بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه قم

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

عنوان

تحلیل سازگاری قابل قبول ماتریس‌های مقایسه بازه‌ای و بدست آوردن وزن‌های مربوط به آن

استاد راهنما

دکتر علی‌اصغر فروغی

استاد مشاور

دکتر غلامحسن شیردل

نگارنده

رقیه خندان

زمستان ۸۹

هرآنچه داریم هدیه خداوند است به ما

و هر آنچه می‌شویم هدیه ماست به خداوند!

این هدیه کوچک تقدیم به او به واسطه بزرگترین هدیه‌اش یعنی

مادر دلسوز و پدر فداکارم

به‌نام خدا

سپاس و ستایش خداوندی را که یاری‌ام کرد تا در عبور از جاده پرفراز و نشیب زندگی تن به جهل و ظلمت نسپارم و در سایه‌سار علم و اندیشه تنفس کنم.

شایسته است از اساتید بزرگواری که در تهیه پایان نامه مرا راهنمایی کرده و بی دریغ مرا یاری نموده‌اند قدردانی کنم.

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر علی اصغر فروغی کمال تشکر دارم. قطعاً بدون راهنمایی‌های ایشان تکمیل این پایان نامه میسر نبود. از جناب آقای دکتر غلامحسن شیردل که به عنوان مشاور با راهنمایی خود مرا مورد لطف قرار داده‌اند، تشکر می‌کنم.

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر سعید محرابیان و جناب آقای دکتر مهدی احمدی‌نیا که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شده‌اند، صمیمانه سپاسگزارم.

در پایان از خانواده‌ام و دوستان و بزرگوارانی که با قدمی هر چند ظاهراً ناچیز ولی با نیتی خالصانه مرا یاری نموده‌اند قدردانی می‌کنم.

رقیه خندان

بهمن ۱۳۸۹

چکیده

تصمیم‌گیری‌های چند معیاره سهم عمده‌ای از تصمیم‌گیری‌های ما را تشکیل می‌دهد. یکی از روشهای تصمیم‌گیری چندمعیاره، استفاده از ماتریس‌های مقایسه‌ای است که می‌توانند بصورت قطعی (با مؤلفه‌های حقیقی) یا بازه‌ای یا فازی باشند. در این پایان‌نامه بطور مختصر به ماتریس‌های مقایسه قطعی و روش AHP اشاره می‌کنیم و به تفصیل به بررسی روشهایی برای محاسبه وزن‌های نسبی گزینه‌های تصمیم با استفاده از ماتریس‌های بازه‌ای و تحلیل سازگاری و سازگاری قابل قبول این ماتریس‌ها می‌پردازیم. با تعریف اندیس‌هایی برای اندازه‌گیری میزان ناسازگاری، درصدد کاهش ناسازگاری ماتریس‌های بازه‌ای هستیم. پس از محاسبه وزن‌های نسبی به‌دنبال یافتن وزن‌های نهایی گزینه‌های تصمیم هستیم تا بتوانیم آنها را با وجود چندین معیار رتبه‌بندی کنیم.

واژه‌های کلیدی: فرایند تحلیل سلسله مراتبی، تصمیم‌گیری‌های چند معیاره، برنامه ریزی چندهدفه، برنامه ریزی آرمانی، ماتریس‌های مقایسه بازه‌ای.

فهرست

اختصارات

فرایند تحلیل سلسله مراتبی .... Analytic Hierarchy Process (AHP)

اندیس سازگاری .... Consistency Index (CI)

نسبت سازگاری .... Consistency Ratio (CR)

تصمیم گیرنده .... Decision Maker (DM)

برنامه‌ریزی آرمانی .... Goal Programming (GP)

تصمیم‌گیری چندمعیاره .... Multiple Criteria Decision Making (MCDM)

اندیس تصادفی .... Random Index (RI)

Two-Stage Logarithmic Goal Pragramming (TLGP)

برنامه‌ریزی آرمانی دومرحله‌ای

مقدمه

دنیای اطراف ما مملو از تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره است و انسانها همیشه مجبور به تصمیم‌گیری در این زمینه‌ها هستند. برای نمونه در تصمیم‌گیری‌های کلان مانند تنظیم بودجه سالانه‌ی کشور، متخصصین اهداف مختلفی ازجمله امنیت، آموزش، توسعه صنعتی، بهداشت و... را تعقیب نموده و مایلند این اهداف را بهینه کنند. در زندگی شخصی نیز افراد با اینگونه تصمیم‌گیری‌ها مواجهند. مثلاً برای انتخاب رشته تحصیلی، معیارهای مختلفی از جمله آینده شغلی، موقعیت اجتماعی، علاقه، شرایط خانواده و محل تحصیل برای فرد اهمیت دارد. اتخاذ تصمیم صحیح و به‌موقع می‌تواند نقش بسزایی در زندگی شخصی و اجتماعی افراد داشته باشد. ضرورت وجود یک تکنیک قوی که بتواند انسان را در این زمینه یاری کند، کاملاً احساس می‌شود.

فرایند تحلیل سلسله مراتبی[1] یکی از جامع‌ترین سیستمهای طراحی شده برای تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه‌است. این فرایند اولین بار توسط توماس اِل ساعتی[2] در سال ۱۹۸۰ مطرح شد[۹, ۱۰]. این فرایند با تجزیه مسائل پیچیده، آنها را به شکلی ساده تبدیل کرده و به همین دلیل استفاده از آن حتی برای افرادی که با ریاضیات آشنایی کاملی ندارند، آسان بوده و در اموری چون مدیریت مورد استقبال قرار گرفته است.

از آنجا که در مسائل تصمیم‌گیری واقعی، قضاوت‌های بشر کاملاً سازگار نیستند، آقای ساعتی معیار مناسبی برای سنجش میزان ناسازگاری‌های موجود در قضاوت‌های تصمیم‌گیرنده ارائه کرده است[۱۰]. در فرایند تحلیل سلسله مراتبی، گزینه‌ها بر اساس

---

۱ *Analytic Hierarchy Proces*

۲ *Tomas. L. Saaty*

هر یک از معیارها و نیز معیارها دوبه‌دو با هم مقایسه می‌شوند و این مقایسات زوجی بصورت عدد حقیقی بیان شده و در ماتریس‌های مقایسه قطعی خلاصه می‌شوند. ممکن است این مقایسات بصورت بازه‌ای یا فازی مطرح شوند که به ماتریس‌های مقایسه بازه‌ای یا فازی منجر می‌شوند. استفاده از اینگونه ماتریس‌ها در زندگی واقعی منطقی‌تر از حالت قطعی است.

تاکنون روش‌های زیادی برای محاسبه وزن ماتریس مقایسه بازه‌ای ارائه شده است. این روش‌ها ممکن است وزن‌ها را بصورت قطعی، بازه‌ای و یا فازی محاسبه کنند. برخی از این روش‌ها بر اساس برنامه‌ریزی خطی (LP) و برنامه‌ریزی غیر خطی (NLP) هستند[۱, ۲]. برخی دیگر با استفاده از برنامه‌ریزی چندهدفه [۳] و برنامه‌ریزی آرمانی [۵, ۱۳, ۱۴, ۱۵] وزن‌های ماتریس‌های بازه‌ای را محاسبه می‌کنند. در فصل ۳ و ۴ این روش‌ها به تفصیل بررسی شده است.

وانگ [1] و همکارانش [۱۲] روش مقدار ویژه را به ماتریس‌های بازه‌ای و فازی تعمیم داده و روشی خطی ارائه کرده‌اند.

روش‌های فازی نیز در ماتریس‌های مقایسه بازه‌ای به‌کار می‌روند و وزن‌های نسبی را بصورت بازه‌ای یا فازی محاسبه می‌کنند [۷]. برخی دیگر از روش‌های آماری نیز در محاسبه وزن بهره گرفته‌اند[۸].

روش پیشنهاد شده توسط فانگ لیو[2] [٦] با تفکیک ماتریس‌های بازه‌ای به ماتریس‌های قطعی از محاسبه وزن ماتریس‌های قطعی بهره گرفته است و همچنین با استفاده از این ارتباط، تعریف سازگاری و سازگاری قابل قبول ماتریس‌های مقایسه بازه‌ای را مطرح کرده است. در فصل ۲ با این روش و تعاریف آشنا می‌شویم.

معیار دیگری که برای سنجش میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسه بازه‌ای مطرح

---

[1] $Ying-Ming.\ Wang$

[2] $FangLiu$

می‌شود، تعریفی است که آربل [۱] بر اساس ناحیه شدنی ماتریس بازه‌ای ارائه کرده است.

در برخی روش‌ها علاوه بر ارائه معیاری برای سنجش ناسازگاری، اصلاح ناسازگاری ماتریس نیز مورد بررسی قرار گرفته است. مثلاً در روش $TLGP$ که در فصل ۴ ارائه شده است، مرحله اول مسئله محاسبه وزن، در واقع میزان ناسازگاری را کاهش می‌دهد و در فصل ۳ نیز روشی برای اصلاح اندیس سازگاری تعریف شده، پیشنهاد شده است.

اگر وزن‌های محاسبه شده بصورت بازه‌ای باشند باید بازه‌ها را مقایسه و رتبه بندی کنیم. برای این کار تعاریف و روش‌های بسیاری مطرح شده است[۱۳, ۱۱, ٦] که در فصل ۵ دو مورد از این تعاریف را بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

فرایند تحلیل سلسله مراتبی

۱.۱ مقدمه

یکی از روش‌ها برای تصمیم‌گیری چندمعیاره، فرایند تحلیل سلسله مراتبی AHP است. در نمایش AHP به صورت سلسله مراتبی، هدف کلی مسئله در رأس قرار دارد که در واقع همان انتخاب گزینه‌ی برتر تصمیم‌گیری است و در سطوح بعد معیارها (و سپس زیر معیارها) و گزینه‌های تصمیم قرار دارند.

فرایند تحلیل سلسله مراتبی براساس مقایسات زوجی بنا شده است. یعنی هریک از گزینه‌ها برحسب تک تک معیارها با هم مقایسه می‌شوند. همچنین هر یک از معیارها بر اساس هدف نهایی (انتخاب گزینه برتر) با هم مقایسه می‌شوند و این مقایسه به صورت یک نسبت عددی بیان می‌شود. در نهایت اطلاعات حاصل از مقایسات زوجی در ماتریس‌هایی خلاصه می‌شوند. مثلاً اگر بخواهیم بر اساس سه معیار زیبایی، استحکام و قیمت، از بین سه گزینه‌ی A, B, C یکی را انتخاب کنیم، ابتدا باید گزینه‌ها را بر اساس هریک از معیارها دوبه‌دو مقایسه کنیم. بطور مثال از تصمیم‌گیرنده سؤال می‌کنیم گزینه A چند برابر مستحکم‌تر از گزینه B است و همچنین گزینه B نسبت به C و گزینه‌ی A نسبت به C چند برابر استحکام دارد.

اطلاعات به‌دست آمده از مقایسات زوجی گزینه‌های تصمیم بر اساس تک تک

معیارها را در ماتریس‌های $A_{n\times n} = (a_{ij})$ خلاصه می‌کنیم که در آن n تعداد گزینه‌های تصمیم است و a_{ij} نسبت اهمیت گزینه‌ی i به گزینه‌ی j بر اساس معیار مورد نظر می‌باشد. همچنین یک ماتریس $A_{m\times m} = (a_{ij})$ که m تعداد معیارهای موردنظر و a_{ij} نسبت اهمیت معیار i به معیار j بر اساس هدف نهایی می‌باشد.

بنابراین پس از انجام مقایسات زوجی به تعداد معیارها ماتریس‌های مقایسه داریم، بعلاوه یک ماتریس که مقایسات زوجی معیارها بر اساس هدف نهایی را به ما می‌دهد.

بدیهی است با مقایسه گزینه i نسبت به گزینه j نیازی نیست که اهمیت گزینه j نسبت به گزینه i را نیز از تصمیم‌گیرنده سؤال کنیم، چراکه اگر گزینه i نسبت به گزینه j دارای اهمیت a_{ij} باشد، گزینه j نسبت به گزینه i دارای اهمیت $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ خواهد بود. از این ویژگی ماتریس A به خاصیت تقابل یاد می‌کنیم و ماتریس A را متقابل می‌نامیم.

از طرفی اهمیت هر گزینه نسبت به خودش برابر ۱ می‌باشد. از این رو عناصر روی قطر ماتریس A برابر ۱ است: $a_{ii} = 1 \quad, \forall i = 1, \ldots, n$. همچنین نسبتهای مقایسه همواره مثبت هستند. بنابراین $a_{ij} > 0, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$. چون این نسبتها اعداد حقیقی هستند اینگونه ماتریس‌ها را ماتریس مقایسه قطعی متقابل می‌گوییم.

آقای ساعتی پیشنهاد کرد مقایسات زوجی اعدادی بین ۱ و ۹ باشند. عدد ۱ زمانیکه دو گزینه اهمیت یا مطلوبیت یکسانی دارند و عدد ۹ زمانیکه گزینه‌ای کاملاً مهم‌تر یا مطلوب‌تر از گزینه‌ی دیگر باشد و اعداد بین ۱ و ۹ برای حالات بین این دو حالت درنظر گرفته می‌شود.

نکته دیگری که در مورد ماتریس مقایسه مورد بررسی قرار می‌گیرد این است که اگر گزینه‌ی i نسبت به گزینه j دارای اهمیت a_{ij} باشد و گزینه j نسبت به گزینه k دارای اهمیت a_{jk} باشد آنگاه گزینه i باید نسبت به گزینه k دارای اهمیت $a_{ij}a_{jk}$ باشد. این ویژگی تحت عنوان سازگاری ماتریس A مطرح می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱ ماتریس A را سازگار می‌نامیم هرگاه

$$a_{ik} = a_{ij}a_{jk}, \qquad \forall i, j, k = ۱, \ldots, n.$$

در بخش (۲.۱) سازگاری ماتریس‌های مقایسه قطعی را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم و در بخش (۴.۱) روشی برای بهبود وضعیت سازگاری ماتریس‌های ناسازگار ارائه می‌دهیم.

پس از انجام مقایسات زوجی و تکمیل ماتریس‌های مقایسه بر اساس معیارها و نیز ماتریس مقایسه معیارها بر اساس هدف نهایی، به دنبال وزن نسبی گزینه‌ها بر اساس معیارها و نیز وزن نسبی هر یک از معیارها هستیم. در بخش (۳.۱) روشهایی برای محاسبه وزن نسبی حاصل از ماتریس مقایسه متقابل قطعی خواهیم آورد. وزن معیارها نشان‌دهنده اهمیت آنها در تعیین هدف نهایی است و وزن هر گزینه نسبت به یک معیار، سهم آن گزینه در معیار مربوطه می‌باشد. بنابراین می‌توان وزن نهایی هر گزینه را از مجموع حاصلضرب وزن هر معیار در وزن گزینه مورد نظر بر اساس آن معیار بدست آورد. اگر $w = (w_{۱j}, w_{۲j}, \ldots, w_{nj})$ بردار وزن حاصل از ماتریس مقایسه گزینه‌ها بر اساس معیار j ام باشد، w_{ij} وزن گزینه i ام بر اساس معیارj ام است. اگر بردار وزن حاصل از مقایسات معیارها نسبت به هم بصورت $w = (w_۱, w_۲, \ldots, w_m)$ باشد وزن نهایی گزینه i ام بصورت $\sum\limits_{j=۱}^{m} w_{ij}w_j$ بدست می‌آید.

وزن نهایی، ارزش یا مطلوبیت نهایی گزینه را به ما می‌دهد. بدیهی است هر گزینه که وزن نهایی بیشتری داشته باشد به عنوان گزینه برتر انتخاب خواهد شد.

۲.۱ سازگاری و سازگاری قابل قبول ماتریس‌های مقایسه قطعی

در این بخش به بررسی سازگاری ماتریس‌های مقایسه قطعی می‌پردازیم و میزان ناسازگاری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم ماتریس A سازگار باشد. اگر w_1 یک عدد حقیقی مثبت دلخواه و برای هر $k = 2, \dots, n$، $w_k = \frac{w_1}{a_{1k}}$ تعریف شود، با توجه به تعریف سازگاری و ویژگی تقابل برای هر $i, j = 1, \dots, n$ داریم:

$$a_{ij} = a_{i1}.a_{1j} = \frac{w_i}{w_1}.\frac{w_1}{w_j} = \frac{w_i}{w_j}$$

بنابراین در حالت سازگاری بردار وزن $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$ موجود است بطوریکه $\forall i, j = 1, \dots, n$، $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ و در نتیجه می‌توانیم ماتریس A را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}$$

با توجه به شکل جدید ماتریس A واضح است $Aw = nw$. پس n مقدار ویژه و w بردار ویژه متناظر آن در این ماتریس است. از طرفی چون تمامی سطرهای این ماتریس ضریبی از یکدیگر هستند، رتبه ماتریس یک است. چون تعداد مقادیر ویژه غیر صفر ماتریس حداکثر برابر رتبه ماتریس است، بنابراین همه مقادیر ویژه A بجز $\lambda = n$ صفر هستند.

قضیه ۱.۲.۱ ماتریس مقایسه قطعی مثبت متقابل A سازگار است اگروفقط اگر $\lambda_{max} = n$ که λ_{max} بزرگترین مقدار ویژه A است.

اثبات: فرض می‌کنیم A سازگار باشد. با توجه به توضیحات فوق $n - 1$ مقدار ویژه A برابر صفر و یکی از مقادیر ویژه برابر n است. بوضوح $\lambda_{max} = n$ است.

برای اثبات طرف دیگر فرض می‌کنیم $\lambda_{max} = n$ باشد. چون A ماتریس مثبت است بردار $w > 0$ وجود دارد بطوریکه $Aw = \lambda_{max} w$ [۴]. بنابراین به ازای هر

$i = ۱, ۲, \ldots, n$ داریم:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}$$

و در نتیجه

$$n\lambda_{max} - n = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \qquad (۱.۱)$$

در عبارت (۱.۱) دو جمله شامل a_{ij} وجود دارد یکی $a_{ij}\frac{w_j}{w_i}$ و دیگری $a_{ji}\frac{w_i}{w_j} = \frac{۱}{a_{ij}}\frac{w_i}{w_j}$ که دقیقاً عکس یکدیگرند. بنابراین با در نظر گرفتن $y = a_{ij}\frac{w_j}{w_i}$ رابطه (۱.۱) را می‌توان جمع عباراتی بصورت $y + \frac{۱}{y}$ در نظر گرفت. از طرفی $y + \frac{۱}{y} \geq ۲$. بنابراین با جایگزین کردن $\lambda_{max} = n$ در رابطه (۱.۱) داریم:

$$n^۲ - n = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i}^{n} (y + \frac{۱}{y}) \geq \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j>i}^{n} ۲ = n^۲ - n$$

بنابراین لزوماً باید $\geq$ در عبارت فوق به تساوی تبدیل شود. پس $y + \frac{۱}{y} = ۲$ و این فقط برای $y = ۱$ و در نتیجه $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ رخ می‌دهد و این سازگاری را نتیجه می‌دهد.

□

نتیجه ۲.۲.۱ اگر A ماتریس مقایسه قطعی مثبت متقابل باشد آنگاه $\lambda_{max} \geq n$.

اثبات: با توجه به روند اثبات قضیه فوق در حالت کلی داریم:

$$n\lambda_{max} - n \geq n^۲ - n$$

بنابراین $\lambda_{max} \geq n$.

□

بنابراین در حالت کلی برای ماتریس‌های مقایسه متقابل، $\lambda_{max} \geq n$ است و حالت تساوی فقط برای ماتریس‌های سازگار رخ می‌دهد. بنابراین به نظر می‌رسد برای اندازه‌گیری سطح ناسازگاری می‌توان از تفاضل بزرگترین مقدار ویژه و بعد

ماتریس استفاده کرد. آقای ساعتی $CI = \frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$ را به عنوان اندیس سازگاری معرفی کرده‌است. در واقع CI میانگین مقادیر ویژه ماتریس به جز λ_{max} با ضریب منفی می‌باشد. بدیهی است در مورد ماتریس سازگار $CI = 0$ است. همچنین وی نسبت سازگاری را بصورت $CR = \frac{CI}{RI}$ تعریف کرده‌است که RI عبارتست از عددی تصادفی از میانگین CI برای تعداد زیادی ماتریس‌های قطعی مثبت متقابل تصادفی که در آن شرط $\forall i, j = 1, \ldots, n$ ، $a_{ii} = 1$ ، $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ رعایت شده‌است. مقادیر RI فقط به مرتبه ماتریس بستگی دارد و برای ماتریس‌های با ابعاد کوچک در جدول زیر آمده‌است:

جدول ۱.۱: اندیس سازگاری

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
RI	۰	۰	۰/۵۲	۰/۸۹	۱/۱۲	۱/۲۶	۱/۳۶	۱/۴۱	۱/۴۶	۱/۴۹

تعریف ۳.۲.۱ ماتریس مقایسه قطعی متقابل A را سازگار قابل قبول نامیم اگر $CR < 0/1$ و آنرا سازگار غیرقابل قبول نامیم اگر $CR \geq 0/1$ باشد.

۳.۱ محاسبه وزن نسبی ماتریس

روشهای مختلفی برای بدست آوردن وزن بر اساس ماتریس مقایسه قطعی متقابل ارائه شده‌است. در این قسمت برخی از این روشها را بیان می‌کنیم:

۱ − روش بردار ویژه:

همانطور که توضیح داده شد در حالت سازگاری ماتریس، $Aw = nw$ برقرار است که n بزرگترین مقدارویژه و w بردارویژه متناظرش است و این همان بردار وزن مطلوب است. دیگر مقادیرویژه و بردارهای ویژه در این حالت صفر هستند. ساعتی [۱۰] نشان داده است که با فاصله گرفتن ماتریس از حالت سازگاری، λ_{max} از n و w از حالت مطلوب خود فاصله می‌گیرند و بقیه مقادیرویژه و بردارهای ویژه متناظرشان نزدیک به صفر

هستند. بنابراین بردارویژه متناظر λ_{max} تقریب خوبی برای w خواهد بود.

۲– روش حداقل مربعات:

در این روش سعی بر آن است که اختلاف نسبت وزنها یعنی $\frac{w_i}{w_j}$ و مقادیر مقایسات زوجی a_{ij} حداقل گردد. یعنی سیستم به حالت سازگاری نزدیکتر شود. بنابراین برنامه‌ریزی غیر خطی زیر برای محاسبه w_i ها باید حل شود:

$$\begin{aligned} &min \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} w_j - w_i)^2 \\ &s.t \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ &\qquad w_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.1}$$

برای حل مسئله فوق، معادله لاگرانژی آن بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} w_j - w_i)^2 + 2\lambda(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1)$$

اگر از معادله فوق نسبت به w_l مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{il} w_l - w_i) a_{il} - \sum_{j=1}^{n} (a_{lj} w_j - w_l) + \lambda = 0, \quad l = 1, \ldots, n.$$

از این روابط و رابطه $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$، $n+1$ معادله خطی ناهمگن و $n+1$ مجهول داریم که با حل دستگاه می‌توان w_i ها و λ را محاسبه کرد.

۳– روش حداقل مربعات لگاریتمی:

در این روش همانند روش قبل می‌خواهیم $\frac{w_i}{w_j}$ به a_{ij} نزدیک گردد. یعنی $a_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j}$ پس $a_{ij}\frac{w_j}{w_i} \approx 1$. میانگین هندسی این مقادیر برابر است با:

$$(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i})^{(\frac{1}{n^2})} = Z^{(\frac{1}{n^2})}$$

در حالت سازگاری میانگین هندسی برابر یک است و لگاریتم آن صفر خواهدبود و در حالت ناسازگاری سعی بر آن است که میانگین هندسی به یک و لگاریتم آن به صفر