بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی **(M.Sc)**

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

روش تصویر چندگانه برای حل معادله انتگرال فرد هلم منفردضعیف نوع دوم

استادراهنما:

آقای دکتر محمد علی فریبرزی عراقی

استادمشاور:

آقای دکتر جلیل رشید ی نیا

پژوهشگر :

نسرین عباس پور

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به :

همسر مهربا ن و فداکارم

و

دو دختر عزیزم سارا و سارینا

که دراین راه متحمل سختی های زیادی شده اند

و

با صبرشان مرا یاری کرده اند.

تقدیروتشکر

حمد وسپاس بی کران به درگاه خداوند که به انسان حکمت, تفکر,تعقل و ... عطا کرد تابتواند در پدیده های عالم بیندیشد.

درجریان مطالعه وتحقیقاتی که منجر به پیدایش این پایان نامه گردیدازدانش وراهنمایی های اسا تید ارجمند و همکاری دوستان بزرگواری بهره جویی شده که فراهم آمدن این پایان نامه درحقیقت وامدار ایشان است.بدیهی است که مسئولیت هر گونه لغزشی بر عهده اینجانب می باشد.

لازم می دانم که صمیمانه ترین تشکرات خود را از استاد راهنمای گرانقدر وارجمندم جناب آقای دکترفریبرزی بنمایم که در تهیه و تدوین این پایان نامه راهنمایی های عالمانه ودلسوزانه ای ارائه نمودندو متحمل زحمات بی شائبه ای شدند.

همچنین از اساتید عزیز وگرامی,جناب آقای دکتررشیدی نیا که زحمت مشاوره وجناب آقای دکترادیبی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند ودر طول مدت تحصیلی از ایشان آموزه های بسیاری فرا گرفتم, تشکر وقدر دانی می نمایم.

وبر خود واجب می دانم که از کلیه اساتید محترم گروه ریاضی که مشوق اینجانب بوده اند و الگو های علمی وعملی بنده می باشند, سپاس گذاری کرده و برای همه ی این بزرگواران آرزوی سعادت, توفیق وسلامتی دارم.

نسرین عباسپور

تابستان ۱۳۹۱

بسمه تعالی

تعهداصالت پایان نامه‌کارشناسی‌ارشد

اینجانب نسرین عباسپور دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی-آنالیز عددی با شماره دانشجویی۸۸۰۸۳۴۱۵۸۰۰ اعلام می نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان"روش تصویر چندگانه برای حل معادله انتگرال فردهلم منفرد ضعیف نوع دوم " حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم,طبق ضوابط ورویه های جاری,آن را ارجاع داده و در فهرست منابع وما خذ ذکر نموده ام. علاوه برآن تاکید می نما یم که این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح ,پایین تر یا بالاتر ارائه نشده وچنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود, بدینوسیله متعهد می شوم, در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام توسط دانشگاه, بدون کوچکترین اعتراض آن را بپذیرم.

نسرین عباسپور

تاریخ و امضاء

بسمه تعالی

در تاریخ: ۳۰/ ۱۳۹۱/۶

دانشجوی کارشناسی ارشد, خانم **نسرین عباسپور** از پایان نامه خود دفاع نموده

و با نمره: ۱۸ به حروف : هیجده و با درجه: عالی

مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه، روش تصویر چندگانه و الگوریتم تکرار- مجدد برای حل معادلات انتگرالی فردهلم منفرد بطور ضعیف از نوع دوم معرفی نموده و مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین با بکارگیری این روشها با روشهای پترو – گالرکین نتایج همگرایی قوی و عالی را ارائه می دهیم و نتایج نظری خود را با مثال عددی نشان می دهیم.

مقدمه

معادلاتی که در این تحقیق در نظر می گیریم,معادلات انتگرال فردهلم از نوع دوم به صورت عملگری زیر می باشند.

$$(I-\mathcal{K})u=f$$

که $\mathcal{K}$یک عملگر خطی فشرده از فضای باناخχ بتویχ با هسته منفرد بطور ضعیف می باشدو f تابع داده شده وu مجهولی است که تعیین خواهد شد. این نوع از معادلات,کاربرد های بسیار مهم و زیادی را پوشش می دهند. کارهای زیادی روی تعمیم و تحلیل روشهای عددی برای حل معادلات انتگرالی فردهلم از نوع دوم, معادله $(I-\mathcal{K})u=f$صورت گرفته است که برای مثال [30، 24، 8-7] را می توانید ببینید. برخی از روشهای عددی،یک همگرایی قوی ارائه میدهند بدین معنی که مرتبه همگرایی بالاتر از حد انتظار ما برای درجه چندجمله ای های تکه ای بکار رفته در [38] می باشد.روش شناخته شده تکراری اسلون(روش گالرکین) یک مثال بسیار خوب از اینگونه روشها است. در [15]، یک چهارچوب نظری برای تحلیل همگرایی روشهای تصویری تعمیم داده می شود و همگرایی قوی برای روشهای تصویری تکراری شامل نسخه های مجزا می باشد. اخیرا" نوع جدیدی از روش تصویری که روش تصویر چندگانه ($\mathfrak{MPM}$)[1] نامیده می شودکه یک نسخه مجزا شده می باشد که در [18,31] تعمیم داده شده است. ایده اصلی از $\mathfrak{MPM}$ بر تجزیه عملگر $\mathcal{K}$ بتوی ساختار تفکیک پذیر شده ماتریس بلوکی زیر بر اساس درایه های بالا و پایین که به صورت‌زیرتعریف شده است :

$$\begin{bmatrix}\mathcal{K}_n^{LL} & \mathcal{K}_n^{HL}\\ \mathcal{K}_n^{LH} & \mathcal{K}_n^{HH}\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}\mathcal{P}_n\mathcal{K}\mathcal{P}_n & \mathcal{P}_n\mathcal{K}(I-\mathcal{P}_n)\\ (I-\mathcal{P}_n)\mathcal{K}\mathcal{P}_n & (I-\mathcal{P}_n)\mathcal{K}(I-\mathcal{P}_n)\end{bmatrix}$$

و مجموعی از بلوکهای $\mathcal{K}_n^{LL}$, $\mathcal{K}_n^{LH}$ و$\mathcal{K}_n^{HL}$ نمایش داده شده بوسیله $\mathcal{K}_n^{M}$(M به معنای چند در روش تصویری می باشد)به عنوان تقریبی بهتراز$\mathcal{K}$را مورد استفاده قرار می دهیم که در آن$\mathcal{P}_n$یک عملگر تصویری است.چهارچوب نظری پیشنهاد شده،برای ارائه نتایج همگرایی قوی,دراین پایان نامه

۱-Multi- Projection Method

بکار برده می شود. با توجه به آنچه اثبات خواهد شد ، اگر هر دو , هسته و تابع طرف راست به اندازه کافی هموار باشند آنگاه برای عملگرهای تصویری متعامد برروی فضای چندجمله ای تکه ای با درجه کمتر از r ، مراتب همگرایی $\mathcal{MPM}$ و روش تکرار بترتیب $3r$ و $4r$ هستند.به هرحال،یک اشکال بزرگ از روش $\mathcal{MPM}$ این است که باید هسته تابعی از عملگرهای فشرده به اندازه کافی هموار باشد.

تحلیل عددی برای معادلات انتگرالی منفرد بطور ضعیف خیلی مهم و جالب می باشند و کارهای زیادی در این زمینه انجام شده است. (برای مثال [37، 28، 24، 12،15] را ببینید). در [24]، گراهام در روش گالرکین تکراری برای معادلات انتگرالی نوع دوم منفرد ، بحث کرده است و نتیجه گرفته است که همگرایی کلی با استفاده از اسپلاین های روی شبکه های شبه یکنواخت دلخواه به عنوان زیرفضاهای تقریبی تخمین زده می شود.در [12]، یک روش گالرکین که منفرد بودن را پایا نگه می دارد(یعنی منفردبودن را حفظ می کند)، بوسیله در نظر گرفتن زیرفضای تصویری که شامل تعدادی توابع منفرد باشد، ارائه شده است و ثابت شده که این روش، منفرد بودن جوابها را حفظ کرده و یک مرتبه بهینه از همگرایی را دارا می باشد.

هدف اصلی از این پایان نامه تعمیم $\mathcal{MPM}$ برای حل معادلات انتگرالی منفرد بطور ضعیف می باشد. فرض می کنیم که چهارچوب نظری و الگوریتم تکرار مجدد از تکنیکهایی که منفرد بودن را پایا نگه می دارد و در [12] ، ارائه شده است، استفاده کنند.

در این صورت آنها را برای روشهای پترو – گالرکین مورد استفاده قرار می دهیم . همچنین مراتب مختلف از همگرایی $\mathcal{MPM}$ را به صورت $r+\alpha$ و $r+2\alpha$ که α یک اندیس منفرد تابع هسته است، نشان می دهیم. با استفاده از فرضیات الگوریتم تکرار مجدد، می توانیم همگرایی را با مرتبه اضافی و معین 3α را با کمترین محاسبات اضافی برای هر مرحله از تکرار بدست آوریم. این حالت مرتبه خیلی بالاتری از همگرایی قوی را نسبت به گالرکین و روش تکرار گالرکین، ارائه می دهد.

در این پایان نامه، چهارچوب نظری برای $\mathcal{MPM}$ با استفاده از تکنیکهای پایایی – منفرد بودن معرفی شده است. در مرحله بعدی،الگوریتم تکرار مجدد بر پایه جوابهای تکرار از $\mathcal{MPM}$ تعمیم داده شده است. سپس، با استفاده از قضیه های ارائه شده ، با روشهای پترو – گالرکین ، نتایج همگرایی قوی را بدست می آوریم.

در فصل اول مفاهیم وتعاریف اولیه را که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته است , بیان می کنیم. مطالب این فصل از مراجع [2,3,4,21] استخراج شده است.

در فصل دوم به بیان ومعرفی روش های حل معادلات انتگرال که روش تصویری, روش هم محلی,روش گالرکین وروش تکرار گالرکین است, پرداخته ایم .در این فصل نیز از مراجع [7,30] استفاده شده است.

در فصل سوم روش تصویرچندگانه برای حل معادله انتگرال فردهلم منفرد ضعیف نوع دوم به کاربرده ایم و مطالب این فصل بر مبنای مراجع[34و35]] استوار است.

در فصل چهارم مثالهای عددی اختصاص داده شده است که تخمین های نظری بدست آمده را تشریح می کند. ضمنا برنامه کامپیوتری مثال نیز ارائه می شود.

فصل اول

پیش نیاز ها,مفاهیم وتعاریف اولیه

۱-۱ معادلات انتگرال

۱-۱-۱ تاریخچه [2]

نظریه معادلات انتگرال از مهمترین شاخه های ریاضی است و بواسطه تبدیل مسائل مقدار مرزی به معادلات انتگرال در نظریه معادلات با مشتقات جزیی، اهمیت ویژه ای به خود اختصاص داده است. در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گیری از انتگرال تلقی می شد ولیکن برای اولین بار اصطلاح معادلات انتگرال توسط «ریموند»[۱] پیشنهاد شد. از سال ۱۷۸۲ «لاپلاس»[۲] نظریه کلی معادلات انتگرال را بصورت زیر بیان کرد:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e\mathrm{px}(-xt)f(t)dt$$

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات«فوریه»[۳] در سال ۱۸۱۱، روی نظریه حرارت کارکرد و انتگرال فوریه در این سالها شکل گرفت، لذا معمولاً گفته می شود که مبدأ معادلات انتگرال به تئوری انتگرال فوریه بر می گردد. در همین سالها «آبل»[۴] در مسائل خود که به مسائل مکانیکی آبل معروف است کاربرد معادلات انتگرال را در چنین مسائلی مطرح نمود(۱۸۲۳). در سال ۱۸۲۶«پواسون»[۵] به معادله انتگرال زیردست یافت که این معادله را قبلاً نیز فوریه بدست آورده بود.

$$f(x) = \mathrm{g}(x) + \lambda \int \Gamma(x,s)f(s)ds$$

«لیوویل»[۶] در سال۱۸۲۳ بطور مستقل دسته خاصی از معادلات انتگرال را حل کرد و یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط وی برداشته شد وآن چگونگی حل بعضی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود. اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در مورد معادلات انتگرال بکار می رود، اولین بار توسط« هیلبرت»[۷] پیشنهاد شد، البته قبل از کارهای هیلبرت، معادلات آبل و لیوویل به فرمهای زیر مطرح بود.

---

[۱]-Reymond
[۲]- Laplace
[۳]-Fourier
[۴].Abel
[۵]. Poisson
[۶].Loivile
[۷].Hilbert

$$g(x) = \int_a^x K(t,s) f(y)dy$$ معادله آبل

$$f(x) = g(x) + \int_a^x K(t,s) f(y)dy$$ معادله لیوویل

«پوانکاره»[۱] در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرال زیر را بدست آورد.

یعنی : $$u(x) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, f(y)dy = f(x)$$

بعد از گذشت چند سال یعنی در حدود سالهای ۱۹۰۳- ۱۹۰۰ ریاضیدان سوئدی به نام «فردهلم»[۲] جهت بدست آوردن جواب مسئله فوق تحقیقاتی را انجام داد و این تحقیقات منجر به ارائه قضایای فردهلم که از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند، گردید. در اواخر قرن نوزدهم«ولترا»[۳] نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه نمود ارائه یک سخنرانی توسط «اریک هولمگر»[۴] در سال ۱۹۰۷ روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت را به تحقیق در مورد معادلات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال بهره گرفت. یکی از کارهای مهم او فرموله کردن مسائل مقداری مرزی بصورت یک معادله انتگرالی است. ارتباط معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال و یا مثالهای دیگری در ریاضی فیزیک یک تکنیک مهم را جهت حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزیی بوجود می آورد که یکی از دستاوردهای مهم مطالعه معادلات انتگرال است ابتدا قضایای فردهلم برای هسته های پیوسته ارائه شد، لیکن بعدها توسط افراد دیگری نظیر«کارلمان»[۵] و «ریس»[۶] برای هسته های کلی تر تعمیم یافت. در اوایل نیمه دوم قرن اخیر، تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال بوسیله «هرمن ویل»[۷] در ارتباط با اینکه به ازاء چه مقادیری از معادله انتگرال جواب دارد، صورت گرفت، لیکن از آنجا که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرال که در عمل با آنها مواجه می شویم نیستیم، لذا از همین سالها نیاز به روشهای تقریبی و عددی جهت حل معادلات انتگرال آشکار شد.

---

[۱] .H.Poincare
[۲] .Lver Fredholm
[۳] .Vita Volterra
[۴] -Erick Holmger
[۵] -Carleman
[۶] -F.Riesz
[۷] -Hermann weyl

۱-۱- ۲ کاربرد معادله انتگرال

بسیاری از مسائل فیزیک، ریاضی، بیولوژی، مکانیک سیالات و مسائلی که در رابطه با مخابرات لیزر، زلزله نگاری و صنایع پتروشیمی، ماهواره های مخابراتی و رآکتورهای اتمی مطرح می شوند، غالباً به یک معادله دیفرانسیل منجر خواهند شد. که معمولاً به کمک روشهای مربوط در معادلات انتگرال به نحوه موثری حل می گردند و علت اصلی پیدایش معادلات انتگرال، افزایش معادلات دیفرانسیلی است که در سایر شاخه های علوم مانند فیزیک،شیمی، بیولوژی و مهندسی پدید می آیند و این مسائل به کمک روشهای معمولی قابل حل نیستند.روشهای ارائه شده به کمک معادلات انتگرال وروش های عددی، کاربرد اینگونه روشها را به نحو قابل ملاحظه ای افزایش داده است. از دیگر کاربردهای معادلات انتگرال در مورد جمعیت انسان و نوسان یک میله قابل ارتجاع و تصاویر الکتروکاردیوگراف می باشد.

۱-۱-۳ جواب معادله انتگرال

منظور از یافتن جواب یک معادله انتگرال (از هر نوع) یافتن تابع جواب است. «اسکاربرد»[۱] نشان داده است که چگونه معادلات انتگرال می توانند از مسائل ساده بوجود آیند و به خصوص چگونه هسته در معادلات دیفرانسیل مربوط به مسائل مقدار مرزی شکل می گیرد. یک روش خیلی ساده و مستقیم توسط «گوستات»[۲] (۱۹۲۳) ارائه شده است و« نیستروم»[۳] (۱۹۳۰) این روش را برای حل معادلات انتگرال مختلف بسط داده است. در این روش به جای تابع مجهول زیر علامت انتگرال، یک چند جمله ای قرار می گیرد، از این چند جمله ای برروی یک بازه انتگرال گیری، انتگرال گرفته می شود و سپس انتگرال را در یک یا چند نقطه مشخص از بازه انتگرال گیری حساب می شود.درکل جواب یک معادله انتگرال روی بازه انتگرال گیری یک تابع نظیر $f(x)$ است بطوریکه آن تابع در معادله داده شده صدق کند به عبارت دیگر اگر جواب داده شده در طرف راست معادله جای گذاری شود و در نتیجه دو طرف چپ و راست معادله با هم برابر شوند آنگاه تابع نظیر $f(s)$ جواب معادله است.[2]

---

[۱].scarboard
[۲].Gosetat.
[۳].Nystrom

۱-۱-۴تعاریف معادلات ا نتگرال و انواع آن[36,3]

۱-۱-۴-۱تعریف معادله انتگرال:معادله ای که تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می شود معادله انتگرال نامیده می شود.

مثال:

$$u(x) = x + \int_1^2 K(x,y)\, u(y)dy$$

$$u(x) = x + \int_0^x e^{-xt}\, u(t)dt$$

$$u(x) = x + \int_0^1 e^{x-t}\, Sin\, u(t)dt$$

که در آن u تابعی مجهول است. معادلات انتگرال بستگی به نوع تابع مجهول از حیث خطی و غیرخطی بودن و همچنین حدود انتگرال گیری و اینکه تابع مجهول به غیر از زیرعلامت انتگرال، جای دیگری نیز ظاهر شود یا نه، انواع مختلفی دارد.

۱-۱-۴-۲ تقسیم بندی معادلات انتگرال برحسب خطی یا غیرخطی بودن:

اگر تابع مجهول در معادله انتگرال بصورت خطی ظاهر شود معادله انتگرال را خطی گوییم و اگر بصورت غیرخطی نمایان شود(بصورت توان داریا ترکیبی ازتابعی دیگر مانند $u^2(x)$ یا $e^{u(x)}$, $sin\, u(x)$) آنگاه معادله انتگرال را غیرخطی می گوییم.

۱-۱-۴- ۳ معروف ترین معادلات انتگرال خطی:

معروف ترین معادلات انتگرال خطی بصورت معادلات انتگرال فردهلم و یا معادلات انتگرال ولترا نمایان می شوند.

۱-۱-۴-۳-۱ معادلات انتگرال فردهلم: معادلات انتگرالی که در آنها دامنه انتگرال گیری ثابت است. شکل استاندارد این معادلات بصورت:

$$h(x)u(x) \ = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\, u(y)dy$$

می باشدکه b, a,λ عدد ثابت هستند و$u(x)$تابعی مجهول است وتابع دو متغیره $K(x,y)$تابعی پیوسته به ناحیه (مستطیل شکل) $R = \{(x,y)|a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ می باشد که آن را هسته معادله انتگرال می نامیم و تابع$f(x)$ مشخص و معلوم است.

معادلات انتگرال فردهلم به دو دسته تقسیم می شوند:

a) **نوع اول:** اگر در فرم کلی معادله انتگرال فردهلم $h(x) = 0$ قرار دهیم آنگاه معادله انتگرال بدست آمده را معادله انتگرال فردهلم نوع اول گویند که بصورت زیر است:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\, u(y) dy = 0$$

این یک مسئله بدوضع است چون جواب u به تغییرات کوچک در داده های تابع حساس است. ۰

b) **نوع دوم**: اگر $h(x) = 1$ قرار دهیم، معادله انتگرال فردهلم نوع دوم بدست می آید که بصورت زیر است:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\, u(y) dy$$

وقتی که بازه انتگرال یک مجموعه بسته کراندار روی $\mathbb{R}$ باشد، تابع هسته$K(x,y)$ مطلقاً انتگرال پذیر فرض شده است.

تعریف: اگر در این معادله انتگرال،$f(x) = 0$ ، معادله انتگرال را همگن گوییم.

۱-۱-۴-۳-۲ معادلات انتگرال ولترا: معادلاتی که در آنها حد بالای انتگرال گیری متغیر است. شکل استاندارد این معادلات به فرم زیر می باشد:

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)u(x)dy \;\; , a \leq x \leq b \, , a \leq y \leq b$$

که در این معادله،$k(x,y)$ بر ناحیه مستطیلی زیر پیوسته می باشد:

$$R = \{(x,y)|a \leq y \leq b, a \leq x \leq b\}$$

معادلات انتگرال ولترا نیز به دو دسته تقسیم می شوند:

a) **نوع اول**: اگر در فرم کلی معادله انتگرال ولترا، $h(x) = 0$ قرار دهیم، آنگاه معادله انتگرال ولترا نوع اول بدست می آید.

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\, u(y) dy = 0$$

b) **نوع دوم**: اگر $h(x) = 1$ قرار دهیم:

$$u(x) \ = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\, u(y) dy$$

رجوع کنید به[7,26]

۱-۱-۴-۴ معادلات انتگرال آبل نوع اول[7]

معادله انتگرال آبل $t > 0 \quad \int_0^t \frac{H(t,s)x(s)}{(t^P - s^P)^\alpha}\, ds = y(t)$ است که $P > 0 \ , \ 0 < \alpha < 1$ است. و در حالت خاص و مهم P=1 و $P = 2$ می باشد. (برای هر دو $\alpha = \frac{1}{2}$ است) روشهای عددی خاص برای این معادلات توسعه داده شده اند بطوریکه انواع وسیعی از کاربردها قرار می گیرند.

۱-۱-۵ هسته یک معادله انتگرال[26,21]

به عنوان مثال معادله انتگرال زیر را در نظر می گیریم:

$$u(x) \ = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\, u(y) dy$$

تابع دو متغیره K را هسته این معادله انتگرال گوییم که به یکی از اشکال جدایی پذیر، الحاقی متقارن، هرمیتی، نرمال، پیچشی، منفرد، منفرد ضعیف و هموار می تواند باشد.

۱-۱-۵-۱ هسته جدایی پذیر (تبهگن): هسته K را جدایی پذیر گوییم هرگاه بتوان آن را به صورت جمع حاصل ضربهای توان یک متغیره در آورد. به عبارت دیگر آن را بتوان به این صورت نوشت: