دانشگاه پیام نور
بسمه تعالی

تصویب پایان نامه / رساله

پایان نامه تحت عنوان : نکاتي پيرامون خواص هندسي فضاهاي ۲-نرمدار خطي
که توسط احمد میناپور در مرکز شیراز
تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: ۸۸/۹/۳۰ نمره: ۱۸.۲۵ درجه ارزشیابی : عالي
اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	هیأت داوران	امضاء
۱- صديقه جاهدي	استاد یار	استاد راهنما	
۲- بهمن يوسفي	استاد	استاد مشاور	
۳- فريبا ارشاد	استاد یار	استاد داور	
۴- الهام اسراري	استاد یار	نماینده تحصیلات تکمیلی	

تقدیم به :

پدر و مادرعزیزم ، فرشتگان مهرباني كه بال و پر گستراندند تا در سایه محبت و فداركاري بي دریغشان مسیر رشد و ترقي را پیمودم و خواهر و برادرم كه كردارشان آكنده از راستي و قلبشان مملو از مهر است.

سپاسگذاري

در اينجا وظيفه خود ميدانم سپاس صميمانه ام را تقديم به استاد بزرگوار خود سركار خانم دكتر جاهدي نمايم كه در مراحل گوناگون اين اثر مرا ياري نموده اند. همچنين از اساتيد دانشمند آقاي دكتر يوسفي و خانم دكتر ارشاد كه رنج و زحمت خواندن اين تاليف را با دقت برخود هموار كردند،تشكروقدرداني مي كنم.

چکیده

فضاهای ۲-نرمدار برای اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط گاهلر معرفي گرديد.بعدا این موضوع و خواص مختلف آن توسط دیگر مولفان مورد بررسي قرار گرفت. در فصل اول مفاهیم مقدماتي فضاهای ۲- نرمدارخطی را مورد بحث قرار می دهیم.

فضاهای۲-ضرب داخلی موضوع دیگری است که در این فصل مورد بحث قرار می دهیم و نشان می دهیم که می توان با استفاده از ۲-ضرب داخلی یک ۲- نرم روی فضای زمینه تعریف کرده و فضای ۲-ضرب داخلی را به فضای ۲-نرمدار تبدیل کنیم . در ادامه این فصل برخی نامساوی ها برای ۲- نرمها بیان مي شود.

در فصل دوم ابتدا يك ۲- نرم خاص به نام ۲-نرم استاندارد را معرفی کرده و نامساوی مثلثی را برای ۲- نرم استاندارد بیان مي کنیم و نشان می دهیم که این نامساوی با حالت کلی نامساوی کشی – شوارتز معادل خواهد بود .در ادامه برخی مطالب روی فضای ۲-نرمدار متناهی بعد را مطالعه مي نمائیم. در انتها نشان می دهیم که یک فضای ۲- باناخ یک فضای باناخ است و قضیه نقطه ثابت را برای فضاهای ۲- نرمدار اثبات می کنیم . سپس نتایج بدست آمده را به فضاهای ۲- نرمدار نامتناهی بعد گسترش می دهیم.

در فصل سوم مفهوم ۲- نرم تعمیم یافته بیان می شود . فضای عملگرهای خطی کراندار در فضای ۲- نرم تعمیم یافته را مطرح می کنیم. با تعریف نرم عملگرها فضای عملگرهای خطی را به یک مجموعه نرمدار تبدیل می نمائیم. در ادامه این فصل تعریف عملگرهای ۲- خطی کراندار آورده مي شود. سپس روی فضای عملگرهای ۲-خطی کراندار از یک مجموعه ۲- نرم بتوی فضای نرمدار بحث نموده و نشان می دهیم که فضای این عملگرها یک فضای باناخ است و نهایتا به اثبات قضیه باناخ اشتاین هاوس در فضای ۲- نرم خواهیم پرداخت.

در فصل چهارم ابتدا مفهوم فضای n- نرمدارخطی را در حالت کلی بیان می کنیم. مفهوم ایزومتری روی این فضاها را مطرح نموده ونشان می دهیم که فضای n- نرمدار، با $n \geq 2$، یک فضای $(n-1)$ - نرمدار بوده ودر نتیجه یک فضای $(n-r)$- نرمدار به ازای $r=1,\dots,n-1$ می باشد . خواهیم دید که می توان $(n-1)$- نرم را به گونه ای از n - نرم بدست آورده ،با

استفاده از این نتیجه به مطالعه همگرایی و تام بودن در فضای n- نرمدار می پردازیم و در پایان با استفاده از این مطالب قضیه نقطه ثابت را برای فضاهای n- باناخ بیان و اثبات می نمائیم.

فهرست مطالب

فصل چهارم: برخی مطالب روی فضاهای n-نرمدار خطی

فصل اول

فضاهای خطی۲-نرمدار

۱ مقدمات وپیش نیازها

دراین بخش به ارائه تعدادي تعاريف مقدماتی و بعضی از قضايايی که مورد نياز فصول بعدی باشند خواهيم پرداخت .تعاريف و قضاياي مطرح شده در اين بخش از مراجع [۴و۲۴] گرفته شده است.

تعريف ۱. ۱: فرض کنيد X يک فضای برداری روی ميدان اعداد مختلط (حقيقی)باشد.

تابع $P: X \to R$ را يک شبه نرم ناميم اگر :

الف. بازائ هر $x, y \in X$ داشته باشيم : $P(x+y) \le p(x) + P(y)$.

ب. بازائ هر $x \in X, a \in C$ داشته باشيم : $P(ax) = |a|\, P(x)$.

تعريف۱. ۲ : فرض کنيد P يک شبه نرم روی فضای برداری X باشد. P را يک نرم ناميم هر گاه $P(x) = 0$ ايجاب کند $x = 0$.

بنابراين اگر نرم روی X رابا $\|.\|$ نشان دهيم خواهيم داشت :

الف. $\|x\| \ge 0$ و $\|x\| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$.

ب. (نامساوی مثلثی) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

ج. برای هر $a \in C$ ، $\|ax\| = |a|\,\|x\|$.

اگر فضای برداری X دارای نرم باشد آنگاه X را فضای نرمدار می ناميم. توجه کنيد که اگر X يک فضای نرمدار بوده و برای هر $x, y \in X$ قرار دهيم $d(x, y) = \|x - y\|$ آنگاه به سادگی ديده می شود که d يک متر روی X است و در نتيجه هر فضای نرمدار يک فضای متريک بوده و در اين حالت d را متريک توليد شده بوسيله نرم می ناميم.

تعريف۱. ۳ : فضای نرمدار X را يک فضای باناخ گوئيم هر گاه X نسبت به متر توليد شده توسط نرم يک فضای کامل باشد .

تعريف۱. ۴: زير مجموعه A از فضای X را يک مجموعه G_d خوانيم هر گاه به صورت اشتراک شمارش پذير گردايه ای از زير مجموعه های باز X باشد .توجه کنيد که هر زير مجموعه باز X يک مجموعه G_d است.

تعریف ۱. ۵: یک فضای برداری مختلط (حقیقی) X را یک فضای ضرب داخلی نامیم هر گاه یک تابع مختلط (حقیقی)روی $X\times X$ که آن را با نماد <.و.> نشان می دهیم، وجود داشته باشد به قسمی که بازای هر $x,y\in X$ و هر اسکالر مختلط (حقیقی) a داشته باشیم:

الف. $<x+y,z>=<x,z>+<y,z>$.

ب. $\overline{<x,y>}=<y,x>$ که در آن $\overline{<x,y>}$ مزدوج مختلط $<x,y>$ است.

ج. $<ax,y>=a<x,y>$.

د. $<x,x>\geq 0$.

ه. $<x,x>=0$ اگروتنها اگر $x=0$.

رابطه $\|x\|^2=<x,x>$ يك نرم روي X تعريف مي كند كه به آن نرم توليد شده توسط ضرب داخلي گفته مي شود.

تعریف۱. ۶: فضای ضرب داخلی H یک فضای هیلبرت نامیده می شود هر گاه H نسبت به نرم تولیدشده بوسیله ضرب داخلی یک فضای کامل باشد.

قضیه ۱. ۷(بئر): اگر X یک فضای متریک کامل باشدآنگاه اشتراک هر گردایه شمارا از مجموعه های باز چگا ل در X نیز در X چگال است.

اثبات: برای دیدن اثبات به [۴] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱. ۸: فرض کنید X یک فضای متریک باشد. X را تفکیک پذیر نامیم هر گاه یک زیر مجموعه شمارش پذیر از X مانند A وجود داشته باشد که در X چگال باشد یعنی $\overline{A}=X$.

تعریف۱. ۹: فرض کنید (X,M,m) یک فضای اندازه پذیر باشد.برای $1\leq p\leq\infty$ $L^p(X)$ فضای متشکل از تمام توابع اندازه پذیرچون f روی X بوده که برای آنها داریم:

$\int_x |f|^p dm<\infty$. برای هر $f\in L^p(X)$ تعریف می کنیم: $\|f\|_p=(\int_x |f|^p dm)^{\frac{1}{p}}$.

رابطه فوق یک نرم روی L^p تعریف می کند و $L^p(X)$ تحت این نرم یک فضای باناخ است. اگر در فضای اندازه (X,M,m) قرار دهیم $X=N$ و $M=p(N)$ که درآن $P(N)$ مجموعه توانی N است و m را اندازه شمارشی در نظر بگیریم آنگاه

فضای $L^p(N)$ را با l^p نمایش می دهیم که به این ترتیب l^p عبارتست از فضای تمام دنباله هایی چون $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ بطوری که $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$. در این فضا نرم به صورت $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می شود.

قضیه ۱. ۱۰(نابرابری هولدر): فرض کنید p,q دو عدد حقیقی وسعت یافته نامنفی باشند به گونه ای که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ اگر $f\in L^p$, $g\in L^q$ ، انگاه $fg\in L^1$ و داریم:

$$\int|fg|\le\|f\|_p\|g\|_q .$$

تعریف۱. ۱۱: فرض کنید X,Y دو فضای برداری باشند. نگاشت T از X به Y یک عملگر خطی است هر گاه برای هر x_1,x_2 در X و اعداد مختلط a_1,a_2 داشته باشیم: $T(a_1x_1+a_2x_2)=a_1Tx_1+a_2Tx_2$. در حالت خاص اگر $Y=C$ انگاه T یک تابعک خطی نامیده می شود .

مجموعه همه عملگرهای خطی پیوسته از X به Y با $B(X,Y)$ نمایش داده می شود. $B(X,X)$ را با $B(X)$ و $B(X,C)$ را با X^* نمایش داده آن را فضای دوگان X می نامیم.

تعریف۱. ۱۲: اگر X,Y دو فضای نرمدار باشند برای عملگرخطی T از X به Y تعریف می کنیم:

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\le1}\|Tx\|.$$

عملگر خطی T کراندار است هر گاه عدد $M>0$ وجود داشته باشد طوری که به ازای هر $x\in X$ ، $\|T\|\le M\|x\|$.

تعریف۱. ۱۳: زیر مجموعه E از فضای هیلبرت H را یکامتعامد گوئیم هر گاه خواص زیر را داشته باشد:

الف. برای هر $e\in E$ داشته باشیم $\|e\|=1$.

ب.برای هر $e_1,e_2\in E$ با $e_1\ne e_2$ داشته باشیم $<e_1,e_2>=0$.

یک پایه یکامتعامد برای H یک زیر مجموعه یکامتعامد ماکسیمال است.

اثبات دو قضیه بعدي را در[٤]مي توانيد ملاحظه کنید.

قضیه ۱. ۱۴(نامساوی بسل[1]): اگر $\{e_n : n\in N\}$ یک مجموعه یکامتعامد از فضای هیلبرت H باشد آنگاه به ازای هر $h\in H$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}|<h,e_n>|^2 \le \|h\|^2$.

قضیه ۱. ۱۵: اگر E یک مجموعه یکا متعامد درفضای هیلبرت H باشد آنگاه گزاره های زیر هم ارزند :

(۱). Eیک پایه برای H است،

(۲). به ازای $h\in H$ آنگاه $h=\sum_{e\in E}<h,e>e$ ،

(۳). اگر $g,h\in H$ آنگاه $<g,h>=\sum\{<g,e><h,e>: e\in E\}$ ،

(۴) اگر $h\in H$ آنگاه $\|h\|^2=\sum\{|<h,e>|^2 : e\in E\}$ ،

تساوی اخیر راتساوی پارسوال گویند.

فرض کنید Xیک فضای متریک باشد تابع $f:X\to X$ یک نگاشت انقباض نامیده می شود هر گاه عدد $a<1$موجود باشد طوری که برای هر $x,y\in X$ ، $d(f(x),f(y))<a\,d(x,y)$.

قضیه۱. ۱۶(نقطه ثابت باناخ[2]): فرض کنید Xیک فضای متریک کامل و $f:X\to X$ یک نگاشت انقباض باشد. آنگاه یک $x\in X$ منحصر بفرد وجود دارد طوری که $f(x)=x$.

اثبات: $x_0\in X$ را انتخاب می کنیم.برای هرعدد صحیح $t>0$تعریف می کنیم $x_t=f(x_{t-1})$. آنگاه چون f یک نگاشت انقباض است پس وجود دارد a<1که برای هر t>1 داریم:

$$d(x_{t+1},x_t)=d(f(x_t),f(x_{t-1}))<ad(x_t,x_{t-1}) \quad .$$

و با استقرا داریم که $d(x_{t+1},x_t)<a^t d(x_1,x_0)$. اگر $x_1=x_0$ آنگاه قضیه اثبات شده است در غیر اینصورت $e>0$را در نظر می گیریم وTرا به قدر کافی بزرگ انتخاب می کنیم تا $a^T<\frac{(1-a)e}{d(x_1,x_0)}$شود آنگاه برای هر $s,t>T$که $t>s$باشد داریم :

$$d(x_1,x_0)a^s\sum_{r=0}^{t-s-1}a^r<\frac{d(x_1,x_0)a^T}{1-a}<e=$$

که این نشان میدهد$\{x_t\}$یک دنباله کشی است بنابراین یک xدر X وجود دارد که $x_t\to x$ اما چون f یک نگاشت انقباض

---

1 .Bessel inequality

۲ .Banach fixed point theorem

است پس پیوسته است.بنابراین $f(x_t)\to f(x)$. اما چون $f(x_t)=x_{t+1}$ و $\{x_{t+1}\}\to x$ بنابراین داریم که $f(x)=x$.فقط باقی می ماند که نشان دهیم x منحصربفرداست. فرض کنیم $f(x)=x$ و $f(y)=y$ که $x\neq y$ بنابراین $d(x,y)=d(f(x),f(y))<ad(x,y)<d(x,y)$ که این تناقض است. ■

اگر $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ دو نرم روی X باشند آنگاه این نرمها با هم معادلند اگر توپولوژیهاي یکساني را روي X تعریف کنند.

قضیه۱. ۱۷: اگر $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ دو نرم روی X باشند آنگاه این نرمها با هم معادلند اگروتنها اگر اعداد مثبت a,b موجود باشند که برای هر $x\in X$:

$$a\|x\|_1\le\|x\|_2\le b\|x\|_1$$

اثبات: برای دیدن اثبات به [۴] مراجعه کنید. ■

۲ مفهوم ۲ - نرم[۱]

دراین بخش مفهوم فضاهاي ۲- نرمدار خطي رامورد بحث قرار می دهیم. فضاهای ۲-نرمداربرای اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط گاهلر[۸و۷و٦] بیان شده و بوسیله دیگر مولفان در موضوعات مختلف گسترش داده شده است **.[۱۹و۱۸و۱۷و۱٦و۱٥و۱۱و۹]** ابتدا به تعریف ۲- نرم می پردازیم.

تعریف۲. ۱: فرض کنید X یك فضاي برداري با بعد بزرگتر از ۱ باشد . $\|.,.\|$را یك تابع حقیقي مقدار روي $X\times X$ در نظر بگیریدطوری که در موارد زیر صدق کند:

۱. $\|x,y\|=0$ اگرو تنها اگر x,y وابسته خطي باشند.

۲. $\|y,x\|=\|x,y\|$ براي هر x,y در X .

۳. $\|lx,y\|=|l|\,\|x,y\|$ براي هر $l\in R$ و $x,y\in X$.

۴. $\|x+y,z\|\le\|x,z\|+\|y,z\|$ براي هر x,y,z در X .

در اینصورت $\|.,.\|$یك ۲- نرم روي X خوانده مي شود و$(X,\|.,.\|)$ یك فضاي ۲- نرمدار[۲] خطي نامیده مي شود . ازجمله ویژگیهاي ۲- نرم اینست که تابعی نامنفي است

---

[۱] . 2-norm
[۲] . Linear 2-normed space

ودر حقیقت با توجه به اینکه برای هر $x,y\in X$ می توان دید که:

$$0=\|0,y\|=\|x-x,y\|\le\|x,y\|+\|x,y\|=2\|x,y\|$$

بنا براین داریم: $\|x,y\|\ge 0$. همچنین می توان دید که بازای هر $x,y\in X$ و $a\in R$ رابطه $\|x,y\|=\|x,y+ax\|$ نیز برقرار است.

مثال ۲. ۲: فرض کنید $X=R^3$ تابع $\|x,y\|=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\right|$ که $x=(x_1,x_2,x_3)$ و $y=(y_1,y_2,y_3)$ یک ۲-نرم روی X تعریف می کند:

$$\|x,y+ax\|=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1+ax_1 & y_2+ax_2 & y_3+ax_3\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}+a\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\right|=\|x,y\| .$$

هر فضای ۲- نرمدار یک فضای برداری با توپولوژی موضعا محدب[۱] است. در واقع برای هر $b\in X$ تابع p_b با ضابطه $p_b(x)=\|x,b\|$ ؛ روی X یک شبه نرم است. خانواده $p=\{p_b:b\in X\}$ از شبه نرمها یک توپولوژی موضعامحدب روی X تولید می کند. برای این منظور فرض کنید که U زیر مجموعه ای از X باشد در اینصورت U باز است اگر و تنها اگر برای هر $x_0\in U$ شبه نرمهای $p_{b_n},\dots,p_{b_1}$ در P و اعداد مثبت $e_n,\dots,e_1$ موجود باشند طوری که $\bigcap_{j=1}^{n}\{x\in X: p_{b_j}(x-x_0)<e_j\}$ زیر مجموعه U باشد.

نشان می دهیم $\bigcap_{p\in P}\{x:p(x)=0\}=0$ فرض کنید $x\neq 0$ و $x\in\bigcap_{p\in P}\{x:p(x)=0\}$ در این صورت:

---

۱. Locally convex

$$x \in \bigcap_{p\in P}\{x : p(x)=0\} = \bigcap_{b\in X}\{x : p_b(x)=0\} = \bigcap_{b\in X}\{x : \| x,b \| = 0\} \quad .$$

بنابراین حداقل دو عنصر مستقل خطی مثل b_1,b_2 موجود است که $\|x,b_1\| = \|x,b_2\| = 0$ و این یعنی b_1,b_2 وابسته خطی اند که تناقض است.پس $x=0$ ازاین موضوع نتیجه گرفته می شود که توپولوژي تولیدی موضعا محدب است.

تعریف۲. ۳ : فرض کنیم $(X,\|.,.\|)$ یك فضاي ۲-نرمدار و W_1,W_2 دوزیر فضاي X باشند. نگاشت $f : W_1\times W_2 \to R$ یك تابعك ۲-خطي[1] روي $W_1\times W_2$ نامیده می شود هر گاه براي هر $l_2,l_1\in R$ و $y_1,y_2\in W_2$ و $x_1,x_2\in W_1$ روابط زیر برقرار باشد:

۱. $f(x_1+x_2, y_1+y_2) = f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2) + f(x_2,y_1) + f(x_2,y_2)$

۲. $f(l_1x_1, l_2x_2) = l_1 l_2 f(x_1,x_2)$.

تعریف۲. ۴: تابعک دو خطي f کراندار است هر گاه یك عدد حقیقي نامنفي مانند M موسوم به (ثابت لیپشیتس[2]) موجود باشد طوری که براي هر $x\in W_1, y\in W_2$ داشته باشیم:

$$| f(x,y) | \le M \| x,y \|$$

وهمچنین نرم این تابعك ۲-خطي بصورت زیر تعریف میشود :

$$\| f \| = \inf\{M \ge 0 : | f(x,y) | \le M \| x,y \|\}$$

می توان نشان داد که روابط زیر برقرارند:

$$\| f \| = \sup\{| f(x,y) | : (x,y)\in W_1\times W_2, \| x,y \| \le 1\}$$

$$= \sup\{| f(x,y) | : (x,y)\in W_1\times W_2, \| x,y \| = 1\}$$

$$= \sup\{\frac{| f(x,y) |}{\| x,y \|} ; (x,y)\in W_1\times W_2, \| x,y \| > 0\}$$

برای نشان دادن روابط فوق اولا بنا به تعریف $\|f\|$داریم :

$$| f(x,y) | \le \| f \| \| x,y \|$$

درنتیجه:

$$\sup\{\frac{| f(x,y) |}{\| x,y \|} ; \| x,y \| \ne 0\} \le \| f \|$$

حال فرض کنیم :

$$A = \sup\{| f(x,y) | : \| x,y \| = 1, (x,y)\in W_1\times W_2\}$$

---

2. Bilinear 2-functional

۲. Lipschitz constant

بنابراین

$$A=\sup\{\frac{|f(x,y)|}{\|x,y\|}:\|x,y\|=1\}$$
$$\leq \sup\{\frac{|f(x,y)|}{\|x,y\|}:\|x,y\neq 0\|\}$$
$$\leq \|f\| \qquad (1)$$

از طرفی $\left\|\frac{(x,y)}{\|x,y\|}\right\|=1$ ، بنابراین:

$$\left|f(\frac{(x,y)}{\|x,y\|})\right|\leq A$$

یا $|f(x,y)|\leq A\|x,y\|$. پس می توان گفت:

$$\|f\|\leq A \qquad (2)$$

با استفاده از روابط (۱) و(۲)داریم:

$$\|f\|=\sup\{|f(x,y)|:\|x,y\|=1,(x,y)\in W_1\times W_2\}.$$

برای اثبات سایر تساوی ها به طور مشابه می توان عمل نمود. ■

۳ بردارهای b-عمود[۱]

فرض کنید $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲-نرم باشد فضای باناخ تمام تابعکهای ۲-خطی کراندار روی $X\times<b>$ را که در آن $<b>$ زیر فضای تولید شده توسط $b\in X$ باشد را با $X^*{}_b$ نمایش می دهیم.تعاریف آمده در این بخش از[۱۹]گرفته شده است.

تعریف۳. ۱: فرض کنید $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲-نرمدار باشد و $x,y\in X$. هرگاه $b\in X$ موجود باشد طوری که بازای هر $a\in R$ روابط زیر برقرار باشند:

۱. $\|x,b\|\neq 0$

۲. $\|x,b\|\leq\|x+ay,b\|$

آنگاه گوئیم x بر y b-عمود است و می نویسیم $x\perp^b y$.

به این ترتیب برای دو زیر فضای W_1,W_2 از X هر گاه بتوان $b\in X$ یافت طوری که برای هر $y_1\in W_1,y_2\in W_2$ رابطه $y_1\perp^b y_2$ برقرار باشد گوئیم $W_1\perp^b W_2$.

---

[۱]. b –orthogonal vectors

تعریف۳. ۲: فرض کنید که $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲-نرمدار خطی $b\in X$ و W یک زیر فضای برداری از X باشد. آنگاه $w_0\in W$ را یک b-بهترین تقریب[۱] برای $x\in X$ گوئیم هر گاه $x-w_0\perp^b W$.

مجموعه همه b-بهترین تقریبهای x در W را با $P^b w(x)$ نمایش می دهیم.

تعریف۳. ۳ : W را یک b- proximinal می نامیم اگربرای هر $x\in X-(W+<b>)$ عنصر $w_0\in W$ موجود باشد طوری که $w_0\in P^b w(x)$.

لم زیر در اثبات قضیه ای که بعدا می آید مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

لم۳. ۴: فرض کنید $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲-نرمدار خطی و W یک زیر فضای برداری از X و $b\in X$ و $<b>$ زیر فضای تولید شده توسط b باشد. اگر $x_0\in X$ به گونه ای باشد که $d=\inf\{\|x_0-w,b\|:w\in W\}>0$ آنگاه تابع کراندار $f:X\times<b>\to R$ موجود است طوری که $f|_{W\times<b.>}=0$ و $\|f\|=\frac{1}{d}$, $f(x_0,b)=1$.

اثبات: تعریف می کنیم :

$$f(x,b)=\frac{\inf\{\|x-w,b\|;w\in W\}}{d}$$

فرض کنیم $w\in W$ باشد در اینصورت

$f(w,b)=\frac{\inf\{\|x-w,b\|;w\in W\}}{d}=0$ پس به ازای هر $w\in W$ داریم

$f(w,b)=0$ پس $f|_{W\times<b>}=0$ از طرفی :

$$f(x_0,b)=\frac{\inf\{\|x_0-w,b\|;w\in W\}}{d}\}=\frac{d}{d}=1\,.$$

بنابراین

$$\|f\|=\sup\{|f(x,b)|:\|x.,b\|=1\}=\sup\frac{\{\inf\|x-w,b\|:\|x,b\|=1\}}{d}=\frac{1}{d}\times1=\frac{1}{d}\,.$$

در نتیجه $\|f\|=\frac{1}{d}$. ■

در این قسمت ویژگیهای b-عمود بودن را در فضای ۲-نرم دار بیان می کنیم .فرض کنید X یک فضای خطی و F زیر مجموعه ای از X باشد.

---

[۱] . b –best approximation

قرار می دهیم :

$M_F{}^b = \{ f \in X^*{}_b ; \| f \| = 1 , f(x,b) = \| x,b \| ; \forall x \in F \}$.

قضیه۳. ۵ : فرض کنید X یک فضای ۲-نرمدار،

$b, y \in X$ و $x \in X - <b>$ باشد. در اینصورت عبارات زیر معادلند:

(۱). $x \perp^b y$.

(۲). $f \in M_x{}^b$ موجود است طوری که $f(y,b) = 0$.

اثبات: (۲) $\leftarrow$ (۱): فرض کنیم که $f \in M_x{}^b$ موجود باشد طوری که $f(y,b) = 0$ پس

$$\| x,b \| = f(x,b) = f(x+ay,b) \le \| f \| \| x+ay,b \| = \| x+ay,b \|$$

پس $x \perp^b y$.

(۱) $\leftarrow$ (۲) : اگر $x \perp^b y$ و $W = <y>$، زیر فضای تولید شده توسط y باشد. آنگاه بنا به تعریف $x \perp^b y$ داریم : $d = \inf\{ \| x-ay,b \| : ay \in W \} \ge \| x,b \|$ بنابراین $d = \| x,b \|$. حال بنا بر لم ۳. ۴ یک $g \in X^*{}_b$ موجود است که $\| g \| = \frac{1}{d}, g(y,b) = 0, g(x,b) = 1$

قرار می دهیم $f = d\, g$ پس $\| f \| = 1, f(x,b) = \| x,b \|, f(y,b) = 0$ ■

نتیجه ۳. ۶: اگر X یک فضای ۲-نرمدار خطی و W یک زیر فضای برداری از X و $b \in X$ و F زیر مجموعه ای از $X - (W + <b>)$ باشد آنگاه عبارات زیر با هم معادلند:

(۱). $F \perp^b W$.

(۲). یک $f \in M_F{}^b$ موجود است طوری که $f|_{W \times <b>} = 0$.

اثبات : (۱) $\leftarrow$ (۲ $F \perp^b W$) در نتیجه برای هر $x \in F$ وجود دارد یک $f \in M_x{}^b$ که $f(w,b) = 0$ و $f|_{W \times <b>} = 0$. پس برای هر $x \in F$ داریم $x \perp^b W$ و $f(x,b) = \| x,b \|$ در نتیجه $f \in M_F{}^b$.

(۲) $\leftarrow$ (۱): فرض کنیم $f \in M_F{}^b$ باشد پس برای هر $x \in F$ داریم ، $f(x,b) = \| x,b \|$ و $\| f \| = 1$. چون $f|_{W \times <b>} = 0$ ، برای هر $w \in W$ ، $f(w,b) = 0$. پس برای هر $w \in W$ و $x \in F$ $x \perp^b w$ ، در نتیجه $F \perp^b W$. ■

مثال ۳. ۷: فرض کنید $X = R^3$ و $W = \{(0,x,x) : x \in R\}$ و بازای هر $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in X$ نرم روی X به صورت زیر باشد:

$$\| (x_1,x_2,x_3) , (y_1,y_2,y_3) \| =$$
$$\max\{ | x_1y_2 - x_2y_1 | + | x_1y_3 - x_3y_1 | , | x_1y_2 - x_2y_1 | + | x_2y_3 - x_3y_2 | \} .$$

اگر $x = (1,0,1), b = (2,2,0)$ در اینصورت $x \perp^b W$.

در واقع کافیست نشان دهیم که بازای هر $w\in W,a\in R$ رابطه $\|x,b\|\le\|x+aw,b\|$ برقرار است. چون $\|x,b\|=4$ پس اگر $w=(0.t,t)\in W$ آنگاه $\|x+aw,b\|=2(|1-ta|+|1+ta|)$ از طرفی بازای هر $t,a\in R$ داریم $2(|1-ta|+|1+ta|)\ge 4$ پس حکم برقرار است. ■

تعریف ۳. ۸ : نگاشت $P:X\to R$ که در آن X یک فضای برداری است، یک نگاشت زیر خطی[۱] گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $P(x+y)\le P(x)+p(y)$.

۲. بازای هر $a\ge 0,x\in X$; $P(ax)=aP(x)$.

در زیر نتیجه ای از قضیه هان باناخ[۲] را یاد آوری می کنیم.

قضیه۳. ۹: اگر q یک نگاشت زیر خطی روی فضای برداری Y,X یک زیر فضای برداری X باشدو فرض کنید j یک تابعک خطی روی Y باشد که برای هر $x\in Y$ ، $j(x)\le q(x)$ آنگاه j را می توان به یک تابعک خطی روی X مانند y توسعه داد طوری که برای هر $x\in X$: $y(x)\le q(x)$.

اثبات: برای اثبات به [۴] مراجعه کنید. ■

قضیه ۳. ۱۰: اگر X یک فضای ۲-نرمدار خطی و $x,y\in X-<b>,b\in X$ باشد آنگاه عددی مانند a وجود دارد طوری که $x\perp^b ax+y$.

اثبات: زیر فضای تولید شده توسط x، $M=<x>$ را در نظر بگیرید. $f_b:M\to R$ با ضابطه $f_b(ax)=a\|x,b\|$ را تعریف کنید. چون $P_b(x)=\|x,b\|$ یک نگاشت زیر خطی است و $f_b(z)\le P_b(z)$ پس بنابر قضیه هان باناخ یک تابعک خطی $\Lambda_b:X\to R$ وجود دارد طوری که $\Lambda_b(x)=P_b(x)$ و برای هر $z\in X$ $\Lambda_b(z)\le\|z,b\|$. بنا به تعریف نرم تابعکهای ۲-خطی داریم $\|\Lambda_b\|=1$. به ازای y تعریف می کنیم $a=-\dfrac{\Lambda_b(y)}{\Lambda_b(x)}$. در این صورت $\Lambda_b(ax+y)=0$ و $x\perp^b ax+y$. ■

قضیه ۳. ۱۱: اگر X یک فضای ۲-نرمدار خطی و $x,y\in X-<b>,b\in X$ باشد آنگاه عددی مانند a وجود دارد طوری که $ax+y\perp^b x$.

---
[۱]. Sublinear

[۲].Hahn Banach theorem

اثبات: بنا به تعریف $ax+y\perp^b x$ اگروتنها اگربرای هر اسکالر k $\|ax+y,b\|\le\|ax+y+kx,b\|$ یا اگروتنها اگر $\|ax+y,b\|$کوچکترین مقدار $\|kx+y,b\|$ باشد . از آنجا که $\|kx+y,b\|$ تابعی پیوسته بر حسب kمی باشد پس می نیمم خود را کسب می کند به این ترتیب a همان مقداری است که $\|kx+y,b\|$می نیمم مطلق خود را اختیار می کند. ■

٤ فضای ۲-هموار[۱]

در این بخش به تعریف فضاي ۲-هموار مي پردازیم[۱۹].سپس طي دو قضیه شرایط ۲-هموار بودن یك فضا را بررسي مي کنیم.

تعریف٤. ۱: اگر X یک فضای ۲-نرمدار خطی باشد گوئیم X ۲-هموار است هر گاه برای هر $x\neq 0,b\in X$ با $\|x,b\|\neq 0$ تابعک خطی منحصر بفردی مثل Λ_b موجود باشدطوری که $\|\Lambda_b\|=1\,,\Lambda_b(x)=\|x,b\|$.

قضیه ٤ . ۲: اگر Xیک فضای ۲-نرمدار خطی باشد فضای X ، ۲-هموار است اگروتنها اگر برای هر $b,x,y\in X$ با $\|x,b\|\neq 0$ عدد منحصر بفرد aطوری وجود داشته باشد که $x\perp^b ax+y$.

اثبات : فرض کنیم که X ، ۲-هموار باشد.پس برای هر $b,x,y\in X$ با $\|x,b\|\neq 0$ یک تابعک خطی منحصر بفرد مثل f_b وجود دارد که $\|f_b\|=1\,,f_b(x)=\|x,b\|$. اگر برای $x,y\in X$ و اعداد a,c رابطه $x\perp^b ax+y$ و $x\perp^b cx+y$بر قرار باشد . آنگاه بنابر قضیه ۳ . ٥ تابعکهای خطی f_b,g_bطوری وجود دارد که $f_b(x)=g_b(x)=\|x,b\|$ و

$\|f_b\|=\|g_b\|=1$ و $f_b(ax+y)=g_b(cx+y)=0$. پس $a=-\dfrac{f_b(y)}{f_b(x)}$ و $c=-\dfrac{g_b(y)}{g_b(x)}$ از آنجا که $f_b=g_b$ پس $a=c$.

برعکس فرض کنیم برای هر $x,y\in X$ عدد منحصر بفرد aوجود دارد که $x\perp^b ax+y$. فرض کنید برای هر $b,x,y\in X$ با $\|x,b\|\neq 0$ تابعکهای خطی g_b f_b وجود داردکه $\|f_b\|=\|g_b\|=1$ و $f_b(x)=g_b(x)=\|x,b\|$. اگر برای یک $y\in X$ ، $f_b(y)\neq g_b(y)$ آنگاه با

---

[۱]. 2- smoth space