دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

خاصیت تفکیک پذیری توابع معین مثبت روی گروه های موضعاً فشرده

نگارش:

هیثم مردانی

استاد راهنما:

دکتر حبیب امیری

استاد مشاور:

دکتر سعید مقصودی

آذر ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

یکی از مسائل اساسی که در بحث نمایش‌ها در آنالیز هارمونیک وجود دارد، این است که با هر نمایش می‌توان توابع معین مثبت را ساخت و برعکس، با استفاده از هر تابع معین مثبت روی G می‌توان یک نمایش روی گروه موضعاً فشرده G را معرفی کرد. بنابر قضیهٔ گلفاند - رایکوف [۱] داریم که اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، آن‌گاه نمایش‌های تحویل‌ناپذیر روی G می‌توانند G را تفکیک کنند. یعنی اگر x و y دو عضو متمایز G باشند، آن‌گاه نمایش تحویل‌ناپذیر π از G روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}_\pi$ موجود است که $\pi(x) \neq \pi(y)$. با توجه به ارتباط گفته شده بین نمایش‌ها و توابع معین مثبت می‌توان نتیجه گرفت که توابع معین مثبت می‌توانند اعضای G را تفکیک کنند. حال ما این خاصیت را برای زیرگروه بستهٔ H از G به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$P_H(G) = \{\phi \in P(G) : \phi(h) = ۱, h \in H \text{هر برای}\}.$$

اگر برای هر $x \in G\backslash H$ یک $\phi \in P_H(G)$ موجود باشد که $\phi(x) \neq ۱$، آن‌گاه گوییم G دارای خاصیت H - تفکیک‌پذیری است. هرگاه G برای هر زیرگروه بستهٔ H دارای خاصیت H - تفکیک‌پذیری باشد، آن‌گاه گوییم G دارای خاصیت تفکیک‌پذیری است. در این رساله می‌خواهیم خاصیت H - تفکیک‌پذیری گروه G وقتی H ویژگی‌های متفاوتی دارد را بررسی کنیم.

واژه‌های کلیدی: *توابع معین مثبت، خاصیت تفکیک‌پذیری، گروه موضعاً فشرده،*

---
[۱] $Gelfand - Raikov$

فهرست مطالب

پیشگفتار

یکی از مسائل اساسی که در نمایش‌ها در آنالیز هارمونیک وجود دارد، این است که با هر نمایش می‌توان توابع معین مثبتی را ساخت و برعکس، با استفاده از هر تابع معین مثبت روی G می‌توان یک نمایش روی گروه موضعاً فشرده G داشت. بنابر قضیهٔ گلفاند - رایکوف داریم که اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، آن‌گاه نمایش تحویل‌ناپذیر روی G می‌توانند G را تفکیک کنند. با توجه به ارتباط میان توابع معین مثبت و نمایش‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که توابع معین مثبت می‌توانند اعضای G را تفکیک کنند. حال ما این خاصیت را برای زیرگروه بستهٔ H از G به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$P_H(G) = \{\phi \in P(G) : \phi(h) = ۱, \text{هر برای} \ h \in H\}.$$

اگر برای هر $x \in G \backslash H$ یک $\phi \in P_H(G)$ موجود باشد که $\phi(x) \neq ۱$، گوییم G دارای خاصیت H - تفکیک‌پذیری است. هرگاه G برای هر زیرگروه بستهٔ H دارای خاصیت H - تفکیک‌پذیری باشد، آن‌گاه گوییم G دارای خاصیت تفکیک‌پذیری است. مطالب این رساله به‌ترتیب زیر است.

در فصل دوم خاصیت تفکیک‌پذیری را به طور کامل بیان کرده و به ذکر مثال‌هایی از آن می‌پردازیم. خاصیت H - تفکیک‌پذیری در حالتی که H نرمال، باز یا فشرده و خاصیت تفکیک‌پذیری را در حالتی که G یک $[SIN]$ - گروه باشد، بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم ابتدا به این قضیه می‌پردازیم که اگر G یک گروه موضعاً فشردهٔ تقریباً همبند باشد، آن‌گاه $[SIN]$ - گروه بودن G معادل با این است که G دارای خاصیت تفکیک‌پذیری باشد. خاصیت تفکیک‌پذیری را با خاصیت توسیع مقایسه و شرایط معادل بودن آن‌ها را با هم بیان کرده و در پایان فصل کاربرد خاصیت H - تفکیک‌پذیری را در جبر فوریهٔ $A(G)$ بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم ابتدا خواص تفکیک‌پذیری را بیان می‌کنیم و در پایان هم به بررسی این‌که اگر G یک گروه خنثی، ضرب نیمه مستقیم دو گروه یا یک گروه پوچ‌توان باشد، می‌پردازیم که تحت چه شرایطی دارای خاصیت تفکیک‌پذیری می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدماتی مربوط به نظریهٔ گروه‌ها

خودریختی

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. نگاشت $f : G \longrightarrow G$ را یک هم‌ریختی می‌نامیم هرگاه $f(xy) = f(x)f(y)$. حال اگر علاوه بر آن f یک به یک و پوشا هم باشد، آن‌گاه f را یک خودریختی روی G می‌نامیم.*

به‌عنوان مثال، اگر $a \in G$ باشد، در این‌صورت نگاشت $f_a : G \longrightarrow G$ با ضابطه $f_a(y) = a^{-1}ya$ یک خودریختی[1] است. خودریختی‌های به این‌صورت را خودریختی داخلی تعریف شده توسط a نامند. هر خودریختی که برابر یکی از خودریختی‌های داخلی نباشد را یک خودریختی خارجی می‌نامیم.

نکته ۲.۱.۱. *مجموعهٔ کلیهٔ خودریختی‌ها نسبت به عمل ترکیب توابع یک گروه بوده و مجموعهٔ خودریختی‌های داخلی یک زیرگروه نرمال از آن می‌باشد.*

نگاشت $a \to f_a$ یک هم‌ریختی از G به‌توی گروه خودریختی‌های G معرفی می‌کند.

ضرب نیمه مستقیم

فرض کنید G یک گروه با عضو همانی e و N و H به‌ترتیب یک زیرگروه نرمال و یک زیرگروه از G باشند، در این‌صورت شرایط زیر معادلند:

---

[1] $Automorphisms$

(۱) $N \cap H = \{e\}$ و $G = NH$.

(۲) $H \cap N = \{e\}$ و $G = HN$.

(۳) هر عنصر از G را می‌توان به‌عنوان ضرب یکتایی از عناصر N و H نوشت.

(۴) هر عنصر از G را می‌توان به‌عنوان ضرب یکتایی از عناصر H و N نوشت.

(۵) ترکیب نشاندن طبیعی $H \longrightarrow G$ با تصویر طبیعی $G \longrightarrow G/N$ یک یک‌ریختی بین H و گروه خارج‌قسمت G/N را نتیجه می‌دهد.

(۶) یک هم‌ریختی $G \longrightarrow H$ موجود است که روی H همانی است و هسته آن N می‌باشد. اگر یکی (و در نتیجه همهٔ) از این شرایط برقرار باشد، گوییم G یک ضرب نیمه مستقیم از N و H است و می‌نویسیم $G = N \rtimes H$. برای این‌که ابهامی موجود نباشد، بهتر است مشخص کنیم که کدام یک از دو زیرگروه، نرمال است.

توجه:

اگر G ضرب نیمه مستقیمی از زیرگروه نرمال N و زیرگروه H باشد و هردوی N و H متناهی باشند، در این‌صورت مرتبهٔ G برابر با ضرب مرتبه‌های N و H است. توجه شود که بر خلاف ضرب مستقیم، یک ضرب نیمه مستقیم از دو گروه در حالت کلی یکتا نیست. اگر G و G' دو گروه باشند که هردو شامل کپی‌های یک‌ریختی از N به‌عنوان یک زیرگروه نرمال و H به‌عنوان یک زیرگروه و نیز هر دو ضرب نیمه مستقیمی از H و N باشند، در این‌صورت نمی‌توان نتیجه گرفت که G و G' یکریخت‌اند.

ضرب نیمه مستقیم و هم‌ریختی گروه‌ها:

فرض کنید G ضرب نیمه مستقیمی از زیرگروه نرمال N و زیرگروه H باشد و $Aut(N)$ گروه خودریختی‌های N را نشان دهد. نگاشت $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ که با $\varphi(h) = \varphi_h$ و برای هر $h \in H$ و $n \in N$ به‌صورت $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$ تعریف می‌شود، یک هم‌ریختی گروهی است.

برای هر دو گروه N و H (نه لزوماً زیرگروهی از یک گروه داده شده باشد.) و یک هم‌ریختی گروهی $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$، یک گروه جدید $N \rtimes_\varphi H$ (یا به‌طور ساده $N \times_\varphi H$)، ضرب نیمه مستقیمی از H و N نسبت به φ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) به‌عنوان یک مجموعه، $N \rtimes_\varphi H$ ضرب دکارتی $N \times H$ تعریف می‌شود.

(۲) ضرب عناصر $N \rtimes_\varphi H$ توسط هم‌ریختی φ تعیین می‌شود. عمل

$$* : (N \rtimes_\varphi H) \times (N \rtimes_\varphi H) \longrightarrow N \rtimes_\varphi H,$$

که برای هر $n_1, n_2 \in N$ و $h_1, h_2 \in H$ به‌صورت

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2)$$

تعریف می‌شود. با این تعریف $N \rtimes_\varphi H$ یک گروه است که در آن عضو همانی‌اش (e_N, e_H) و عضو وارون عضو (n, h) به‌صورت $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$ تعریف می‌شود. مجموعهٔ $\{(n, e_H) : n \in N\}$ یک زیرگروه نرمال یک‌ریخت با N، و مجموعهٔ $\{(e_N, h) : h \in H\}$ یک زیرگروه یک‌ریخت با H است.
برعکس، فرض کنید G یک گروه که N یک زیر گروه نرمال و H یک زیرگروه از آن باشد به‌طوری‌که هرعضو $g \in G$ به‌طور یکتا به‌صورت $g = nh$ نوشته شود ($n \in N$ و $h \in H$). فرض کنید $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ هم‌ریختی داده شده‌ای باشد که توسط $\varphi(h) = \varphi_h$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که برای هر $n \in N$ و $h \in H$، $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$ برقرار باشد. در این‌صورت G یک‌ریخت با ضرب نیمه مستقیم $N \rtimes_\varphi H$ می‌باشد، یک‌ریختی ضرب nh را به زوج (n, h) می‌فرستد. در G، قانون ضربی را به‌صورت

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1(h_1 n_2 h_1^{-1}), h_1 h_2)$$

داریم.

رابطه آن با ضرب‌های مستقیم :

فرض کنید G یک ضرب نیمه مستقیم از زیرگروه نرمال N و زیرگروه H باشد. اگر H نیز نرمال باشد، در این‌صورت G ضرب مستقیمی ازN و H است. ضرب مستقیم دو گروه N و H می‌تواند به‌عنوان ضرب نیمه مستقیم بیرونی ازN و H نسبت به $\varphi(h) = id_N$ برای هر $h \in H$ درنظر گرفته شود.

سری گروه‌ها

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و $G_0 = G$ و $G_1, \ldots, G_n$ زیرگروه‌های از G باشند که به‌ازای هر i، $0 \leq i \leq n-1$، $G_{i+1} \leq G_i$ باشد. آن‌گاه زنجیر*

$$G_n \leq G_{n-1} \leq \ldots \leq G_1 \leq G_0 = G$$

را یک سری از زیرگروه‌های G می‌نامند.

(۱) اگر به‌ازای هر i، $0 \leq i \leq n-1$ **داشته باشیم** *$G_{i+1} \trianglelefteq G_i$، آن‌گاه سری*

$$G_n \leq G_{n-1} \leq \ldots \leq G_1 \leq G_0 = G$$

را یک سری زیرنرمال برای G می‌گوییم.

(۲) اگر برای هر i، $0 \leq i \leq n-1$ داشته باشیم $G_{i+1} \trianglelefteq G$، آن‌گاه سری

$$G_n \leq G_{n-1} \leq \ldots \leq G_1 \leq G_0 = G$$

را یک سری نرمال برای G گوییم.

تعریف ۴.۱.۱. اگر $G_n \leq G_{n-1} \leq \ldots \leq G_1 \leq G_0 = G$ یک سری زیرنرمال برای G باشد، آن‌گاه G_i/G_{i+1} ($0 \leq i \leq n-1$) را یک عامل این سری و تعداد عامل‌های غیربدیهی این سری را طول این سری می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. سری زیرنرمال زیر را درنظربگیرید:

$$\{e\} = G_n \leq G_{n-1} \leq \ldots \leq G_1 \leq G_0 = G,$$

(۱) سری فوق را یک سری حل‌پذیر(آبلی) برای G گوییم اگر عوامل G_i/G_{i+1} آبلی باشند.

(۲) سری فوق را یک سری مرکزی برای G گوییم اگر این سری نرمال بوده و G_i/G_{i+1} در مرکز G/G_{i+1} باشد.

تعریف ۶.۱.۱. یک گروه G را پوچ‌توان [1] گویند اگر دارای یک سری مرکزی باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی برای G را ردهٔ پوچ توانی G می‌نامند.

یک گروه پوچ‌توان با ردهٔ پوچ‌توانی ۰ از مرتبهٔ ۱ خواهد بود و گروه پوچ‌توان با ردهٔ حداکثر ۱، آبلی است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و $Z_0(G) = \{e\}$، $Z_1(G) = Z(G)$ مرکز G باشد. $Z_2(G) \leq G$ طوری باشد که $Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G))$ و به همین ترتیب به‌ازای هر i، $Z_{i+1}(G) \leq G$ به‌صورت $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$ باشد. در این‌صورت به‌ازای هر i، $Z_i(G)$ را iامین مرکز G گویند و به‌فرم زیر تعریف می‌شود

$$Z_i(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G : [x, y] \in Z_{i-1}(G)\}.$$

از این پس برای سادگی آن را با Z_i نشان می‌دهیم و سری

$$\{e\} = Z_0 < Z_1 < Z_2 \leq \ldots$$

را سری مرکزی بالایی G می‌نامیم.

[1] $Nilpotent$

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنیم $\{e\} = G_n \leq G_{n-1} \leq \ldots \leq G_1 \leq G_0 = G$ یک سری مرکزی در یک گروه پوچ‌توان G باشد. در این‌صورت*

الف) به‌ازای هر i، $0 \leq i \leq n+1$، $G_{n-i} \leq Z_i$ و لذا $Z_n = G$

ب) رده پوچ‌توانی G = طول‌سری‌مرکزی‌بالایی G

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه پوچ‌توان و N یک زیرگروه نرمال غیربدیهی از G باشد. در این‌صورت $N \cap Z(G) \neq \{e\}$.*

برهان . رجوع شود به [۲۴]. □

لم ۱۰.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان و H یک زیرگروه سره از G باشد. در این‌صورت H زیرگروه سره‌ای از $N_G(H)$ (نرمال‌ساز H در G) می‌باشد.*

برهان . رجوع شود به [۲۴]. □

قضیه ۱۱.۱.۱. *الف) هر گروه پوچ‌توان حل‌پذیر است.*

ب) هر زیرگروه و هر تصویر هم‌ریختی از یک گروه حل‌پذیر، حل‌پذیر است.

ج) اگر N یک زیرگروه نرمال از گروه G باشد به‌طوری‌که N و G/N حل‌پذیر باشند، آن‌گاه G حل‌پذیر است.

برهان . رجوع شود به [۲۴]. □

حد تصویری (یا حد معکوس)

تعریف ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم $(X_j)_{j\in I}$ خانواده‌ای از گروه‌ها و $f_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ خانواده‌ای از همریختی‌ها باشد که برای هر $i \leq j$ (ترتیب دیگری نباشد) در خواص زیرصدق کند:*

۱) f_{ii} بر X_i همانی باشد،

۲) برای هر $i \leq j \leq k$، $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$،

در این‌صورت زوج $\left((X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j\in I}\right)$ یک دستگاه معکوس از گروه‌ها و همریختی‌ها روی I نامیده می‌شود. همریختی‌های f_{ij} همریختی‌های انتقال از دستگاه نامیده می‌شوند.

تعریف ۱۳.۱.۱. حد معکوس (تصویری)[۱] از دستگاه معکوس $\left((X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j\in I}\right)$ به‌عنوان یک زیرگروه خاصی از ضرب مستقیم X_i ها به‌صورت

$$X = \varprojlim_{i\in I} X_i = \left\{\vec{a} = (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : a_i = f_{ij}(a_j)\ i \leq j \text{ هر برای}\right\}$$

[۱] *Projective Limit*

تعریف می‌شود.

۲.۱ مقدمات مربوط به توپولوژی

تعریف ۱.۲.۱. رابطه $\leq$ روی مجموعهٔ D ترتیب جزئی خوانده می‌شود هرگاه:

الف) برای هر $x \in D$، $x \leq x$ باشد،

ب) برای هر $x, y \in D$ اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ باشد آن‌گاه $x = y$،

ج) برای هر $x, y, z \in D$ اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ باشد آن‌گاه $x \leq z$.

تعریف ۲.۲.۱. یک مجموعهٔ مرتب جزئی $(D, \leq)$ با این خاصیت که برای هر x و y متعلق به D، zای موجود باشد که $x \leq z$ و $y \leq z$ جهت‌دار خوانده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. یک تابع $x : D \longrightarrow X$ را که در آن $(D, \leq)$ یک مجموعهٔ جهت‌دار است، یک تور[۱] خوانده می‌شود.

همسایگی پایه‌ای (پایهٔ موضعی)

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد.

(الف) خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی X را یک پالایه[۲] گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) اگر $A, B \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $A \cap B \in \mathcal{F}$، و

۲) اگر $A \in \mathcal{F}$ و $A \subseteq B \subseteq X$ آن‌گاه $B \in \mathcal{F}$.

(ب) یک مجموعه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی X را یک پایه پالایه گوییم، هرگاه برای هر $A, B \in \mathcal{B}$ مجموعهٔ $C \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد که $C \subseteq A \cap B$.

تعریف ۵.۲.۱. یک همسایگی پالایه‌ای $\mathcal{U}_x$ برای یک نقطهٔ x، مجموعه‌ای از همسایگی‌های نقطهٔ x است. حال اگر X را یک گروه درنظر بگیریم، در این‌صورت $\mathcal{U}_e$ یک همسایگی پالایه‌ای از عضو همانی e می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱. یک همسایگی پایه‌ای یا پایه موضعی برای یک نقطهٔ x، یک پایه پالایه مانند $\beta(x)$ از همسایگی پالایه‌ای مانند $\mathcal{U}_x$ است به‌طوری‌که شمول $\beta(x) \subset \mathcal{U}_x$ نتیجه دهد برای هر $V \in \mathcal{U}_x$ یک $B \in \beta(x)$ موجود

---

[۱] Net

[۲] $Filter$

است که $B \subset V$. به‌عبارتی می‌توان نوشت، برای هر همسایگی V یک همسایگی B در همسایگی پایه‌ای پیدا شود که مشمول در V باشد.

۳.۱ گروه‌های موضعاً فشرده و جبرهای آن‌ها

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه و به‌علاوه یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند*

۱) نگاشت ضرب $(x,y) \mapsto xy$ از $G \times G$ به G پیوسته باشد،

۲) نگاشت وارون $x \mapsto x^{-1}$ از G به G پیوسته باشد،

در این‌صورت G را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم. در این‌جا $G \times G$، با توپولوژی حاصل‌ضرب درنظرگرفته شده است.

پیوستگی ضرب به این مفهوم است که برای هر همسایگی $\mathcal{W}$ حول xy همسایگی‌های $\mathcal{U}$ حول x و $\mathcal{V}$ حول y موجود باشند که $\mathcal{U}\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$.

پیوستگی وارون یعنی برای همسایگی $\mathcal{U}$ حول x^{-1} یک همسایگی $\mathcal{V}$ حول x موجود است که $\mathcal{V}^{-1} \subseteq \mathcal{U}$.

$A \subseteq G$ متقارن است هرگاه $A^{-1} = A$.

گروه توپولوژیک G را گسسته خوانیم هرگاه توپولوژی آن توپولوژی گسسته باشد، یعنی هر زیرمجموعهٔ آن باز باشد.

نکاتی که باید در گروه‌های توپولوژیک مورد توجه قرار داد:

۱) اگر U یک مجموعهٔ باز در G و $a \in G$ باشد، در این‌صورت aU باز و همچنین U^{-1} نیز باز است.

۲) اگر $A \subseteq G$ و U در G باز باشد، آن‌گاه

$$AU = \{ax : a \in A, x \in U\} \qquad , \qquad AU = \bigcup_{a \in A} aU$$

باز است و همچنین UA نیز باز است.

۳) اگر U همسایگی حول e باشد، آن‌گاه همسایگی متقارن V حول e موجود است که $VV = V^{2} \subseteq U$.

۴) اگر $H \leq G$ باشد، آن‌گاه $\overline{H} \leq G$.

۵) اگر H زیرگروهی باز از G باشد، آن‌گاه H بسته نیز است.

۶) اگر A و B فشرده باشند، آن‌گاه AB نیز فشرده خواهد بود.

۷) مجموعه هم‌دسته‌های چپ H در G را با G/H نمایش می‌دهیم، نگاشت

$$q : G \longrightarrow G/H$$
$$x \mapsto q(x) = xH$$

را نگاشت خارج‌قسمت گوییم. G/H را با توپولوژی خارج‌قسمت به‌صورت، O در G/H باز است اگر وتنها اگر $q^{-1}(O)$ در G باز باشد، درنظرمی‌گیریم که با این توپولوژی q پیوسته می‌شود.

قضیه ۲.۳.۱. *اگر $H \leq G$ باشد،*

الف) شرط لازم و کافی برای این‌که G/H هاسدورف باشد آن است که H بسته باشد.

ب) اگر G موضعاً فشرده و H بسته باشد، در این‌صورت G/H نیز موضعاً فشرده است.

ج) اگر H زیرگروه نرمال G باشد، آن‌گاه G/H یک گروه توپولوژیک است.

تعریف ۳.۳.۱. *گروه توپولوژیک G را موضعاً فشرده گوییم هرگاه هر نقطهٔ آن دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد.*

لم ۴.۳.۱. *[اوریزن] فرض کنید X فضای موضعاً فشرده و $K \subseteq X$ فشرده و $A \subseteq X$ بسته باشد به‌طوری‌که $A \cap K = \emptyset$، آن‌گاه تابع پیوسته‌ای با محمل فشرده از X به $[0, 1]$ وجود دارد که روی A، $f \equiv 0$ و روی K، $f \equiv 1$ است.*

برهان . به [۲۶] رجوع شود. □

تعریف ۵.۳.۱. *فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. گوییم شاخص H در G برابر n است و می‌نویسیم $[G : H] = n$، هرگاه G برابر اجتماع n هم‌مجموعهٔ مجزای H باشد، یعنی $G = \bigcup_{i=1}^{n} x_iH$. اگر تعداد این هم‌مجموعه‌ها نامتناهی باشد می‌نویسیم $[G : H] = \infty$.*

لم ۶.۳.۱. *فرض کنیم $H \leq G$ و H آبلی و شاخص H در G متناهی و برابر n باشد، در این‌صورت $\overline{H}$ نیز زیرگروهی آبلی و با شاخص کوچکتر یا مساوی n در G است.*

لم ۷.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه و H زیر گروه بسته‌ای (بازی) از آن با شاخص متناهی باشد، در این‌صورت H باز (بسته) نیز هست.*

برهان . به [۱۱] رجوع شود. □

تعریف ۸.۳.۱. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.*

۱) *مجموعه تمام توابع پیوستهٔ مختلط - مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه با عمل‌های جمع معمولی توابع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است، و به‌علاوه برای $f \in C(X)$ محمل f [۱] را به‌صورت زیر تعریف می‌شود*

$$supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq ۰\}}.$$

۲) *مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط - مقدار کران‌دار روی X را با $C_b(X)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $C_b(X)$ یک زیر فضای $C(X)$ و همراه با نرم $\|.\|_\infty$ یک فضای باناخ است.*
یادآوری می‌کنیم که

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \quad ; \quad f \in C_b(X).$$

۳) *مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط - مقدار f روی X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_۰(X)$ نشان می‌دهیم. در بی‌نهایت صفر شدن به این معنی است که برای هر $۰ < \varepsilon$ زیرمجموعهٔ فشردهٔ K_ε از X موجود است که برای هر $x \in G\backslash K_\varepsilon$ داریم $|f(x)| < \varepsilon$.*

۴) *مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط - مقدار f روی X با محمل فشرده را با $C_{۰۰}(X)$ و یا با $C_c(X)$ نشان می‌دهیم که همراه با نرم $\|.\|_\infty$ یک فضای باناخ می‌باشد.*

تعریف ۹.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. اندازهٔ رادون غیرصفر λ روی G را یک اندازهٔ هار چپ گوییم هرگاه*

$$\forall x \in G, \forall B \in \mathcal{B}(G) \quad ; \quad \lambda(xG) = \lambda(G).$$

اندازهٔ هار با تقریب یک عدد ثابت مثبت منحصربه‌فرد است. اگر G فشرده باشد می‌توان λ را طوری اختیار کرد که $\lambda(G) = ۱$ باشد. دراین حالت گوییم اندازهٔ هار نرمال شده روی G است.

تابع مدولار:

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده با اندازهٔ هار λ باشد. اگر برای $x \in G$ تعریف کنیم $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$، در این‌صورت با استفاده از این رابطه $y(Ex) = (yE)x$، λ_x دوباره یک اندازهٔ هار چپ می‌شود.

---
[۱] $Support$

قضیه ۱.۳.۱۰. اگر λ و μ اندازه‌های هار چپی در G باشند، در این‌صورت $c \in (0, \infty)$ موجود است که $\mu = c\lambda$.

برهان . به قضیهٔ ۲-۲۰ از مرجع [۷] رجوع شود. $\square$

بنابه یکتایی قضیهٔ بالا یک عدد $\Delta(x) > 0$ موجود است که $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$ و $\Delta(x)$ مستقل از انتخاب اصلی(اولیه) λ می‌باشد. تابع $\Delta : G \longrightarrow (0, \infty)$ تعریف شده را تابع مدولار G نامند.

گزاره ۱.۳.۱۱. Δ یک هم‌ریختی پیوسته از G به‌توی $\mathbb{R}^+$ است، به‌علاوه برای هر $f \in L^1(G)$،

$$\int R_y f d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f d\lambda.$$

برهان . به گزارهٔ ۲-۲۴ از مرجع [۷] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱.۳.۱۲. گروه موضعاً فشردهٔ G مدولار یکه نامیده می‌شود اگر $\Delta \equiv 1$ باشد یا این‌که اندازهٔ هار چپ آن با اندازهٔ هار راست آن برابر باشد.

گزاره ۱.۳.۱۳. اگر K هر زیرگروه فشرده از G باشد، در این‌صورت $\Delta(G/K) \equiv 1$ است.

برهان . به گزارهٔ ۲-۲۷ از مرجع [۷] رجوع شود. $\square$

نتیجه ۱.۳.۱۴. اگر G فشرده یا آبلی باشد، در این صورت G مدولار یکه است.

تعریف ۱.۳.۱۵. $E \subseteq X$ را موضعاً پوچ نامیم اگر $E \cap K$ پوچ باشد که در آن K یک زیرمجموعه فشرده دلخواه از X است.

تعریف ۱.۳.۱۶. فرض کنیم G موضعاً فشرده و λ اندازهٔ هار چپ روی G باشد. برای $0 < p < +\infty$ تعریف می‌کنیم

$$L^p(G, \lambda) = \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\} : \|f\|_p < +\infty, \text{اندازه‌پذیراست } - \lambda \text{ ، } f \right\}.$$

به‌جای $L^p(G, \lambda)$ می‌نویسیم $L^p(G)$. با تعریف اعمال ضرب و جمع نقطه‌ای مجموعه‌های $L^p(G)$ به فضای برداری تبدیل می‌شوند. چنان‌چه $p < +\infty$ باشد، در این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}},$$

و برای $p = +\infty$ تعریف می‌کنیم

$$L^{\infty}(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\} : \|f\|_{\infty} < \infty\},$$

که در آن

$$\|f\|_{\infty} = \inf\left\{M \in \mathbb{R} : \{t : |f(t)| > M\} \text{ موضعاً پوچ باشد}\right\}.$$

تعریف ۱.۳.۱۷. گوییم فضای برداری $\mathcal{A}$ یک جبر روی اعداد مختلط است، هرگاه نگاشت $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ که ضرب روی $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود و با $(a, b) \mapsto ab$ نمایش داده می‌شود یک نگاشت دوخطی باشد. به‌عبارت دیگر

$$a(b + c) = ab + ac \quad , \quad (a + b)c = ac + bc$$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b),$$

و همچنین $a(bc) = (ab)c$ برای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$.

تعریف ۱.۳.۱۸. جبر نرم‌دار $\mathcal{A}$ را جبر باناخ گوییم هرگاه $\mathcal{A}$ با نرم مربوطه کامل باشد و داشته باشیم

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

تعریف ۱.۳.۱۹. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر روی $\mathbb{C}$ باشد.
منظور از یک برگشت روی $\mathcal{A}$ عبارت است از نگاشت $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ که با $a \mapsto a^*$ نمایش داده می‌شود به‌طوری‌که برای هر $a, b, \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} (a + b)^* &= a^* + b^* \qquad (ab)^* = b^* a^* \\ (\lambda a)^* &= \bar{\lambda} a^* \qquad\quad (a^*)^* = a. \end{aligned}$$

تعریف ۱.۳.۲۰. یک باناخ * - جبر، یک جبر باناخ مجهز به یک برگشت است به‌طوری‌که

$$\|a^*\| = \|a\| \quad , \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

تعریف ۱.۳.۲۱. یک باناخ * - جبر را یک C^* - جبر گوییم هرگاه

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad , \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

تعریف ۲۲.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ باشند. یک هم‌ریختی جبری از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ نگاشت خطی و کران‌دار $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ است که

$$\forall x, y \in \mathcal{A} \qquad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ یک $*$ - جبر باشند، آن‌گاه یک $*$ - هم‌ریختی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ عبارت است از هم‌ریختی جبری ϕ که

$$\forall x \in \mathcal{A} \qquad \phi(x^*) = \phi(x)^*.$$

۴.۱ نمایش روی گروه‌های موضعاً فشرده

تعریف ۱.۴.۱. یک فضای ضرب داخلی که تحت نرم $\|x\| = \langle x, y\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ فضای باناخ نیز هست را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم T یک نگاشت از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به‌روی خودش باشد که برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرط زیر صدق می‌کند

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y),$$

در این‌صورت T یک عملگر خطی روی $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، برای عملگر خطی $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ دوگان آن یعنی T^* عملگری یکتاست و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad \text{و} \qquad \langle T^*\omega, x\rangle = \langle \omega, Tx\rangle,$$

که در آن $x, \omega \in \mathcal{H}$ می‌باشند.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یک عملگر خطی و T^* دوگان آن باشد. عملگر T را یکانی گوییم هرگاه

$$TT^* = T^*T = ۱,$$

یعنی $T^* = T^{-۱}$. فضای همهٔ عملگرهای یکانی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ با عمل ضرب عملگرها که همان ترکیب است، تشکیل یک گروه می‌دهد.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. اگر X^* فضای تابعک‌های خطی کران‌دار روی X با نرم

$$\|\lambda\| = sup\{|\lambda x| : \|x\| \leq ۱\},$$

یک فضای باناخ باشد، در این‌صورت برای هر $x \in X$

$$\begin{aligned} P_x : X^* &\longrightarrow [۰, +\infty) \\ P_x(f) &= |f(x)|, \end{aligned}$$

یک شبه نرم است و در شرط $\bigcap\{f \in X^* : P_x(f) = ۰\} = \{۰\}$ که به شرط هاسدورف معروف است، صدق می‌کند. به این معنی که برای $f \in X^*$ و $x \in X$ اگر $P_x(f) = ۰$ باشد، نتیجه بگیریم $f = ۰$ است. توپولوژی ایجاد شده توسط این شبه نرم‌ها بر X^* را توپولوژی ضعیف ستاره[۱] می‌نامیم. اگر $(f_\alpha)_\alpha$ یک تور در X^* باشد، در این‌صورت

$$f_\alpha \longrightarrow f \Longleftrightarrow \forall x \in X : f_\alpha(x) \longrightarrow f(x).$$

تعریف ۶.۴.۱. توپولوژی فوق‌ضعیف[۲] که به آن توپولوژی ضعیف ستارهٔ عملگری نیز گفته می‌شود، به‌صورت توپولوژی ضعیف ستارهٔ به‌دست آمده از پیش‌دوگان $\mathcal{B}^*(\mathcal{H})$ از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ تعریف می‌شود که همگرایی در این‌جا نیز مانند همگرایی در تعریف قبل است.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم G گروه موضعاً فشرده باشد. یک نمایش یکانی از G هم‌ریختی گروهی $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ است که نگاشت $x \mapsto \pi(x)u$ از G به $\mathcal{H}_\pi$ را برای هر $u \in \mathcal{H}$ پیوسته کند. چون π هم‌ریختی گروهی است، لذا در شرایط زیر صدق می‌کند

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \qquad , \qquad \pi(x^{-۱}) = \pi(x)^{-۱} = \pi(x)^*.$$

$\mathcal{H}_\pi$ فضای نمایش π و بعد آن را با d_π نمایش می‌دهند که بعد یا درجهٔ π نیز نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۴.۱. یک نمایش روی G یک $*$ - نمایش روی $L^۱(G)$ به‌صورت زیر تولید می‌کند که برای $f \in L^۱(G)$، $\pi(f)$ عملگری روی $\mathcal{H}_\pi$ است. برای $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ داریم

$$\langle \pi(f)\xi | \eta \rangle = \int \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle f(x) dx,$$

---

[۱] $Weak^*\ Topology$

[۲] $Ultraweak$

و نگاشت $f \mapsto \pi(f)$ از $L^1(G)$ به $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ پیوسته است. در این‌جا $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ با توپولوژی نرمی درنظر گرفته می‌شود.

تعریف ۹.۴.۱. اگر π_1 و π_2 دو نمایش یکانی از G باشند، عملگر درهم‌پیچشی برای π_1 و π_2 نگاشت خطی و کران‌دار $T : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ است که در شرط زیر صدق کند

$$T\pi_1(x) = \pi_2(x)T \qquad x \in G.$$

مجموعهٔ همهٔ عملگرهای این چنینی با $C(\pi_1, \pi_2)$ نشان داده می‌شود. π_1 و π_2 هم‌ارزند اگر $C(\pi_1, \pi_2)$ شامل عملگر یکانی U باشد.

تعریف ۱۰.۴.۱. نمایش منظم چپ و راست از G نمایش‌های λ و ρ روی فضای هیلبرت $L^2(G)$ می‌باشند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda : G \to \mathcal{U}(L^2(G)) \quad ; \quad (\lambda(x)\xi)(y) \;:=\; \xi(x^{-1}y)$$
$$\rho : G \to \mathcal{U}(L^2(G)) \quad ; \quad (\rho(x)\xi)(y) \;:=\; \xi(yx)\Delta(x)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن $x, y \in G$ و $\xi \in L^2(G)$ می‌باشد.

۵.۱ $VN(G)$ یا جبر فون - نویمان

تعریف ۱.۵.۱. یک جبر فون - نویمان $\mathcal{A}$ روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ عبارت است از یک $*$ - زیرجبر به‌طور قوی بسته از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. توجه کنید که تور $(T_\alpha)_\alpha$ در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طور قوی به T همگراست هرگاه

$$\forall x \in \mathcal{H} : \qquad T_\alpha x \to Tx.$$

تعریف ۲.۵.۱. اگر $S \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین جبر فون - نویمانی که S را دربر دارد جبر فون - نویمان تولید شده توسط S می‌نامیم. در واقع اشتراک تمام جبرهای فون - نویمانی است که S را دربر دارند.

تعریف ۳.۵.۱. جبر فون - نویمان تولید شده توسط عملگرهای انتقال چپ $\{\lambda_x \;:\; x \in G\}$ در $\mathcal{B}(L^2(G))$ را با $VN(G)$ نمایش می‌دهیم که در آن λ نمایش منظم چپ روی G است. بنابراین عناصر $VN(G)$ عملگرهایی روی $L^2(G)$ هستند.