد و کنار — طالب علم است غواص بحار

گر هزاران سال باشد عمر او — او نگردد سیر، خود، از جستجو

بر خود لازم می‌دانم که در این مجال، از استاد بزرگوار و ارجمندم جناب آقای دکتر حسین ذاکری که واقعاً مردی بزرگ و دلسوز هستند به خاطر راهنمایی ایشان برای تدوین این پایان‌نامه و تمام زحماتی که در این مدت برای بنده کشیده اند تقدیر و تشکر کنم و همچنین ازاساتید ارجمندم جناب آقای دکتر محمد تقی دیبایی، آقای دکترعبدالجواد طاهری زاده، آقای دکترعلیرضا جمالی، آقای دکترجواد لالی و آقای دکتر علی اکبر عالم زاده که در محضر ایشان تلمذ نموده‌ام کمال سپاس و قدردانی را دارم و امیدوارم همیشه موفق و مؤید باشند.

از جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری زاده و آقای دکتر صمد حاج جبّاری که قبول زحمت فرموده‌اند و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند تشکر می کنم. از خانم اسکندرزاده و خانم گلزاری(مسئولین آموزش دانشکده) و خانم رحیمی(مسؤل کتابخانه) و خانم صمدیان به خاطر زحمات بی‌دریغشان تشکر می‌کنم.

از دوستان گرامی‌ام آقایان علی جباری، حمیدرضا طاهری زاده، حمزه ابراهیمی، محمد فزونی، علی موسوی و مرتضی آقابابایی که در این چند سال همیشه نسبت به اینجانب لطف داشته‌اند و از آقایان دکتر حسن زاده و آقای آرش صادقی که در تدوین این پایان‌نامه بنده را مورد لطف قرار دادند صمیمانه تشکر می‌کنم و موفقیت‌شان را در تمام مراحل زندگی از خداوند منّان خواستارم.

در پایان از خانواده‌ی دلسوز و مهربانم که در تمام مراحل زندگی همیشه پشتیبان و همراهم بوده‌اند تشکر کرده و امیدوارم جوابگوی محبت‌هایشان باشم.

فهرست مطالب

چکیده

تعمیمی از مفهوم مدول کوهمولوژی موضعی را معرفی می‌کنیم و آن را مدول کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایده‌آل (I,J) می‌نامیم و ویژگیهای متعدد آن را مطالعه می‌کنیم. قضیه‌های صفر شدنی، صفر نشدنی و لیختن بام - هارتشورن را برای مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته بیان می‌کنیم. همچنین رابطه‌های آن را با مدول کوهمولوژی موضعی معمولی بررسی می‌کنیم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم

$$H^i_{I,J}(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in \tilde{W}(I,J)} H^i_{\mathfrak{a}}(M)$$

که $H^i_{I,J}(M)$، کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته‌ی مدول M است.

واژه‌های کلیدی: کوهمولوژی موضعی، کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته، همبافت چک، همبافت چک تعمیم یافته، دوگانی موضعی.

رده‌بندی موضوعی: ۱۳D۴۵

پیشگفتار

به عنوان یک ابزار توانمند در مطالعه‌ی حلقه‌های موضعی می‌توان به مدول کوهمولوژی موضعی اشاره کرد که خود موجب پیدایش یک شاخه از جبر همولوژی شده است. اصل و منشاء پیدایش این نمونه‌ی زیبای جبری را می‌توان در مباحثی از هندسه‌ی جبری و فیزیک یافت. تا سال ۱۹۶۷ که نوشته‌های گروتندیک [۱] و هارتشورن [۲] منتشر نشده بود تأثیرگذاری کوهمولوژی موضعی چندان شناخته شده نبود به عبارت دیگر گروتندیک و هارتشورن را می‌توان از اولین کسانی دانست که مفاهیم کوهمولوژی موضعی را از علم فیزیک به زبان جبر(هندسه‌ی جبری) به صورت مدرن درآورند. بالاخره در سال ۱۹۶۹ مدول‌های کوهمولوژی توسط شارپ [۳] از هندسه به جبر جابجایی برگردانده شد.

منبع اصلی این پایان نامه مقاله‌ی

Ryo Takahashi, Yuji Yoshino, Takeshi Yoshizawa ‘Local cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals’Journal of Pure and Applied Algebra 213(2009), 582-600.

است که شامل پنج فصل می‌باشد. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم اولیه جهت استفاده در فصل‌های بعدی است که شامل پنج بخش،(مقدماتی از جبر جابجایی)،(حد مستقیم، حد معکوس و کمال)، (رشته‌های منظم وحلقه‌های کوهن ـ مکالی [۴] و گرنشتاین [۵])،(مقدماتی از قضایای کوهمولوژی) و (جبر همولوژی پیشرفته و رشته طیفی) است.

در فصل دوم زیر مدول $(I,J)-$ تابی $\Gamma_{I,J}(M)$ از M را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $\Gamma_{I,J}$ یک تابعگون دقیق چپ است. $H^i_{I,J}$ را $i-$ امین کوهمولوژی موضعی نسبت به (I,J) می‌نامیم و آن را $i-$ امین تابعگون مشتق شده راست از تابعگون $\Gamma_{I,J}$ تعریف می‌کنیم. همچنین مجموعه‌ی $W(I,J)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$W(I,J)=\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R) \mid I^n\subseteq \mathfrak{p}+J \text{ که به طوری است موجود } n\in\mathbb{N}\}$$

[۱] Grothendieck

[۲] Hartshoren

[۳] Sharp

[۴] Cohen-Macaulay

[۵] Gorenstein

و ویژگیهای اساسی $H^i_{I,J}$ و $W(I,J)$ را که در فصل‌های بعد از آنها استفاده خواهیم کرد، بررسی می‌کنیم.

فصل سوم شامل دو بخش است. در بخش اول تعمیمی از مفهموم همبافت چک[۶] را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مدول کوهمولوژی موضعی نسبت به (I,J)، همولوژی همبافت تعمیم یافته‌ی چک است. در بخش دوم روابط بین $H^i_{I,J}$ و مدول کوهمولوژی موضعی معمولی را بررسی می‌کنیم. برای مثال نشان می‌دهیم $H^i_{I,J}(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\tilde{W}(I,J)} H^i_{\mathfrak{a}}(M)$.

در فصل چهارم که قسمت عمده‌ی این پایان نامه است در مورد صفر شدن و صفر نشدن $H^i_{I,J}$ بحث می‌کنیم و قضیه‌ی صفر شدنی گروتندیک و قضیه‌ی لیختن بام ـ هارتشورن[۷] را برای مدول کوهمولوژی موضعي $H^i_{I,J}$ تعمیم می‌دهیم. در حقیقت یکی از قضیه‌های اصلی این بخش بیان می‌کند که تساوی $\inf\{\ i \mid H^i_{I,J}(M) \neq 0\} = \inf\{\ \operatorname{depth}_R(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in W(I,J)\}$ برای هر $R-$ مدول متناهی مولد M برقرار است.

در فصل پنجم یک نوع تعمیم یافته‌ی قضیه‌ی دوگانی موضعی را برای حلقه‌ی کوهن ـ مکالی، کامل و موضعی بیان می‌کنیم. پیتر شنزل [۸] در مقاله‌ی

P. Schenzel. Explicit computations around the Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem,Manuscripta Math.78(1)(1993)57-68

مفهومی از مدول متعارفی K_M را بیان کرد و وجود تکریختی $H_I(M)^\vee \to K_M$ را اثبات کرد. ما در این فصل در قضیه‌ی (۱۷.۵) نشان می‌دهیم که تصویر این نگاشت دقیقاً $\Gamma_{\mathfrak{m},J}(K_M)$ است، که این قضیه‌ی انگیزه‌ی اصلی تعمیم مدول کوهمولوژی موضعی بوده است.

---

[۶] Cech Complex

[۷] Lichtenbaum-Hartshorne

[۸] P.Schenzel

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در سراسر این پایان نامه R نشان دهنده‌ی حلقه‌ای جابجایی و یکدار است و از فصل دوم R نوتری نیز خواهد بود. نمادهای $\mathrm{Spec}(R)$، $\max(R)$، $\mathrm{Min}(R)$ و $\mathrm{Min}(M)$ بترتیب نشان دهنده‌ی مجموعه ایده‌آل‌های اول، ایده‌آل‌های ماکسیمال و ایده‌آل‌های اول منیمال حلقه‌ی R و ایده‌آل‌های اول منیمال متعلق به محمل M هستند.

۱—۱ مقدماتی از جبرجابجایی

تعریف ۱.۱ . فرض کنید I یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \ , \ I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

را واریته‌ی I می‌نامیم.

تعریف ۲.۱ . فرض کنید M مدولی روی R باشد. در این صورت محمل M را با نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Supp}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}.$$

لم ۳.۱ . فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) $M = 0$.

۲) برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $M_{\mathfrak{p}} = 0$. یا به عبارت معادل $\mathrm{Supp}(M) = \emptyset$.

۳) برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، $M_{\mathfrak{m}} = 0$.

برهان. ر.ک. [۱۰, ۱۵.۹].

لم ۴.۱ . فرض کنید M مدولی متناهی مولد روی حلقه‌ی R باشد. در این صورت

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(R)} \mid \mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\mathrm{Ann}(M))$$

اگر M متناهی مولد نباشد، آنگاه $\mathrm{Supp}(M) \subset V(\mathrm{Ann}(M))$.

برهان. ر.ک. [۱۰, ۲۰.۹].

تعریف ۵.۱ . فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. در این صورت I را ایده‌آل اولیه‌ی R می‌نامیم هرگاه:

۱) I یک ایده‌آل سره از R باشد.

۲) به ازای هر $x, y \in R$ اگر $xy \in I$ و $x \notin I$، آنگاه $n \in \mathbb{N}$ ی وجود داشته باشد که $y^n \in I$.

لم ۶.۱ . فرض کنید $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R و $I_1, ..., I_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) به ازای j ی که $1 \leq j \leq n$، $I_j \subseteq \mathfrak{p}$.

۲) $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

۳) $\prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

برهان. ر.ک. [۱۰, ۵۵.۳].

قضیه ۷.۱ . قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول. فرض کنید $n \geq ۲$ و $\mathfrak{p}_۱, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند که حداکثر دو تا از آنها اول نباشد. فرض کنید S زیر گروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است.(مثلاً ممکن است ایده آل یا زیر حلقه‌ای از R باشد.) فرض کنید

$$S \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

در این صورت به ازای jای که $۱ \leq j \leq n$، $S \subseteq \mathfrak{p}_j$.

برهان. ر.ک. [۱۰, ۶۱.۳].

تعریف ۸.۱ . فرض کنید I یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت I را تجزیه پذیر می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}_i$– اولیه‌ای مانند $\mathfrak{q}_۱$، ....، $\mathfrak{q}_n$ موجود باشند که

$$I = \bigcap_{i=۱}^{n} \mathfrak{q}_\mathrm{i}.$$

این تجزیه را منیمال می‌نامیم هرگاه:

۱) برای هر $۱ \leq i < j \leq n$، $\mathfrak{p}_\mathrm{i} \neq \mathfrak{p}_\mathrm{j}$.

۲) برای هر $j = ۱, \ldots, n$، $\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_\mathrm{i} \not\subseteq \mathfrak{q}_\mathrm{j}$.

مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}_\mathrm{i}$ها را که مستقل از تجزیه هستند، با نماد $\operatorname{ass}_R(I)$ نشان می‌دهیم و آن را مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به I می‌نامیم.

لم ۹.۱ . فرض کنید I یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی نوتری R باشد. در این صورت I تجزیه پذیر است.

برهان. ر.ک. [۱۰, ۳۵.۴].

تعریف ۱۰.۱ . فرض کنید M یک مدول روی حلقه‌ی نوتری R باشد. در این صورت ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایدآل اول وابسته به M می‌نامیم، هرگاه $m \in M$ی موجود باشد به طوری که $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(m) = (۰ : m)$.

مجموعه‌ی این نوع ایده‌آل‌ها را با نماد $\operatorname{Ass}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۱.۱ . فرض کنید M مدولی متناهی مولد و ناصفر روی حلقه‌ی نوتری R باشد. در این صورت زنجیری صعودی هم چون

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq ... \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M.$$

از زیر مدول‌های M موجود است به طوری که برای هر $i = 1, ..., n$، ایده‌آل اولی مانند $\mathfrak{p}_i$ موجود است که $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$.

برهان. چون $M \neq 0$ پس $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$. حال فرض می‌کنیم $\mathfrak{p}_1 \in \text{Ass}(M)$. در نتیجه M دارای زیر مدولی مانند M_1 است که $M_1 \cong R/\mathfrak{p}$. حال اگر $M = M_1$ آنگاه حکم اثبات می‌شود. ولی اگر $M/M_1 \neq 0$، آنگاه $\text{Ass}(M/M_1) \neq \emptyset$. در نتیجه $\mathfrak{p}_2 \in \text{Ass}(M/M_1)$ و زیر مدولی مانند M_2/M_1 از M/M_1 موجود است به طوری که $M_2/M_1 \cong R/\mathfrak{p}_2$. حال اگر $M/M_2 = 0$، آنگاه حکم اثبات می‌شود. اگر $M/M_2 \neq 0$، آنگاه دوباره مشابه قبلی عمل می‌کنیم. اما چون حلقه‌ی R نوتری و M متناهی مولد است پس M بعنوان $R-$ مدول نوتری است. با ادامه‌ی روش بالا به تعداد متناهی بار، سرانجام زنجیر مذکور در لم بالا ساخته می‌شود. □

لم ۱۲.۱ . فرض کنید $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی‌ها باشد. در این صورت

$$\text{Ass}(L) \subseteq \text{Ass}(N) \subseteq \text{Ass}(L) \cup \text{Ass}(M).$$

برهان. ر.ک. [۸, ٦.۳].

قضیه ۱۳.۱ . فرض کنید M مدولی متناهی مولد روی حلقه‌ی نوتری R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

۱) $\text{Ass}(M)$، مجموعه‌ای متناهی است.

۲) $\text{Ass}(M) \subseteq \text{Supp}(M)$.

۳) $\operatorname{MinAss}(M)=\operatorname{MinSupp}(M)$.

برهان. ر.ک. [۸, ٦.۵].

لم ۱۴.۱ . فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی نوتری R و S یک زیر مجموعه‌ی بسته ضربی از R باشد. در این صورت

$$\operatorname{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)=\{\ S^{-1}\mathfrak{p}\mid \mathfrak{p}\cap S=\emptyset\ ,\ \mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}_R(M)\}.$$

برهان. ر.ک. [۱۰, ۳۸.۹].

لم ۱۵.۱ . فرض کنید M, N مدول‌های با تولید متناهی باشند. در این صورت

$$\operatorname{Supp}(M\otimes_R N)=\operatorname{Supp}(M)\cap\operatorname{Supp}(N).$$

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{p}\notin\operatorname{Supp}(M\otimes_R N)$. در این صورت $(M\otimes_R N)_\mathfrak{p}=0$. حال چون $M_\mathfrak{p}\otimes_{R_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}\cong(M\otimes_R N)_\mathfrak{p}$، پس $M_\mathfrak{p}\otimes_{R_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}=0$. حال چون M, N متناهی مولد هستند، لذا $M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}$ بعنوان $R_\mathfrak{p}-$ مدول متناهی مولد هستند. چون $R_\mathfrak{p}$ موضعی است، بنابراین $M_\mathfrak{p}=0$ یا $N_\mathfrak{p}=0$. بنابراین $\mathfrak{p}\notin\operatorname{Supp}(M)\cap\operatorname{Supp}(N)$. برعکس، فرض می‌کنیم $\mathfrak{p}\notin\operatorname{Supp}(M)\cap\operatorname{Supp}(N)$. در این صورت $M_\mathfrak{p}=0$ یا $N_\mathfrak{p}=0$. درنتیجه $(M\otimes_R N)_\mathfrak{p}=0$. پس $\mathfrak{p}\notin\operatorname{Supp}(M\otimes_R N)$. بنابراین اثبات تمام می‌شود. □

لم ۱٦.۱ . فرض کنید M مدولی متناهی مولد روی R و I ایده آلی از R باشد. در این صورت

$$\sqrt{\operatorname{Ann}_R(M/IM)}=\sqrt{I+\operatorname{Ann}_R(M)}.$$

برهان. اگر $M/IM=0$، آنگاه $\operatorname{Ann}_R(M/IM)=R$، چون M متناهی مولد است، پس بنابر لم ناکایاما $\operatorname{Ann}_R(M)+I=R$. پس چیزی برای اثبات نمی‌ماند. اگر $M/IM\neq 0$، آنگاه $\operatorname{Ann}_R(M/IM)$ یک ایده آل سره است. چون $V(I+\operatorname{Ann}_R(M))=V(I)\cap V(\operatorname{Ann}_R(M))$ و $\operatorname{Supp}(M)=V(\operatorname{Ann}_R(M))$، پس داریم:

$$V(I+\mathrm{Ann}_R(M))=V(I)\cap V(\mathrm{Ann}_R(M))=V(I)\cap \mathrm{Supp}(M)=\mathrm{Supp}(M/IM)$$

چون M/IM به عنوان $R-$ مدول متناهی مولد است، پس $\mathrm{Supp}(M/IM)=V(\mathrm{Ann}_R(M/IM))$. در نتیجه $V(\mathrm{Ann}_R(M/IM))=V(I+\mathrm{Ann}_R(M))$. بنابراین داریم:

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/IM)}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathrm{Ann}_R(M/IM))}\mathfrak{p}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in V(I+\mathrm{Ann}_R(M))}\mathfrak{p}=\sqrt{I+\mathrm{Ann}_R(M)}.$$

لذا $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/IM)}=\sqrt{I+\mathrm{Ann}_R(M)}$. $\square$

لم ۱۷.۱ . فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R و $\sqrt{I}$ متناهی مولد باشد. در این صورت $n\in\mathbb{N}$ ی وجود دارد که $(\sqrt{I})^n\subseteq I$.

برهان. ر.ک. [۱۰, ۲۱.۸].

لم ۱۸.۱ . اگر $0\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow L\longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی‌ها باشد، آنگاه:

$$\mathrm{Supp}(N)=\mathrm{Supp}(L)\cup\mathrm{Supp}(M).$$

برهان. ر.ک. [۱۰, ۱۹.۹].

تعریف ۱۹.۱ . فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی R باشد. $R-$ مدول N را توسیع اساسی از M می‌نامیم، هرگاه M یک زیر مدول از N باشد و برای هر زیر مدول ناصفر از N مانند K، $K\cap M\neq 0$. یک توسیع اساسی انژکتیو از M را یک پوشش انژکتیوی M می‌نامیم و آن را با نماد $E_R(M)$ نشان می‌دهیم.

لم ۲۰.۱ . فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی R و $E_R(M)$، یک پوشش انژکتیوی از M باشد. در این صورت

$$\mathrm{Ass}_R(E_R(M))=\mathrm{Ass}_R(M).$$

برهان. چون $M\subseteq E_R(M)$، پس $\mathrm{Ass}_R(M)\subseteq\mathrm{Ass}_R(E_R(M))$. حال فرض می‌کنیم $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(E_R(M))$. در این صورت $0\neq e\in E_R(M)$ وجود دارد که $\mathfrak{p}=(0:_R e)$. چون $E_R(M)$

توسیع اساسی M است و $0 \neq e \in E_R(M)$، پس $r \in R$ی موجود است که $0 \neq re \in M$. حال ادعا می‌کنیم $\mathfrak{p} = (0 :_R re)$. واضح است که $\mathfrak{p} = (0 :_R e) \subseteq (0 :_R re)$. فرض می‌کنیم $y \in (0 :_R re)$. در این صورت $yre = 0$. در نتیجه $yr \in \mathfrak{p}$. اما چون $re \neq 0$، لذا $r \notin \mathfrak{p}$. بنابراین $y \in \mathfrak{p}$. در نتیجه $\mathfrak{p} = (0 :_R re)$. چون $re \in M$، بنابراین $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. پس اثبات کامل می‌شود. □

تعریف ۲۱.۱ . فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت M را متلاشی نشدنی می‌نامیم هرگاه M ناصفر باشد و نتوان M را به صورت جمع مستقیمی از دو زیر مدول سره‌اش نوشت.

لم ۲۲.۱ . فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ایده‌آل‌هایی اول از R باشند. در این صورت

۱) $E(R/\mathfrak{p})$ یک $R-$ مدول متلاشی نشدنی است.

۲) برای هر $R-$ مدول انژکتیو و متلاشی نشدنی مانند N، ایده‌آل اول مانند $\mathfrak{Q}$ موجود است به طوری که $N = E(R/\mathfrak{Q})$.

برهان. ر.ک. [۸, ۱۸.۴].

قضیه ۲۳.۱ . فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. در این صورت

۱) هر $R-$ مدول انژکتیو، جمع مستقیمی از $R-$ مدول‌های انژکتیو و متلاشی نشدنی است.

۲) جمع مستقیم متلاشی نشدنی‌ها در (۱) یکتاست. یعنی اینکه اگر $M = \bigoplus M_i$ (M_i متلاشی نشدنی و انژکتیو هستند) و برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$، $M(\mathfrak{p})$ تعداد M_iهایی باشد که با $E(R/\mathfrak{p})$ یکریخت هستند تنها به M و $\mathfrak{p}$ وابسته است و مستقل از تجزیه‌ی M به $R-$ مدول‌های انژکتیو و متلاشی نشدنی است.

برهان. ر.ک. [۸, ۱۸.۵].

نتیجه ۲۴.۱ . فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و E یک $R-$ مدول انژکتیو باشد. در این صورت

$$E = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu(\mathfrak{p},M)}.$$

که $\mu(\mathfrak{p},M)$ تعداد مدول‌های متلاشی نشدنی است که با $E(R/\mathfrak{p})$ یکریخت هستند.

برهان. بنابر قسمت (۲) لم (۲۲.۱) و قسمت (۱) قضیه‌ی (۲۳.۱) بدست می آید. □

لم ۲۵.۱ . فرض کنید S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی و $\mathfrak{p}$ یک ایده آل اول از حلقه‌ی R است به طوری که $\mathfrak{p}\cap S=\emptyset$. در این صورت $E_R(R/\mathfrak{p})$، ساختار $S^{-1}R-$ مدولی دارد و بعنوان $S^{-1}R-$ مدول با $E_{S^{-1}R}(S^{-1}R/S^{-1}\mathfrak{p})$ یکریخت است.

برهان. ر.ک. [۱, ۱۰.۱.۱۲].

قضیه ۲۶.۱ . فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و M یک $R-$ مدولی متناهی مولد باشد. اگر $E^\bullet(M): 0\to E^0(M)\to E^1(M)\to\cdots$ یک تحلیل انژکتیو مینیمال برای M باشد، آنگاه

$$E^i(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}$$

که در آن $\mu_i(\mathfrak{p},M)=\dim_{k(\mathfrak{p})}\mathrm{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}),M_\mathfrak{p})$ و $k(\mathfrak{p})=R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

برهان. ر.ک. [۳, ۳.۲.۹].

قضیه ۲۷.۱ . فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و M یک $R-$ مدول باشد. اگر $E^\bullet(M)$ یک تحلیل انژکتیو مینیمال برای M باشد، آنگاه با علائم بکار گرفته شده در (۲۶.۱)،

۱) $S^{-1}(E^i_R(M))\cong E^i_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$. که در آن یکریختی $S^{-1}R-$ مدولی است.

۲) برای هر $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)$ با شرط $\mathfrak{p}\cap S=\emptyset$، $\mu_i(S^{-1}\mathfrak{p},S^{-1}M)=\mu_i(\mathfrak{p},M)$.

برهان. ر.ک. [۱, ۱۱.۱.۶].

گزاره ۲۸.۱ . فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد و $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)$. در این صورت

$$S^{-1}(E_R(R/\mathfrak{p}))\begin{cases} = 0 & \mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset \\ \cong E_{S^{-1}R}(S^{-1}R/S^{-1}\mathfrak{p}) & \mathfrak{p}\cap S=\emptyset \end{cases} \qquad (1)$$

۲) اگر E یک $R-$ مدول انژکتیو باشد، آنگاه $S^{-1}E$ یک $S^{-1}R-$ مدول و یک $R-$ مدول انژکتیو است.

برهان. ر.ک. [۱, ۱۰.۱.۱۳].

لم ۲۹.۱ . فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی R باشد که توسط ایده‌آل $\mathfrak{b}$ پوچ می‌شود یعنی $\mathfrak{b}M=0$. در این صورت $(0:_{E_R(M)}\mathfrak{b})\cong E_{R/\mathfrak{b}}(M)$، که در آن یکریختی به عنوان $R/\mathfrak{b}-$ مدولی است.

برهان. ر.ک. [۱, ۱۰.۱.۱۵].

تعریف ۳۰.۱ . فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی R و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت

۱) $\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} := \sup\{n\in\mathbb{N}_0 \mid$ زنجیری اکید از ایده‌آل‌های اول به طول n مختوم به $\mathfrak{p}$ موجود است $\}$

اگر سوپریمم فوق موجود نباشد بنابر قرارداد می‌نویسیم $\mathrm{ht}_R\mathfrak{p}=\infty$

۲) برای هر $R-$ مدول M، بعد کرول M را باعلامت $\dim_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\dim_R(M) := \sup\{n\in\mathbb{N}_0 \mid$ زنجیری اکید به طول n از عناصر محمل M موجود است $\}$

اگر سوپریمم فوق موجود نباشد بنابر قرارداد می‌نویسیم $\dim_R(M)=+\infty$

۳) برای حلقه‌ی R بعد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim(R) := \sup\{\mathrm{ht}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\}$$

۴) برای ایده‌آل سره‌ی I از حلقه‌ی R، ارتفاع I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}_R(I) := \inf\{\mathrm{ht}_R\mathfrak{p} \mid I\subseteq\mathfrak{p}, \mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\}$$

قضیه ۳۱.۱ . فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای نوتری و موضعی باشد. در این صورت

$$\dim R = \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \sqrt{(x_1,...,x_i)} = \mathfrak{m} \text{ وجود دارند که } x_1,...,x_i \in R \text{ عضوهایی چون }\}.$$

برهان. ر.ک. [۱۰, ۱۸.۱۵].

لم ۳۲.۱ . فرض کنید M مدولی متناهی مولد روی R باشد. در این صورت

$$\dim_R M = \dim(R/\mathrm{Ann}(M)).$$

برهان. فرض کنیم $\dim_R M = n$. در این صورت زنجیری مانند $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq ... \subsetneqq \mathfrak{p}_n$ موجود است که $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M)$. چون M متناهی مولد است، پس $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}(M))$. در نتیجه $\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathrm{Ann}(M)} \subsetneqq \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathrm{Ann}(M)} \subsetneqq ... \subsetneqq \frac{\mathfrak{p}_n}{\mathrm{Ann}(M)}$ یک زنجیر از ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی $R/\mathrm{Ann}(M)$ است. درنتیجه $\dim(R/\mathrm{Ann}(M)) \geq n$. به روش مشابه $\dim(R/\mathrm{Ann}(M)) \leq \dim M$. لذا حکم برقرار است. □

تعریف ۳۳.۱ . فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی با بعد d باشد. منظور از یک دستگاه پارامتری برای R عبارت است از یک مجموعه‌ی d عضوی که ایده‌آل $\mathfrak{m}-$ ابتدایی تولید می‌کنند.

قضیه ۳۴.۱ . فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی باشد و $a_1,...,a_t \in R$. در این صورت

$$\dim R - t \leq \dim R/(a_1,...,a_t) \leq \dim R.$$

بعلاوه $\dim R/(a_1,...,a_t) = \dim R - t$ اگر و تنها اگر a_1،...،a_t متمایز بوده و قسمتی از دستگاه پارامتری برای R باشد.

برهان. ر.ک. [۱۰, ۲۲.۱۵].

قضیه ۳۵.۱ .فرض کنید N یک $R-$ مدول و M یک $R-$ مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(N).$$

برهان. ر.ک. [۲, ۴.۱.۱۰].

۱—۲ حد مستقیم، حد معکوس و کمال

تعریف ۳۶.۱ . مجموعه مرتب جزئی Λ را جهت دار می‌نامیم هرگاه برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda$ عنصری مانند $\nu \in \Lambda$ موجود باشد به طوری که $\lambda \leq \nu$ و $\mu \leq \nu$.

تعریف ۳۷.۱ . **دستگاه مستقیم:** فرض کنید Λ مجموعه‌ای جهت دار باشد و برای هر $\lambda \in \Lambda$، M_λ یک $R-$ مدول باشد و همچنین برای هر $\mu \in \Lambda$ که $\lambda \leq \mu$، نگاشتی مانند $f_{\lambda\mu} : M_\lambda \to M_\mu$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند.

۱) $f_{\lambda\lambda} = \mathrm{Id}_M$.

۲) برای $\lambda \leq \mu \leq \nu$، $f_{\mu\nu} \circ f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}$.

آنگاه خانواده‌ی $\{M_\lambda ; f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ را یک دستگاه مستقیم می‌نامیم.

تعریف ۳۸.۱ . **حد مستقیم:** فرض کنید $\{M_\lambda ; f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ یک دستگاه مستقیم باشد. در این صورت مدول M_∞ را یک حد مستقیم این دستگاه می‌نامیم، اگر گزاره‌های زیر برقرار باشند.

۱) برای هر$\alpha \in \Lambda$ نگاشتی مانند $f_\alpha : M_\alpha \to M_\infty$ موجود باشد که برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ با شرط $\alpha \leq \beta$، داشته باشیم $f_\beta \circ f_{\alpha\beta} = f_\alpha$.

۲) برای هر $R-$ مدول Y و هر خانواده از نگاشت‌ها مانند $\{\psi_\alpha : M_\alpha \to Y\}$ صادق در شرط $\psi_\beta \circ \psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha$، برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ با شرط$\alpha \leq \beta$، نگاشتی یکتا مانند $\omega : M_\infty \to Y$ موجود باشد که برای هر $\alpha \in \Lambda$، داشته باشیم $\omega \circ f_\alpha = \psi_\alpha$.

حد مستقیم دستگاه مستقیم مانند $\{M_\lambda ; f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی‌ها را بانماد $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۹.۱ . حد مستقیم یک دستگاه مستقیم از مدول‌ها موجود و با تقریب یکریختی یکتاست.

برهان. ر.ک. [۹, ۲.۱۶].

قضیه ۴۰.۱ . حد مستقیم، یک تابعگون جمعی، همورد و دقیق از رسته‌ی دستگاه‌های مستقیم از مدول‌ها به رسته‌ی مدول‌ها است.

برهان. ر.ک. [۹, ۲.۱۸].

لم ۴۱.۱ . فرض کنید X یک $R-$ مدول و $A_1 \subset A_2 \subset ...$ زنجیر افزایشی از زیر مدول‌های X باشد. در این صورت

$$\varinjlim_i N_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i.$$

برهان. ر.ک. [۹, ۲.۳۱].

نتیجه ۴۲.۱ . برای هر $R-$ مدول راست B، تابعگون $B \otimes_R -$ حد مستقیم را حفظ می‌کند.

برهان. ر.ک. [۹, ۲.۲۰].

تعریف ۴۳.۱ . **دستگاه معکوس** : فرض کنید Λ مجموعه‌ای جهت دار باشد و برای هر $\lambda \in \Lambda$، M_λ یک $R-$ مدول باشد. همچنین برای هر $\mu \in \Lambda$ که $\lambda \le \mu$، یک $R-$ همریختی مانند $f_{\mu\lambda} : M_\mu \to M_\lambda$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند.

۱) $f_{\lambda\lambda} = \mathrm{Id}_M$.

۲) برای $\lambda \le \mu \le \nu$، $f_{\mu\lambda} \circ f_{\nu\mu} = f_{\nu\lambda}$.

در این صورت خانواده‌ی $\{M_\lambda; f_{\mu\lambda}\}_\Lambda$ را یک دستگاه معکوس می‌نامیم.

تعریف ۴۴.۱ . **حد معکوس:** فرض کنید $\{M_\lambda; f_{\mu\lambda}\}_\Lambda$ یک دستگاه معکوس باشد. در این صورت می‌گوییم M_∞ حد معکوس این دستگاه است اگر برای هر $\alpha \in \Lambda$، نگاشتی مانند $f_\alpha : M_\infty \to M_\alpha$ موجود باشد که برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ که $\alpha \le \beta$، $f_{\beta\alpha} \circ f_\beta = f_\alpha$. بعلاوه برای هر مجموعه Y و هر خانواده از نگاشتها مانند $\{\psi_\alpha : Y \to M_\alpha\}$ که برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ با شرط $\alpha \le \beta$ داریم $\psi_{\beta\alpha} \circ \psi_\beta = \psi_\alpha$، نگاشتی یکتا مانند $\omega : Y \to M_\infty$ موجود باشد که برای هر $\alpha \in \Lambda$ داشته باشیم $\psi_\alpha = f_\alpha \circ \omega$.

قضیه ۴۵.۱ . حد معکوس یک دستگاه معکوس مانند $\{M_\lambda; f_{\mu\lambda}\}_\Lambda$ از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی‌ها موجود و یکتاست. حد معکوس دستگاه مذکور را با نماد $\varprojlim\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\varprojlim_{\lambda} M_\lambda = \{(a_\lambda) \in \prod M_\lambda \ \mid \ a_\mu = f_{\mu\lambda}(a_\lambda) \ , \ \mu \leq \lambda\}.$$

برهان. ر.ک. [۹, ۲.۲۲].

لم ۴۶.۱ . فرض کنید M یک $R-$ مدول و $N_۱ \supset N_۲ \supset \dots$، یک زنجیر از زیر مدول‌های M باشد. در این صورت

$$\varprojlim_{i} N_i = \bigcap_{i=۱}^{\infty} N_i.$$

برهان. ر.ک. [۹, ۲.۵۰].

قضیه ۴۷.۱ . فرض کنید خانواده‌ی $\{M_\lambda; f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ یک دستگاه مستقیم از $R-$ مدول‌ها باشد. در این صورت برای هر $R-$ مدول N، داریم:

$$\mathrm{Hom}_R(\varinjlim_{\lambda} M_\lambda, N) \cong \varprojlim_{\lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, N).$$

برهان. ر.ک. [۹, ۲.۲۷].

تعریف ۴۸.۱ . فرض کنید I ایده‌آلی از R و M مدولی روی R باشد. در این صورت زنجیر نزولی $M \supset IM \supset I^۲M \supset I^۳M \supset \dots$ و برای هر $i \leq j$، نگاشت $f_{j,i} : M/I^jM \to M/I^iM$ با ضابطه $f_{j,i}(x+I^jM) = x + I^iM$ را در نظر بگیرید. اکنون دستگاه $\{M/I^iM, f_i\}$ روی $\mathbb{Z}^+$ یک دستگاه معکوس است. بنابراین حد معکوس دارد و

$$\varprojlim M/I^iM = \{\{x_i + I^iM\} | f_{i+۱,i}(x_{i+۱} + I^{i+۱}M) = x_i + I^iM\}.$$

به آسانی می‌بینیم که $\{x + I^iM\}_{i\geq ۰}$ یک پایه برای یک توپولوژی منحصربفرد روی M است. توپولوژی تولید شده توسط این پایه را $\mathbf{I}-$ **ادیک توپولوژی** روی M می‌نامیم. توجه کنید که اگر N زیر مدولی از M باشد، آنگاه دنباله‌های کاهشی $\{(I^iM + N)/N\}$ و $\{I^i(M \cap N)\}$ به ترتیب توپولوژی زیر فضایی و خارج قسمتی را القاء می‌کنند.