بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش هندسه

ویژگی میانگین سایه‌زنی ومیانگین سایه‌زنی مجانبی

استاد راهنما:

پروفسور محمد رضا مولایی

مولف:

کبری اسدی کتکی

شهریور ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: کبری اسدی کتکی

استاد راهنما: پروفسور محمدرضا مولایی

داور ۱ : دکتر محمد ابراهیمی

داور ۲ : دکتر محمدعلی ولی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر محسن مددی

تقدیم به:

اگر امروز دستانم یارای یاری رسانی یافته است، مرهون دستان پرمهر پدری هستم که بلندای دستانش همیشه سایبان مهربانی هاست. او که موهایش به سپیدی رفت تاسپیدرو بمانم.

واگر امروز آرزوهایم را بر پهنه‌ی هستی تحقق یافته می بینم مدیون دعاهای آسمانی مادری هستم که نگاه نگرانش همیشه بدرقه‌ی راهم و محبت بی دریغش آرامش بخش زندگیم بوده وهست. او که وجودم برایش همه رنج بوده و وجودش برایم همه مهر.

وبرادران و خواهران عزیزم که بهترین یاوران ودوستان زندگی ام بوده اند وصفا وپاکی وجودشان مایه‌ی افتخارم است.

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش سزاوار پروردگار مهربان است که هستی را در پاکی مطلق خویش و بر پایه‌ی دانش وعدالت آفرید و به بشر آموخت که نیل به خوشبختی درگرو اندیشیدن وپیمودن راه است. او را در برابر بی نهایت یاری ها وگره گشایی های مهربانانه اش سپاس بی کران می گویم.

سپاس بی پایان بر استاد ارجمندم جناب آقای پروفسور محمدرضا مولایی که دراین مدت از محضر علمی واخلاقی ایشان بهره بردم و همواره خود را مدیون زحمات ایشان می دانم و به خاطر راهنمایی واهتمام ارزشمندشان در مسیر رشد علمی ام، سپاسگزارم.

همچنین از زحمات اساتید محترم کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

چکیده

فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $f : X \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد. دراین پایان نامه نشان داده ایم که اگر f ویژگی میانگین سایه‌زنی و نقاط کمین چگال در X داشته باشد، f به طورضعیف آمیخته و به طورکلی قویاًارگودیک باشد و برای سیستم نابدیهی (X, f) ، اگر f دورگرا باشد، آنگاه f صادق درویژگی میانگین سایه‌زنی نیست، همچنین نشان داده ایم که انتقال کامل ویژگی میانگین سایه‌زنی دارد. درادامه روابط بین ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی ومفاهیم دیگری ازدینامیک توپولوژیکی رابیان می‌کنیم. ثابت خواهیم کردکه اگر f ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی و نقاط کمین چگال در X داشته باشد، برای هر $n \geq ۱$ ، $f \times f \times ... \times f$ (n بار)به طورکلی قویاًارگودیک است. درپایان خواهیم داشت که اگر f پوشا وهمپیوسته باشد یایک نقطه‌ی دورگرا داشته باشد، آنگاه f ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی ندارد.

کلمات کلیدی:ویژگی میانگین سایه‌زنی-ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی-به طورتوپولوژیکی ارگودیک-به طورقوی ارگودیک-به طورکلی قویاًارگودیک-نقاط کمین-دورگرا-پایدارلیاپانوف

فهرست مطالب

مقدمه

(الف)بررسی ویژگی میانگین سایه‌زنی نگاشت‌های پیوسته

$POTP$ (ویژگی سایه زنی شبه مدار) یکی ازمهمترین مفاهیم درسیستم های دینامیکی می‌باشد[۷]،که باپایداری وآشوب سیستم‌ها مرتبط است، برای نمونه[۲۶]-[۲۴] راببینید، همچنین $POTP$ بخش ضروری نظریه‌ی ارگودیک و پایداری می‌باشد [۷] و [۴] . ازدیدگاه عددی، اگرنگاشت پیوسته‌ی f ویژگی $POTP$ را دارا باشد، آنگاه مدارهای بدست آمده درفرآیندمحاسبات عددی رفتاردینامیکی واقعی f رانشان می‌دهند. دریافته‌ی اخیر بلنک [1] [۶] ، مفاهیمی ازویژگی میانگین سایه‌زنی درمطالعه سیستم‌های دینامیکی آشوباک را مطرح کرد.

برای $\delta > ۰$ ، دنباله ی $\{x_i\}_{۰\leq i\leq +\infty}$ درفضای متریک فشرده X یک δ -میانگین شبه مدار f می‌باشد، اگرعددصحیح مثبت $N = N(\delta) > ۰$ وجودداشته باشد به قسمی که برای هر $n \geq N$ و هر $k \in \mathbb{Z}_+$ ،

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n-۱} d(f(x_{i+k}), x_{i+k+۱}) < \delta.$$

نگاشت f ویژگی میانگین سایه‌زنی دارد، اگربرای هر $\varepsilon > ۰$ ، $\delta > ۰$ ای یافت شودبه قسمی که هر δ -میانگین شبه مدار $\{x_i\}_{۰\leq i\leq +\infty}$ به طورمیانگین توسط نقطه ای مانند $z \in X$ ، ε -سایه‌زنی شودیعنی

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n-۱} d(f^i(z), x_i) < \varepsilon.$$

ویژگی میانگین سایه‌زنی وسیله‌ی خوبی برای شناخت دیفئومورفیسم‌های انسو [۲۱] است. این ابداع اجازه می‌دهدکه نظریه‌ی سایه‌زنی دریک زمینه‌ی وسیع تری نسبت به قبل به کاررود. دریک یافته‌ی اخیر گو

[1] $Blank$

[۲] [۱۰] ، رابطه‌ی بین ویژگی میانگین سایه‌زنی و توپولوژی ارگودیکی راموردبحث قراردادو نشان دادکه نگاشت همپیوسته ای که ویژگی میانگین سایه‌زنی داردبه طورتوپولوژیکی نیزارگودیک است. هدف اصلی بررسی ویژگی های نگاشت‌های پیوسته باویژگی میانگین سایه‌زنی می‌باشد، ثابت می‌شودکه اگر f ویژگی میانگین سایه‌زنی داردو نقاط کمین f در X چگال هستند، آنگاه f به طورضعیف آمیخته و به طورکلی قویاً ارگودیک می‌باشد، همچنین به این نتیجه می‌رسیم که اگر f ، دورگرا باشدو ویژگی میانگین سایه‌زنی داشته باشد، آنگاه سیستم (X, f) بدیهی است، علاوه براین نشان می‌دهیم که انتقال کامل ویژگی میانگین سایه‌زنی دارد.

(ب) بررسی ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی نگاشت‌های پیوسته

اخیراً گو [۱۱] یک ویژگی جدیدسایه‌زنی به نام ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی رامطرح کرد.

دنباله‌ی $\{x_i\}_{0 \leq i \leq +\infty}$ در فضای متریک فشرده X یک میانگین شبه مدارمجانبی f است درصورتی که

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d(f(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

دنباله‌ی $\{x_i\}_{0 \leq i \leq +\infty}$ ، به طورمیانگین توسط نقطه‌ی $z \in X$ به طورمجانبی سایه‌زنی می‌شوددرصورتی که

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(z), x_i) = 0.$$

نگاشت f ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی دارددرصورتی که هرمیانگین شبه مدارمجانبی f به طورمیانگین توسط نقطه ای در X ، به طورمجانبی سایه‌زنی شود. مطالعه‌ی وجودویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی و روابط بین این ویژگی وویژگی‌های دیگردینامیکی توجه بسیاری ازمحققان رابرانگیخته است [۱۳]-[۱۱]. گو [۱۱] رابطه‌ی بین ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی و تعدی رامطالعه نمود. دریافته‌ی اخیر گو[۱۲] ،

[۲] Gu

نشان دادکه اگر f پوشاو همپیوسته است و ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی دارد، آنگاه f به طورتوپولوژیکی ارگودیک است ولی مانشان می‌دهیم که این نتیجه بی معنی است ((۶۰۲۰۵) . نتیجه) . هنری وهمکارانش [۳] [۱۳] روابط بین ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی وجاذب‌های f را موردبررسی قراردادند، هچنین دیفئومورفیسم‌هایی که دارای ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی می‌باشندرامطالعه کردند. اخیراً کلزیکی [۴] و اپراچا [۵] [۱۶] ، کلاسی ازنگاشت‌هایی که ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی دارندرابدست آوردندو ثابت کردندکه سیستم‌هایی که ویژگی مشخصه دارند، ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی رانیزدارامی‌باشند.

دراین پایان نامه، روابط بین ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی و مفاهیم دیگرتوپولوژیکی ازقبیل همپیوستگی، به طورقوی ارگودیکی و دورگرایی بررسی می‌شود. نشان می‌دهیم که اگر f ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی داردو نقاط کمین f در X چگال هستند، آنگاه برای هر $n \geq ۱$ ، $f \times f \times ... \times f$ (n بار)به طورکلی قویاًارگودیک می‌باشد، همچنین نشان داده می‌شودکه اگر f پوشاو همپیوسته است یا اگر f یک نقطه‌ی دورگرا دارد، آنگاه f ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی ندارد.

---

[۳] $Honary$

[۴] $Kulczycki$

[۵] $Oprocha$

فصل ۱

تعاریف واندیشه‌های پایه

دراین فصل مفاهیم اولیه وتعاریف اساسی موردنیازاین پایان نامه راارائه می‌دهیم.

۱.۱ مفاهیمی ازسیستم

سیستم معانی گوناگونی ازجمله سامانه، دستگاه، نظم و غیره دارد، مانندمنظومه شمسی، دستگاه معادلات خطی و غیره. سیستم مجموعه یاگروهی ازاشیامرتبط یاغیرمرتبط است که هدف یااهداف خاصی رادنبال می‌کنند، به گونه ای که واحدپیچیده ای راتشکیل می‌دهند.

درتعریف علوم انسانی، سیستم رامی‌توان مجموعه ای ازعناصرکه برای انجام مأموریت یارسیدن به هدف خاصی باکمیت وکیفیت معلوم طراحی و ساخته شده اندو باکمیت وکیفیت معلوم باهم ترکیب شده اند، تعریف نمود.

درتعریف علوم انسانی عناصرتشکیل دهنده‌ی سیستم به دو بخش اصلی قابل تقسیم هستند:

(۱) هسته‌ی اصلی، شامل عناصراجراکننده مأموریت است.

(۲) عوامل و امکانات پشتیبانی، شامل وسایل و امکانات بررسی و آزمایش شرایط فنی و تکنولوژی، ابزارنگهداری و تعمیرات، قطعات یدکی، اسنادو مدارک فنی شامل نقشه هاو دستورالعمل‌های نگهداری و تعمیرو بهره برداری و پرسنل آزموده وآماده سازی برای به کارگیری روش ها.

به عبارتی دیگر سیستم رامی‌توان مجموعه‌ی منظم قابل درکی ازحقایق، اصول، نظریه هاو امثال آن‌هادرزمینه‌ی خاصی ازدانش و اندیشه درنظرگرفت.

به عنوان مثال سیستم اطلاعات مدیریت، سیستمی است یکپارچه که ازکاربرو ماشین برای ارائه‌ی اطلاعات درپشتیبانی از عملیات، مدیریت وتصمیم گیری درسازمان تشکیل شده است. این سیستم از نرم افزارو سخت افزاررایانه ای، راهنماها، دستورالعمل‌ها، مدل‌هایی برای تحلیل، برنامه ریزی، کنترل و تصمیم گیری و یک پایگاه اطلات بهره می‌گیرد.

به عنوان مثالی دیگرمی‌توان تشکیلات یک بانک رادرنظرگرفت. تعدادی انسان، رایانه، قوانین پولی و اقتصادی که همه به نوعی وابسته به یکدیگربوده و به منظورارائه خدمات بانکی وکسب درآمدهای اقتصادی، منظم و هماهنگ شده اند.

سیستم دینامیکی به سیستم‌هایی اطلاق می‌گرددکه حالات آن‌هابازمان تغییرمی‌کند.

پیدایش مفاهیم مربوط به سیستم‌های دینامیکی باکارهای پوانکاره درباره مکانیک اجرام شروع شد.

۲.۱ پیشینه ی پژوهشی

درسال۱۹۸۹ بلنک مفاهیمی ازویژگی میانگین سایه‌زنی درمطالعه‌ی سیستم‌های آشوبناک رامطرح کرد. درسال۲۰۰۷ گو رابطه‌ی بین ویژگی میانگین سایه‌زنی و به طورتوپولوژیکی ارگودیک راموردبحث قراردادو نشان دادکه نگاشت پایدارلیاپانوفی که ویژگی میانگین سایه‌زنی دارد، به طورتوپولوژیکی ارگودیک است، همچنین ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی رامعرفی کردو رابطه‌ی بین این ویژگی باویژگی تعدی رامطالعه نمود، علاوه برآن گو درسال ۲۰۰۸ نشان دادکه اگرنگاشت پیوسته ای پوشاو همپیوسته باشدو ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی هم داراباشد، آنگاه به طورتوپولوژیکی ارگودیک است. درسال ۲۰۰۸ هنری و همکارانش روابط بین ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی و جاذب‌های نگاشت پیوسته رابررسی کردند، همچنین دیفئومورفیسم‌هایی که ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی دارندرامطالعه کردند. درسال ۲۰۱۰ کلزیکی و اپراچا کلاسی ازنگاشت‌هایی که ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی دارندرابه دست آوردندو ثابت کردندکه سیستم‌هایی که ویژگی مشخصه دارند، ویژگی میانگین سایه‌زنی مجانبی نیزدارند.

۳.۱ تعاریف کلی

تعریف ۱.۳.۱. *همه‌ی حالت‌های ممکن یک سیستم توسط یک مجموعه مانند X مشخص می‌شود. ا ین مجموعه، فضای حالت سیستم نامیده می‌شود.*

تعریف ۲.۳.۱. *فرض کنید X یک مجموعه باشد، مجموعه‌ی $\{R_\gamma : R_\gamma \subseteq X \times Y_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ یک سیستم نامیده می‌شود، اگربرای هر $x \in X$ ، $\gamma \in \Gamma$ ای یافت شودبه قسمی که x به دامنه‌ی R_γ تعلق داشته باشد.*

$(X, \{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})$ *یک فضای سیستماتیک نامیده می‌شود.*

تعریف ۳.۳.۱. *فرض کنیدتابع تک مقداری $\phi^t : X \to X$ روی فضای X حالت تعریف شده است که حالت اولیه‌ی $x_\circ \in X$ رادرزمان t به حالت $x_t \in X$ انتقال می‌دهد، یعنی $x_t = \phi^t(x_\circ)$ است، دراین صورت نگاشت ϕ^t عملگرتکامل سیستم دینامیکی نامیده می‌شود.*

تعریف ۴.۳.۱. *یک سیستم دینامیکی جفت $(X, \{\phi^t\})$ است که X فضای حالت و $\{\phi^t\}$ خانواده ای ازعملگرهای تکامل هستند که دردوشرط زیرصدق کنند:*

$$\phi^\circ = id \quad (۱)$$

$$\phi^t o \phi^s = \phi^{t+s} \qquad \forall\ t,s \in \mathbb{R} \quad (۲)$$

برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، ϕ^t راشارمی‌گویند.

مثال ۵.۳.۱. $X = \mathbb{R}$ *وخانواده‌ی تبدیلات خطی نامنفرد* $\phi^t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \circ \\ \circ & e^{\mu t} \end{pmatrix}$ *، به ازای* $t \in \mathbb{R}$ *و* $\circ \neq \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *یک سیستم دینامیکی است.*

تعریف ۶.۳.۱. *(۱) اگر X یک فضای توپولوژی و $\phi^t : X \to X$ همئومورفیسم باشد، $(X, \{\phi^t\}_t)$ یک سیستم دینامیکی توپولوژیکی است.*

(۲) اگر X یک فضای متری و $\phi^t : X \to X$ ایزومتری باشد، $(X, \{\phi^t\}_t)$ یک سیستم دینامیکی متریک است.

(۳) اگر X یک منیفلدهموارو $\phi^t : X \to X$ یک نگاشت مشتق پذیرباشد، $(X, \{\phi^t\}_t)$ سیستم دینامیکی هموار است.

(۴) اگر (X, m) یک فضای اندازه و $\phi^t : X \to X$ نگاشت حافظ اندازه باشد، $(X, \{\phi^t\}_t)$ سیستم اندازه پذیرمی‌باشد.

تعریف ۱.۳.۷. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی همه‌ی اعدادصحیح نامنفی باشد وبرای عددصحیح $p \geq ۲$ ، $\{۰, ۱, ..., p-۱\}^{\mathbb{N}}$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع از $\mathbb{N}$ به توی $S = \{۰, ۱, ..., P-۱\}$ باشدکه آن رابه شکل $\sum(p)$ نمایش می‌دهیم. مترزیرراروی $\sum(p)$ تعریف می‌کنیم:

$$d(s,t) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\delta(s_k, t_k)}{۲^k},$$

به طوری که برای $s = (s_۰, s_۱, ...)$ و $t = (t_۰, t_۱, ...)$ داریم:

$$\delta(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = \begin{cases} ۰ & i = j \\ ۱ & i \neq j \end{cases}$$

$\sum(p)$ رابه توپولوژی حاصلضربی مجهز می‌کنیم. نگاشت $\sigma : \sum(p) \to \sum(p)$ این طورتعریف می‌شود

$$\forall s, t \in \sum(p), \sigma(s) = t, s.t \quad t_j = s_{j+۱}, \forall j \geq ۰.$$

$(\sum(p), \sigma)$ سیستم دینامیکی نمادین یک طرفه نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱. سیستم دینامیکی (X,f) بدیهی است، اگر X فقط شامل یک نقطه باشد.

تعریف ۹.۳.۱. اگر (X,f) یک سیستم دینامیکی باشد، مدارپیشروی $x\in X$ به صورت زیرتعریف می‌شود

$$O^{+}(x,f)=\{f^{n}(x),n\geq ۰\}.$$

و اگر f همئومورفیسم است، مدارپسروی x به صورت زیرتعریف می‌شود

$$O^{-}(x,f)=\{f^{n}(x),n\leq ۰\}.$$

که دراین صورت

$$O(x,f)=O^{+}(x,f)\cup O^{-}(x,f).$$

مدار x نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۳.۱. نقطه‌ی $x\in X$ یک نقطه‌ی ثابت نگاشت $f:X\to X$ است، اگر $f(x)=x$ باشد.

تعریف ۱۱.۳.۱. نقطه‌ی x یک نقطه‌ی تناوبی باتناوب n ازنگاشت $f:X\to X$ است، اگر $f^{n}(x)=x$ و برای $۰<i<n$ ، $f^{i}(x)\neq x$ باشد. مجموعه‌ی نقاط متناوب بادوره‌ی تناوب n رابا $Per_{n}(f)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۳.۱. یک زیر مجموعه از فضای توپولوپی X ، مجموعه‌ی کانتورنامیده می‌شود، هرگاه

(۱) کلاًناهمبندباشد.

(۲) تام باشد.

(۳) فشرده باشد.

فصل ۲

سایه‌زنی درسیستم‌های دینامیکی

دراین فصل ویژگی‌های اصلی سایه‌زنی ازجمله $POTP$ و $LpSP$ و SUP رامعرفی می‌کنیم، همچنین یک مثال ازیک سیستم دینامیکی بیان می‌کنیم به طوری که سیستم روی مجموعه‌ی معرفی شده ویژگی $POTP$ داردولی ویژگی $LpSP$ رادارانمی‌باشد.

درادامه به معرفی ویژگی گسترندگی سیستم می‌پردازیم و درقالب لم نشان می‌دهیم که ویژگی گسترندگی باویژگی SUP تقریباًمعادل است. یادآورمی‌شویم که مطالب این فصل ازکتاب [۲۷] است.

۱.۲ مفاهیم اساسی ازدینامیک توپولوژی

دراین بخش (X,r) یک فضای متریک و $K=\mathbb{Z}$ یا $K=\mathbb{Z}_+$ می‌باشدو $d,\varepsilon>0$ ثابت درنظرگرفته شده اند.

تعریف ۱.۱.۲. *دنباله‌ی $\xi=\{x_k\in X : k\in K\}$ رایک d - شبه مسیرازسیستم دینامیکی ϕ روی K گوییم، اگر برای هر $k\in K$ نامساوی $r(\phi(x_k),x_{k+1})<d$ برقرار باشد.*

مثال ۲.۱.۲. *فرض کنید $X=\mathbb{R}^2$ باشد، همئومورفیسم ϕ رابه صورت زیرتعریف می‌کنیم:*

$$\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\mapsto(x+1,y)$$

برای هر $k\in\mathbb{Z}$، فرض کنید $x_k=(k,0)$ باشد، بنابراین

$$r(\phi(x_k),x_{k+1})=r((k+1,0),(k+1,0))=0<d,$$

لذانامساوی فوق برای هر $0<d$ برقراراست، درنتیجه دنباله $\xi=\{x_k : k\in\mathbb{Z}\}$ یک d - شبه مسیر ϕ روی $\mathbb{Z}$ است.

تعریف ۳.۱.۲. *برای $0<\varepsilon$ داده شده، فرض کنید $\xi=\{x_k : k\in K\}$ یک d - شبه مسیرروی K باشد. نقطه‌ی $x\in X$ شبه مسیر ξ را، ε - سایه‌زنی می‌کند، اگرنامساوی*

$$r(\phi^k(x),x_k)<\varepsilon, k\in K,$$