دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد
ریاضی محض (آنالیز)

موضوع:

پیوستگی مشتقها، نگاشتهای پیچان و همدورها از جبرهای باناخ

دانشجو:
ابراهیم دادوندی

استاد راهنما:
دکتر عبدالرسول پورعباس

استاد مشاور:
دکتر ناصر بروجردیان

مهر ۸۴

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیر کبیر
(پلی تکنیک تهران)

فرم اطلاعات پایان نامه تاریخ :۸۴/۷/۱۷

کارشناسی ارشد و دکترا پیوست:

معاونت پژوهشی

نام و نام خانوادگی: ابراهیم دادوندی **دانشجوی آزا د** [بله] **بورسیه** [ ] **معادل** [ ]

شمارهٔ دانشجوئی : ۸۲۱۱۳۱۳۳ **دانشکده :** ریاضی و علوم کامپیوتر **رشتهٔ تحصیلی :** ریاضی محض

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر عبدالرسول پورعباس

عنوان پایان نامه به فارسی : پیوستگی مشتقها، نگاشتهای پیچان و همدورها از جبرهای باناخ

عنوان پایان نامه به انکلیسی : **Continuity of derivations, intertwininig maps and Cocycles from Banach algebras**

نوع پروژه : **کارشناسی ارشد :** [بله] **دکتـــــری** [ ] **کاربردی** [ ] **بنیادی** [بله] **توسعه ای** [ ] **نظری** [ ]

تاریخ شروع : ۸۳/۷/۱۸ **تاریخ خاتمه : ۸۴/۷/۱۱** **تعداد واحد:** 6 واحد

سازمان تأمین کننده اعتبار : دانشگاه صنعتی امیرکبیر

واژه های کلیدی به فارسی : پیوستگی مشتقها – نگاشتهاي پيچان- ۲- همدورها-

واژه های کلیدی به انگلیسی : **Continuity of derivations – intertwininig maps – Cocycles ۲–**

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما : دکتر عبدالرسول پورعباس

دانشجو : ابراهیم دادوندی

امضاء استاد راهنما : **تاریخ :**

نسخهٔ ۱ : معاونت پژوهشی

نسخهٔ ۲: کتابخانه و به انضمام دوجلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

منبع اصلی این پایان نامه مقاله زیر است.

"Continuity of derivations, intertwining maps, and cocycles from Banach algebras"

Dales, H. G and Villena, A. R

J. London Math. Soc. (2) 63 (2001) 215-225.

چکیده

فرض کنیم که A یک جبر باناخ و E یک $A-$مدول باناخ باشد نگاشت خطی S از A به E را پیچان نامیم هر گاه نگاشت دو خطی

$$\begin{array}{c} A \times A \longrightarrow E \\ (a,b) \mapsto a.Sb - S(ab) + S(a).b \end{array}$$

پیوسته باشد. بعنوان مثال، اگر جبر باناخ A متناهی مولد باشد آنگاه هر نگاشت خطی از A به E پیچان خواهد شد.
در قسمت اول این پایان نامه، پیوسته بودن نگاشتهای پیچان را مورد مطالعه قرار خواهیم داد و نشان داده خواهد شد که اگر هر مشتق از جبر باناخ A به هر $A-$مدول باناخ پیوسته باشد آنگاه هر نگاشت پیچان نیز از جبر باناخ A به هر $A-$مدول باناخ پیوسته خواهد شد.

نگاشت دوخطی T از $A \times A$ به E را یک ۲$-$همدور نامیم هرگاه به‌ازای هر $a,b,c \in A$ داشته باشیم

$$a.T(b,c) + T(a,bc) = T(ab,c) + T(a,b).c$$

بعنوان مثال نگاشت دوخطی $\begin{array}{c} T : A \times A \longrightarrow A \\ (a,b) \longrightarrow a \otimes b \end{array}$ یک ۲$-$همدور است.
در قسمت دیگری از این پایان نامه شرایطی را روی جبر باناخ A و $A-$مدول باناخ و یکدار E تعیین می‌کنیم که تحت آن شرایط هر ۲$-$همدور از $A \times A$ به E، کراندار شود.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیاز

۱.۱ فضاهای خطی نرمدار

در کل این پایان نامه منظور از میدان[۱] $\mathbb{F}$، میدان اعداد حقیقی یا مختلط می‌باشد و هر جا که میدان مورد نظر ذکر نشده باشد منظور همان $\mathbb{F}$ می‌باشد

◄ **۱.۱.۱. تعریف .** فضای خطی[۲] حقیقی یا مختلط X به همراه نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فضای نرمدار خوانده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x, y \in X$ واسکالر α داشته باشیم

الف) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

ج) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

و آنرا باناخ نامیم هرگاه نسبت به متر تولیدشده توسط $\|.\|$ کامل باشد.

◄ **۲.۱.۱. تعریف .** فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد.

الف) نگاشت خطی T را در صورتی که یک به یک[۳] و پوشا[۴] باشد ایزومورفیسم[۵] خطی نامیم.

---

[۱] field
[۲] linear space
[۳] injective
[۴] surjective
[۵] isomorphism

ب) نگاشت خطی T را ایزومتری[۱] می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ داشته باشیم
$$\|Tx\| = \|x\|$$

◄ **۳.۱.۱. تعریف .** فرض کنید X و Y دو فضای خطی نرمدار باشند.

الف) اگر یک ایزومورفیسم از X به Y موجود باشد X را یکریخت با Y می نامیم و با $X \simeq Y$ نشان می‌دهیم.

ب) اگر یک ایزومورفیسم، ایزومتری از X به Y موجود باشد X را یکریخت طولپا با Y می‌نامیم و با $X \cong Y$ نشان می‌دهیم.

◄ **۴.۱.۱. تعریف .** فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. زیر مجموعه E از X را مستقل خطی[۲] نامند هرگاه به‌ازای هر زیرمجموعه متناهی $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ از E و هر زیرمجموعه متناهی $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ از اسکالرها اگر، $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ آنگاه برای هر i، $\alpha_i = 0$

◄ **۵.۱.۱. تعریف .** هر زیر مجموعه مستقل خطی ماکسیمال[۳] در X را یک پایه[۴] برای X می‌نامیم. اگر X یک پایه متناهی داشته باشد آنرا فضای متناهی مولد می نامیم در غیر اینصورت آنرا نامتناهی مولد می‌نامیم.

◄ **۶.۱.۱. تعریف .** فرض کنید X یک فضای خطی و Y یک زیرفضای آن باشد. گوییم Y دارای همبعد متناهی[۵]، n در X است هرگاه فضای خارج قسمتی X/Y، دارای بعد n باشد.

◄ **۷.۱.۱. نمادگذاری .**

الف) به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $\mathbb{N}_k = \{1, \ldots, k\}$

ب) فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n فضاهای خطی باشند. حاصلضرب دکارتی X_1، X_2، ... و X_n که با جمع مولفه‌وار یک فضای خطی می‌باشد با نماد $\prod_{i=1}^{n} X_i$ نشان می‌دهیم.

◄ **۸.۱.۱. تعریف .** فرض کنید X_1، X_2، ...، X_n و Y فضاهای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت

[۱] isometry
[۲] linear independent
[۳] maximal
[۴] base
[۵] finite codimention

$T:\prod_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow Y$ را $n-$ خطی نامیم هرگاه برای هر $i \in \mathbb{N}_n$ و $x_j \in X_j$ که در آن $j \in \mathbb{N}_n - \{i\}$، نگاشت

$$\begin{aligned} X_i &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto T(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n) \end{aligned}$$

خطی باشد. برای ساده نویسی نگاشت های ۱−خطی را خطی و ۲−خطی را دوخطی می‌نویسیم.

◄ **۹.۱.۱. نمادگذاری .** فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ و Y فضاهای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند.

الف) مجموعه تمام نگاشتهای $n-$خطی از $\prod_{i=1}^{n} X_i$ به Y را با $L(X_1,\dots,X_n;Y)$ نشان می‌دهیم.

ب) اگر $X_1=\dots=X_n=X$ آنگاه تمام نگاشتهای $n-$خطی از $\prod_{i=1}^{n} X_i$ به Y را با $L^n(X;Y)$ نشان می‌دهیم.

ج) هر عضو $L(X_1,\dots,X_n;\mathbb{F})$، را یک تابعک[1] $n-$خطی می‌نامیم.

◄ **۱۰.۱.۱. لم .** فرض کنید X و Y دو فضای خطی نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ و $B(X,Y)$ فضای تمام نگاشتهای خطی پیوسته[2] از X به Y باشد آنگاه $B(X,Y)$ با نرم

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

یک فضای نرمدار خواهد شد.

◄ **۱۱.۱.۱. قضیه .** فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. اگر X متناهی مولد باشد آنگاه هر نگاشت خطی از X به Y پیو سته خواهد شد.

برهان . [[۴]، ص ۷۲، گزاره ۳.۴]

◄ **۱۲.۱.۱. لم .** فرض کنیم X یک فضای نرمدار، M یک زیر فضای خطی آن و f یک تابعک خطی پیوسته روی M باشد، آنگاه یک تابعک خطی پیوسته $\tilde{f}$ روی X وجود دارد بطوریکه

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| \qquad , \qquad \tilde{f}_{|M} = f$$

---

[1] functional
[2] continuous

برهان . [[۴]، ص ۸۱، نتیجه ۶.۵]

◄ **۱۳.۱.۱. قضیه .** فرض کنید X و Y دو فضای خطی نرمدار باشند. اگر Y باناخ باشد، آنگاه $B(X,Y)$ باناخ خواهد شد.

برهان . [[۱]، ص ۱۸۲، قضیه ۲۳.۱۵]

◄ **۱۴.۱.۱. مثال .**

الف) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی هاوسدورف[۱] و موضعاً فشرده[۲] باشد.
$C_\circ(X)$ را فضای تمام تابعهای پیوسته $f : X \to \mathbb{C}$ در نظر می گیریم، بطوریکه به‌ازای هر ϵ مجموعه $\{a \in X : |f(a)| \geq \epsilon\}$ فشرده باشد. $C_\circ(X)$ با نرم زیر یک فضای باناخ می‌باشد.

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(a)| \; a \in X\} \qquad (f \in C_\circ(X))$$

[[۴]، ص ۶۷، گزاره ۱.۷]

ب) فرض کنید Λ مجموعه تمام دنباله‌های همگرا در $\mathbb{F}$ باشند. Λ با نرم l^∞ یک فضای باناخ خواهد شد.

ج) فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. X^* فضای تمام تابعکهای پیوسته روی X، یک فضای باناخ خواهد شد.

◄ **۱۵.۱.۱. تعریف .** فرض کنید که X و Y دو فضای نرمدار و $S \subset L(X,Y)$ باشد

الف) $\mathcal{S}$ را نقطه به نقطه کراندار[۳] نامیم هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ مجموعه $\{T(x) : T \in \mathcal{S}\}$ کراندار باشد.

ب) $\mathcal{S}$ را بطور یکنواخت کراندار[۴] گوییم هرگاه $C > \circ$ چنان موجود باشد که برای هر $T \in \mathcal{S}$
$\|T\| \leq C$

---

[۱] Hausdorff
[۲] locally compact
[۳] pointwise bounded
[۴] uniform bounded

◄ **۱.۱.۱۶. قضیه** . [۱] فرض کنید X یک فضای باناخ و Y یک فضای نرمدار باشد، آنگاه هر زیرمجموعه از $B(X,Y)$ نقطه به نقطه کراندار است اگر و تنها اگر بطور یکنواخت کراندار باشد.

برهان . [[۱]، ص ۱۸۳، قضیه ۲۳.۱۶]

◄ **۱.۱.۱۷. قضیه** . فرض کنید که A یک فضای باناخ، E یک فضای خطی نرمدار و $T \in L^2(A,E)$ باشد. اگر T بطور مجزا نسبت به هر کدام از مؤلفه‌هایش پیوسته باشد، آنگاه T دوخطی کراندار خواهد شد.

برهان . به‌ازای هر $a \in A$ نگاشت T_a را از A به E با ضابطه $T_a(b) = T(a,b)$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $\mathcal{S} = \{T_a : a \in A\}$.
از آنجا که T نسبت به مؤلفه اولش پیوسته است پس هر $T_a \in B(A,E)$، لذا $\mathcal{S} \subset B(A,E)$. از طرفی به‌ازای هر $b \in A$ مجموعه $\{T_a(b) : a \in A\}$ نقطه به نقطه کراندار است، زیرا بنابر پیوستگی T نسبت به مؤلفه دوم داریم

$$\|T_a(b)\| = \|T(a,b)\| \leq K_b\|a\|$$

حال بنابر قضیه پیش، $\mathcal{S}$ بطور یکنواخت کراندار است لذا $C \geq 0$ چنان موجود است که برای هر $a \in A$، $\|T_a\| \leq C$ پس $\|T\| \leq C$.

تذکر: فرض می‌کنیم X یک فضای نرمدار و M یک زیر فضای خطی بسته آن باشد. نگاشت

$$\begin{gathered} Q : X \longrightarrow X/M \\ Q(x) = x + M \end{gathered}$$

را نگاشت طبیعی [۲] می‌نامیم. نگاشت

$$\begin{gathered} \|.\| : X/M \to \mathbb{R}^+ \\ \|x+M\| = \inf\{\|x-y\| : y \in M\} \end{gathered}$$

یک نرم روی X/M است. این نرم را نرم خارج قسمتی [۳] روی X/M می‌نامیم.

---
[۱] The principle of uniform boundedness
[۲] natural map
[۳] quotient

◄ **۱۸.۱.۱.** قضیه . فرض کنید X یک فضای نرمدار و M یک زیر فضای بسته آن باشد. X/M را با نرم خارج قسمتی در نظر می‌گیریم، آنگاه

الف) $\|Q(x)\| \leq \|x\|$

ب) اگر X باناخ باشد آنگاه X/M نیز فضای باناخ خواهد شد.

برهان . [[۴]، ص ۷۳، قضیه ۴.۲]

◄ **۱۹.۱.۱.** گزاره . فرض کنید X یک فضای نرمدار و M یک زیرفضای متناهی مولد باشد آنگاه M بسته است.

برهان . [[۴]، ص ۷۲، گزاره ۳.۳]

◄ **۲۰.۱.۱.** قضیه . فرض کنید X یک فضای باناخ و نامتناهی مولد باشد و M یک زیرفضای متناهی مولد باشد آنگاه یک تابعک خطی ناپیوسته روی X وجود دارد که تحدیدش به M صفر است.

برهان . باتوجه به گزاره پیش M بسته است و بنابر قضیه (۱۸.۱.۱) ، X/M باناخ است. از آنجا که X/M نامتناهی مولد است پس یک تابعک خطی ناپیوسته مانند f روی آن وجود دارد در نتیجه $f \circ Q$ یک تابعک ناپیوسته روی X است که تحدیدش به M صفر است.

۲.۱ جبرهای حقیقی و مختلط

◄ **۱.۲.۱.** تعریف . فضای باناخ حقیقی یا مختلط A را به همراه نگاشت $\begin{array}{c} A \times A \to A \\ (a,b) \mapsto ab \end{array}$ یک جبر باناخ خوانیم هرگاه به‌ازای هر $a,b,c \in A$ و اسکالر α داشته باشیم

$$a(bc) = (ab)c \ , \ a(b+c) = ab + ac \ , \ (a+b)c = ac + bc \ , \ (\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

و آنرا یکدار[۱] نامیم هرگاه عنصر $e \in A$ چنان پیدا شود که به‌ازای هر $a \in A$

$$ae = ea = a$$

◄ **۲.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A و B دو جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت خطی $\theta : A \to B$ را هومورفیسم[۲] جبری می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$$

◄ **۳.۲.۱. مثال .**

الف) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، فضای تمام نگاشتهای پیوسته از X به X، را با $B(X)$ نشان می‌دهیم. $B(X)$ با نرم

$$\|T\| = sup\{\|T(a)\| : a \in X\ , \|a\| \leq ۱\}$$

یک جبر باناخ می باشد.

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی n فضای تمام ماتریسهای $n \times n$ را با M_n نشان می‌دهیم . M_n را به عنوان فضای عملگر های خطی روی $\mathbb{C}^n$ در نظر می‌گیریم. M_n با جمع و ضرب ماتریسی و نرم عملگری یک جبر باناخ یکدار می باشد.

ج) فرض کنید X یک فضای هاوسدورف باشد. $C_b(X)$ مجموعه تمام توابع پیوسته، $f : X \to \mathbb{F}$ بطوریکه

$$\|f\| = sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$$

با جمع و ضرب مؤلفه‌وار یک جبر باناخ می‌باشد. [[۴] ص ٦٧، مثال ٦.١]

د) فرض کنید X یک فضای هاوسدورف و موضعاً فشرده باشد آنگاه $C_\circ(X)$ با جمع و ضرب مؤلفه‌وار یک جبر باناخ می‌باشد.

◄ **۴.۲.۱. تعریف .** فرض کنید که A یک جبر و E یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. اگر نگاشت $\begin{array}{c} A \times E \to E \\ (a, x) \mapsto a.x \end{array}$ چنان موجود باشد که

---

[۱] unital
[۲] homomorphism

الف) به‌ازای هر $a \in A$ نگاشت $x \mapsto a.x$ روی E خطی باشد.

ب) به‌ازای هر $x \in E$ نگاشت $a \mapsto a.x$ روی A خطی باشد.

ج) به‌ازای هر $x \in E$ و $a, b \in A$ داشته باشیم $(ab).x = a.(b.x)$

آنگاه E راهمراه با این نگاشت یک A–مدول چپ[۱] نامیم. به همین ترتیب A–مدول راست نیز تعریف خواهد شد. E را A–مدول[۲] نامیم هر گاه همزمان A–مدول چپ و راست باشد و برای هر $a, b \in A$ و $x \in E$ داشته باشیم

$$a.(x.b) = (a.x).b$$

◄ **۵.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک فضای باناخ باشد. E را A–مدول چپ باناخ گو ییم هر گاه A–مدول چپ باشد و $K > 0$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $a \in A$ و $x \in E$ داشته باشیم

$$\|a.x\| \leq K\|a\|\|x\|$$

به همین ترتیب A–مدول راست باناخ و A– مدول باناخ تعریف می‌شوند.

◄ **۶.۲.۱. مثال .**

الف) فرض کنید A و B دو جبر و $\theta : A \to B$ یک همومورفیسم جبری باشد. B با ضربهای زیر

$$a.b = \theta(a)b \qquad , \qquad b.a = b\theta(a)$$

یک A–مدول می‌باشد.

ب) فرض کنید E یک A–مدول باناخ باشد. E^* با ضربهای زیر

$$(a.f)(x) = f(x.a) \qquad (f.a)(x) = f(a.x)$$

یکA–مدول باناخ است.

◄ **۷.۲.۱. نمادگذاری .**

[۱] left A-moduale
[۲] A-bimoduale

الف) برای هر مجموعه دلخواه V قرار می‌دهیم $\quad V^\bullet = V - \{0\}$

ب) فرض کنید A یک جبر مختلط و a عضو دلخواهی از آن باشد، زیرجبر تولید شده توسط a را با $\mathbb{C}_a$ نشان می‌دهیم.

◄ **۸.۲.۱. لم .** فرض کنیم A یک جبر مختلط، ناصفر، متناهی مولد و حوزه‌صحیح[1] (قاعده حذف از هر دو طرف برقرار است) باشد آنگاه A یکدار است و $A = \mathbb{C}_e$

برهان . به‌ازای هر $a \in A^\bullet$ نگاشت

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A \\ b &\mapsto ab \end{aligned}$$

خطی و یک بیک است. چون A متناهی مولد است نگاشت مذکور دوسویی است. لذا یک عنصر $e \in A$ وجود دارد بطوریکه $ae = a$، پس داریم

$$ae^2 = (ae)e = ae \implies a(e^2 - e) = 0 \implies e^2 = e$$

در اینصورت به‌ازای هر $b \in A$ داریم

$$e(eb - b) = (be - b)e = 0 \implies eb = be = b$$

بنابراین A یکدار است. اما چون A متناهی مولد است پس یک چندجمله‌ای $p(x) \in \mathbb{C}[X]$ وجود دارد بطوریکه $p(a) = 0$. از طرفی با توجه به اینکه هر چندجمله‌ای با ضرایب مختلط در $\mathbb{C}[X]$ شکافته می‌شود لذا اسکالرهای $\alpha_0 \in \mathbb{C}^\bullet$ و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ وجود دارند بطوریکه

$$p(x) = \alpha_0 (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) \implies \exists j \in \mathbb{N}_n \quad a = \alpha_j e$$

◄ **۹.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر باشد
زیر فضای خطی I از A را یک ایده‌ال چپ[2] A نامیم هرگاه به‌ازای هر $x \in I$ و $a \in A$ داشته باشیم

$$ax \in I$$

به همین صورت ایده‌ال راست تعریف می‌شود. زیر فضای خطی I از A را ایده‌ال نامیم هرگاه همزمان ایده‌ال چپ و راست A باشد.

[1] integral domain
[2] left ideal

◄ **۱۰.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر و I یک زیر فضای خطی آن باشد. I را ایده‌ال مدولار چپ[۱] A می‌نامیم، هرگاه I ایده‌ال چپ A باشد و یک عنصر $s \in A$ موجود باشد که

$$A(۱ - s) = \{a - as : a \in A\} \subset I$$

در اینصورت s را یکهٔ مدولار راست می نامیم. به همین ترتیب ایده‌ال مدولار راست و یکهٔ مدولار چپ تعریف می‌شوند.

◄ **۱۱.۲.۱. مثال .** فرض کنید A یک جبر یکدار باشد. هر ایده‌ال چپ یا راست A، مدولار خواهد شد.

◄ **۱۲.۲.۱. تعریف .** ایده‌ال مدولار چپ سره[۲] I، از جبر A را ماکسیمال نامیم هر گاه مشمول هیچ ایده‌ال چپ مدولار سره نباشد.

◄ **۱۳.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. A راجبر ساده[۳] خوانیم هرگاه $A^۲ \neq ۰$ و ایده‌ال غیر بدیهی نداشته باشد.

◄ **۱۴.۲.۱. لم .** به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $M_n(\mathbb{F})$ یک جبر ساده است.

برهان . فرض کنید I یک ایده‌ال ناصفر در $M_n(\mathbb{F})$ باشد و $T = (\alpha_{ij}) \in I^\bullet$، پس T دارای درایهٔ غیرصفری همچون α_{rs} می‌باشد.(E_{rs} ماتریسی است که‌درایه rs آن ۱ وبقیه درایه‌هایش صفر و E_n ماتریس همانی است)

$$\alpha_{rs}E_{rs} = E_{rr}TE_{ss} \in I \Longrightarrow E_{rs} \in I$$

لذا

$$E_n = \sum_{i=۱}^{n} E_{ir}E_{rs}E_{si} \in I \Longrightarrow I = M_n(\mathbb{F})$$

◄ **۱۵.۲.۱. تعریف .** فرض کنیم A یک جبر و E یک A–مدول چپ باشد

الف) E بر عضو $a \in A$ بخش‌پذیر[۴]است هرگاه $a.E = E$.

---

[۱] left modular ideal
[۲] proper
[۳] simple algebra
[۴] divisible

ب) فرض کنید $B \subseteq A$ گوییم E بر B بخش‌پذیر است هرگاه به‌ازای هر $a \in B^{\bullet}$ داشته باشیم
$$a.E = E$$

ج) مدول E را بخش‌پذیر خوانیم هرگاهE بر A بخش‌پذیر باشد.

◄ **۱۶.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر و E و F دو A−مدول چپ باشند. نگاشت خطی $T : E \to F$ را A−مدول همومورفیسم چپ نامیم هرگاه به‌ازای هر $a \in A$ و $x \in E$ داشته باشیم
$$T(a.x) = a.T(x)$$
فضای تمام A−مدول همومورفیسم های چپ از E به F را با ${}_Ah(E,F)$ و همچنین ${}_Ah(E,E)$ را با ${}_Ah(E)$ نشان می‌دهیم.

◄ **۱۷.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر و E یک A−مدول باشد.

الف) زیرفضای خطی G از E را یک زیرمدول E خوانیم هرگاه با ضرب القایی یک A−مدول باشد.

ب) E را یک A− مدول چپ ساده گوییم هرگاه $A.E \neq ۰$ و E زیرمدول غیر بدیهی نداشته باشد.

◄ **۱۸.۲.۱. قضیه .** فرض کنید A یک جبر و E یک A−مدول چپ ساده باشد، آنگاه ${}_Ah(E)$ یک جبر بخش‌پذیر است.

برهان . بدیهی است که ${}_Ah(E)$ یک زیرجبر از $L(E)$ است. فرض کنیم T عضو دلخواهی از ${}_Ah(E)^{\bullet}$ باشد لذا $\ker T$ و $T(E)$ دو زیرمدول چپ از E هستند.
از طرفی چون E ساده است پس $\ker T = ۰$ و $T(E) = E$. بنابراین T داری معکوسی همچون S می‌باشد و برای هر $a \in A$ و $x \in E$ داریم
$$T(S(a.x)) = a.x \;\;,\;\; T(a.Sx) = a.TS(x) = a.x \Longrightarrow S(a.x) = a.S(x) \Longrightarrow S \in {}_Ah(E)^{\bullet}$$

◄ **۱۹.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. عمل $\circ$ را بصورت $\begin{array}{l} \circ : A \times A \to A \\ (x,y) \mapsto x + y - xy \end{array}$ تعریف می‌کنیم.

A نسبت به این عمل یک جبر یکدار می‌باشد که $e = 0$ عنصر یکه آن است.
عنصر $a \in A$ شبه معکوس‌پذیر[1] نامیده می‌شود، هرگاه $b \in A$ چنان موجود باشد که

$$b \circ a = a \circ b = 0$$

◄ **۲۰.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر مختلط باشد
طیف[2] یک عنصر دلخواه $a \in A$ را که با نماد $\sigma(a)$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌کنیم

الف) اگر جبر A یکدار باشد $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}$ معکوس پذیر نباشد $\lambda e - a\}$

ب) اگر جبر A یکدار نباشد $\sigma(a) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}^\bullet$ شبه معکوس پذیر نباشد $\lambda^{-1} a\}$

◄ **۲۱.۲.۱. لم .** فرض کنید A یک جبر مختلط و یکدار باشد. به‌ازای هر $a \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}^\bullet$، شرط لازم و کافی برای آنکه $\alpha e - a$ معکوس‌پذیر باشد آنست که $\alpha^{-1} a$ شبه معکوس‌پذیر باشد.

برهان . به‌ازای هر $a \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}^\bullet$ عنصر $b \in A$ موجود است بطوریکه
$\alpha^{-1}(\alpha e - a)b = b\alpha^{-1}(\alpha e - a) = e$ لـذا

$$(e - b) \circ \alpha^{-1} a = \alpha^{-1} a \circ (e - b) = 0$$

برعکس. فرض کنید $\alpha^{-1} a$ شبه‌معکوس پذیر باشد آنگاه عنصر $b \in A$ وجود دارد که
$(\alpha^{-1} a) \circ b = b \circ (\alpha^{-1} a) = 0$

دراینصورت داریم

$$\alpha^{-1}(e - b)(\alpha e - a) = (\alpha e - a)(e - b)\alpha^{-1} = e$$

◄ **۲۲.۲.۱. مثال .** فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد

الف) اگر X فشرده باشد، به‌ازای هر $f \in C_0(X)$ داریم $\sigma(f) = f(X)$

ب) اگر X باناخ باشد، به‌ازای هر $T \in B(X)$ داریم

$$\sigma(T) = \{\alpha \in \mathbb{C} : \ker(T - \alpha I) \neq (0)\} \cup \{\alpha \in \mathbb{C} : Im(T - \alpha I) \neq X\}$$

[[۴] ص ۱۹۹ و ۲۰۰ ، مثالهای ۳.۲ و ۳.۳]

[1] quasi invertible
[2] spectrum

◄ **۲۳.۲.۱. قضیه .** فرض کنید A یک جبر مختلط، یکدار و a عضو دلخواهی از آن باشد

الف) به‌ازای هر چند جمله‌ای $p(x) \in \mathbb{C}[X]$ داریم $\qquad p(\sigma(a)) = \sigma(p(a))$

ب) اگر یک چند جمله‌ای مانند $p(x) \in \mathbb{C}[X]$ وجود داشته باشد بطوریکه $p(a) = ۰$ آنگاه $\sigma(a)$ دارای تعداد متناهی عضو است.

برهان .

الف) استقرا روی ∂p.
اگر $p(x) = c$ آنگاه $p(\sigma(a)) = \sigma(p(a)) = c$، پس فرض می کنیم که $\partial p \geq ۱$. به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، اسکالرهای $\alpha_۰ \in \mathbb{C}^\bullet$ و $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ چنان وجود دارند که

$$\lambda - p(x) = \alpha_۰(x - \alpha_۱)\ldots(x - \alpha_n)$$

لذا $\lambda - p(a)$، معکوس پذیر است اگر و تنها اگر هر $a - \alpha_i e$ معکوس پذیر باشد.

$$\lambda \in \sigma(p(a)) \Longrightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N}_n : \alpha_i \in \sigma(a) \quad \Longrightarrow \lambda \in p(\sigma(a))$$

برعکس

$$\lambda \in p(\sigma(a)) \Longrightarrow \exists \alpha_i \in \sigma(a) : p(\alpha_i e) = \lambda \Longrightarrow \lambda \in \sigma(p(a))$$

ب) با توجه به قسمت (الف) و اینکه هر چندجمله‌ای از درجه n حداکثر n صفر متمایز دارد.

◄ **۲۴.۲.۱. تعریف .** فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. هر تابعک خطی ناصفر که به‌ازای هر $a, b \in A$ دارای خاصیت $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ باشد، یک تابعک خطی ضربی می‌نامیم.

◄ **۲۵.۲.۱. نمادگذاری .** فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.

الف) مجموعه تمام تابعکهای ضربی روی A را با Φ_A نشان می‌دهیم.

ب) هسته[۱] هر تابعک ضربی مانند ϕ را با M_ϕ نشان می‌دهیم.

[۱] kernel

◄ **۲۶.۲.۱. مثال .** فرض کنید X یک فضای هاوسدورف و B یک زیرجبر از $C_b(X)$ باشد. به‌ازای هر $t \in X^\circ$، نگاشت

$$\phi_t : B \to \mathbb{C}$$
$$\phi_t(f) = f(t)$$

یک تابعک ضربی می‌باشد.

◄ **۲۷.۲.۱. لم .** فرض کنید A یک جبر نرمدار و ϕ یک تابعک ضربی روی آن باشد، آنگاه ϕ پیوسته است و $\|\phi\| \leq ۱$. اگر A یکدار باشد آنگاه $\phi(e) = ۱$.

برهان . [[۳]، ص ۷۷، گزاره ۳]

◄ **۲۸.۲.۱. قضیه .** فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. نگاشت $\phi \mapsto M_\phi$ یک تناظر دوسویی بین Φ_A و مجموعه ایده‌ال‌های مدولار ماکسیمال A که دارای همبعد ۱ هستند برقرار می‌کند.

برهان . فرض کنیم $\phi \in \Phi_A$ لذا $u \in A$ چنان موجود است که $\phi(u) = ۱$. u یکه مدولار برای M_ϕ می‌باشد زیرا به‌ازای هر $a \in M_\phi$ داریم $\phi(a - au) = \phi(a - ua) = \circ$
همچنین هرعضو $a \in A$ را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$a = \phi(a)u + (a - \phi(a)u) \in \mathbb{F}u + M_\phi$$

پس M_ϕ یک ایده‌ال مدولار ماکسیمال با همبعد ۱ می‌باشد. حال فرض کنیم که $\psi \in \Phi_A$ موجود باشد بطوریکه $M_\phi = M_\psi$، لذا $u^۲ - u \in M_\psi$ و

$$\psi(u) = \psi(u^۲) = (\psi(u))^۲ \Longrightarrow \psi(u) = ۱ \Longrightarrow \psi = \phi$$

اکنون فرض می‌کنیم M یک ایده‌ال مدولار ماکسیمال با همبعد ۱ و u یکه مدولار برای آن باشد، نگاشت

$$\phi : \mathbb{F}u + M \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$(\alpha u + m) \mapsto \alpha$$

یک تابعک خطی ضربی می‌باشد بطوریکه $M_\phi = M$.